École Supérieure des Sciences Appliquées de Tlemcen
Examen final de la physique des vibrations
16 Janvier 2018 – Durée: 02h00

Exercice 1: (10 points)

Partie I:

Une masse $m = 20\,\mathrm{kg}$, attachée à un ressort de constante de raideur $k_1 = 20\,\mathrm{N\,m^{-1}}$, et un amortisseur de coefficient de frottement α_1 (voir figure (1)), se déplace sans frottement sur un plan horizontal.

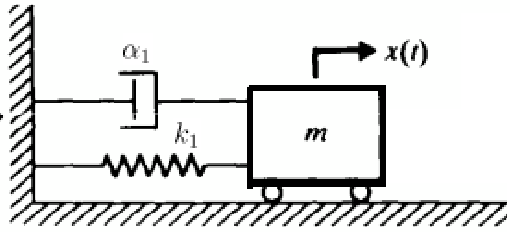


Figure 1:

1. Écrire l'expression de l'énergie cinétique de la masse m.
2. Écrire l'expression de l'énergie potentielle du système.
3. En déduire le Lagrangien du système.
4. Écrire l'équation de mouvement de la masse en fonction de sa pulsation propre ω_0 et le facteur d'amortissement $\gamma_1 = \dfrac{\alpha_1}{2\,m}$.
5. Calculer la pulsation propre ω_0 du système. (N'oubliez pas les unités!)
6. Quelle est la valeur de α_1 pour que la masse ait un mouvement critique?
7. Donner, dans ce cas, l'expression de l'équation horaire du mouvement (sans calcul).
8. Décrire le mouvement de la masse m.

Partie II:

La masse $m = 20\,\mathrm{kg}$, attachée au ressort de raideur $k_1 = 20\,\mathrm{N\,m^{-1}}$, est maintenant soumise à un deuxième amortisseur de coefficient de frottement α_2, dont l'extrémité en Q est soumise à un déplacement sinusoïdal $y(t) = Y\sin\omega t$. (voir figure (2))

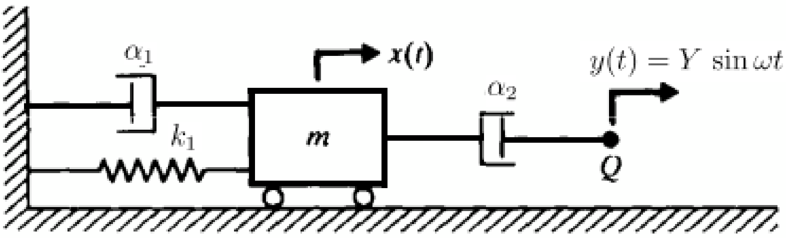


Figure 2:

1. Écrire l'équation de mouvement de la masse en fonction de sa pulsation propre ω_0 et les facteurs d'amortissement γ_1 et γ_2.
2. Dans le cas où $\alpha_1 = 20\,\mathrm{s^{-1}}$, quelle serait la valeur de α_2 pour que la solution sans second membre de l'équation différentielle ci-dessus donne un mouvement critique?
3. On se propose une solution de l'équation différentielle dans le régime permanent sous la forme:

$$x_p(t) = A\cos(\omega t - \varphi)$$

Que représentent physiquement les grandeurs: A, ω et φ?

4. En d'eduire les expressions de A et φ en fonction de ω et Y.
5. Écrire la solution en régime permanent pour les valeurs suivantes: $Y = 0.1$ m et $\omega = 1\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$.

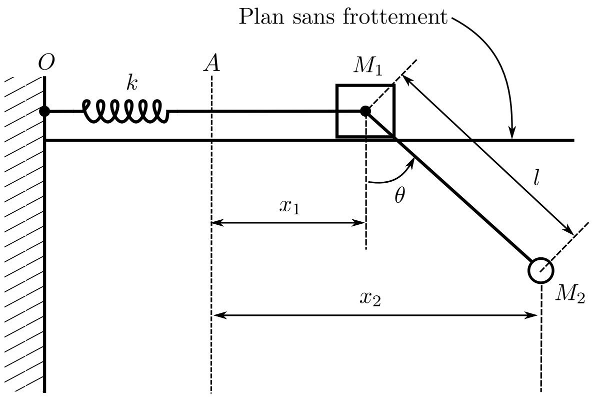
6. En déduire l'expression de la solution générale dans le cas où les conditions initiales suivantes: $x(0) = 0$ m et $\dot{x}(0) = 0$ m s^{-1} sont appliquées.

7. On considère que le régime transitoire du mouvement prend fin quand le déplacement correspondant à la solution sans second membre est égal $\frac{1}{10}$ l'amplitude de la solution particulière. Écrire, sans résoudre, l'équation algébrique qui donne le temps que dure le régime transitoire du système.

8. Donner l'expression de la force appliquée par le système sur le mur au point P (dans le régime permanent).

9. Calculer, dans le régime permanent, l'énergie dissipée par frottement pendant une période $T = \frac{2\pi}{\omega}$ et la comparer avec l'énergie fournie au système pendant la même période. Commenter.

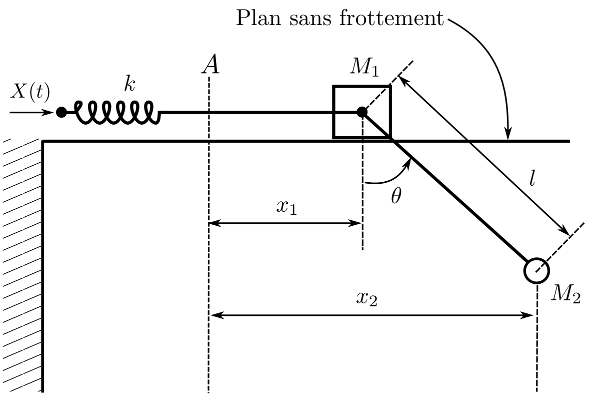
Exercice 2: (10 points)



Dans le schéma ci-contre, une masse M_1 glisse sans frottement sur un plan horizontal et est connectée à un support O à l'aide d'un ressort de constante de raideur k. La masse M_2 est quant à elle connectée par une ficelle de longueur l à la masse M_1. OA représente la longueur du ressort au repos, x_1 et x_2 sont, respectivement, les positions de M_1 et M_2 par rapport au point A. Noter bien que la figure n'est pas à la bonne échelle, pour un besoin de clarté, les distances x_1 et x_2 sont exagérées, car en réalité $x_1 \ll$ OA. Nous nous plaçerons également dans le cas spécial des petites oscillations $\theta \ll 10°$.

1. En fonction des coordonnées x_1 et x_2, exprimer le lagrangien du système.
2. En déduire les équations de mouvement des deux masses M_1 et M_2.
3. Dans le cas $M_1 = M_2 = M$, calculer les modes propres en fonction des pulsations naturelles $\omega_r = \sqrt{k/M}$ et $\omega_p = \sqrt{g/l}$.
4. Calculer les rapports des amplitudes des deux masses dans les deux modes.

Dans ce qui va suivre, nous détachons l'extrêmité du ressort au point O et lui imposons un mouvement périodique de la forme $X(t) = X_0 \cos(\omega t)$.



5. Écrire les équations de mouvement des deux masses M_1 et M_2.
6. Prenons les deux masses égales à M. Dans le régime permanent, exprimer les amplitudes des deux masses en fonction de ω_r, ω_p, X_0 et ω?
7. Il existe une pulsation ω pour lquelle une masse deviendrait immobile et l'autre oscillerait. Quelle est cette pulsation?
8. Discuter cette situation inédite.