Département du cycle de formation

Corrigé de l'examen final (vibrations)

Exercice 01 :

Partie I :

Une masse $m = 50\,\text{kg}$, attachée à un ressort de constante de raideur $k_1 = 10\,\text{N.m}^{-1}$, et un amortisseur de coefficient de frottement α_1 (voir figure (**??**)), se déplace sans frottement sur un plan horizontal.

1. Écrire l'expression de l'énergie cinétique de la masse m.

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

2. Écrire l'expression de l'énergie potentielle du système.

$$U = \frac{1}{2}k\,x^2$$

3. En déduire le Lagrangien du système.

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}k\,x^2$$

4. Écrire l'équation du mouvement de la masse en fonction de sa pulsation propre ω_0 et le facteur d'amortissement $\gamma = \dfrac{\alpha_1}{2\,m}$.

$$m\ddot{x} + k_1\,x + \alpha_1\dot{x} = 0$$

5. La pulsation propre ω_0 du système est égale à :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_1}{m}} = 1\,\text{red.s}^{-1}$$

6. la condition pour que le mouvement de la masse soit critique est :

$$\gamma = \omega_0 \Rightarrow \frac{\alpha_1}{2\,m} = \sqrt{\frac{k_1}{m}}$$

ou encore

$$\alpha_1 = \sqrt{4\,k_1\,m} = \sqrt{4 \times 20 \times 20} = 40\,\text{kg.s}^{-1}$$

7. L'expression de l'équation horaire du mouvement est donnée par :

$$x(t) = (B\,t + C)e^{-\gamma\,t}$$

8. La masse revient rapidement à sa position d'équilibre sans oscillation.

Partie II :

1. L'équation du mouvement de la masse est donnée par :

$$m\ddot{x} + k_1\,x + (\alpha_1 + \alpha_2)\dot{x} = \omega Y \alpha_2 \cos\omega t$$

ou encore

$$\ddot{x} + \omega_0^2\,x + 2\,(\gamma_1 + \gamma_2)\dot{x} = 2\omega Y \gamma_2 \cos(\omega t)$$

2. L'équation différentielle sans second membre s'écrit :

$$\ddot{x} + \omega_0^2\,x + 2\,(\gamma_1 + \gamma_2)\dot{x} = 0$$

Pour que la solution donne un mouvement critique, il faut que

$$\gamma_1 + \gamma_2 = \omega_0$$

ou encore

$$\gamma_2 = \omega_0 - \gamma_1 = \sqrt{\frac{20}{20}} - \frac{20}{2\times 20} = 0.5$$

ce qui donne

$$\alpha_2 = 2\times 20\times 0.5 = 20\,\mathrm{kg.s^{-1}}$$

3. On se propose une solution de l'équation différentielle dans le régime permanent sous la forme :

$$x_p(t) = A\cos(\omega t - \varphi)$$

A est l'amplitude de mouvement de la masse m dans le régime permanent
ω est la pulsation de mouvement de la masse qui est la même que la pulsation extérieure
φ est un déphasage entre le mouvement de la masse et le point Q du déplacement extérieur.

4. En déduire les expression de A et φ : On se propose une solution en notation complexe :

$$x(t) = A\,e^{j(\omega t - \varphi)}$$

En injectant cette solution dans l'équation différentielle, on obtient

$$(\omega_0^2 - \omega^2 + 2\,j\,\omega(\gamma_1+\gamma_2))A\,e^{j(\omega t-\varphi)} = 2\omega Y\gamma_2 e^{j(\omega t)}$$

Par identification, on trouve

$$A(\omega) = \frac{2\omega Y\gamma_2}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + 4\,\omega^2(\gamma_1+\gamma_2)^2)}}$$

ou encore

$$A(\omega) = \frac{\omega Y}{\sqrt{(1-\omega^2)^2 + 4\,\omega^2}}$$

et

$$\varphi = \arctan\frac{2\,\omega(\gamma_1+\gamma_2)}{\omega_0^2-\omega^2}$$

ou encore

$$\varphi = \arctan\frac{\omega}{1-\omega^2}$$

5. Pour les valeurs $Y = 0.1\,\mathrm{m}$ et $\omega = 1\,\mathrm{rad.s^{-1}}$, on a :

$$A(\omega) = \frac{0.1}{2} = 0.05\,\mathrm{m}$$

et

$$\varphi = \arctan\frac{1}{0} = \frac{\pi}{2}$$

ce qui donne

$$x_p(t) = 0.05\,\cos(t - \frac{\pi}{2}) = 0.05\,\sin(t)$$

6. la solution générale s'écrit comme :

$$x(t) = (B\,t + C)e^{-t} + 0.05\sin t$$

avec

$$x(0) = C = 0$$

et

$$\dot{x}(0) = B + 0.05 = 0 \Rightarrow B = -0.05\,\mathrm{m}$$

On trouve finalement :

$$x(t) = -0.05\,t\,e^{-t} + 0.05\sin t$$

7. On doit résoudre l'équation algébrique :

$$0.05\,t\,e^{-t} = \frac{0.05}{10}$$

ou encore

$$t\,e^{-t} = 10^{-1}$$

En introduisant le logarithme népérien de part et d'autre, on trouve

$$\ln t - t = -\ln 10$$

ou encore

$$t - \ln t = 2.30$$

8. La force appliquée par le système sur le mur est donnée par :

$$\alpha_1\,\dot{x}(t) + k_1\,x(t)$$

ou encore

$$20 \times 0.05 \times \cos t + 20 \times 0.05\sin t$$

ce qui donne

$$\cos t + \sin t$$

mesurée en newton.

9. L'énergie dissipée par frottement est donnée par

$$W_d = \int_0^T (\alpha_1 + \alpha_2)\,\dot{x}^2\,dt$$

où

$$x(t) = 0.05\sin t \Rightarrow \dot{x} = 0.05\cos t$$

et

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 40\,\text{kg.s}^{-1}$$

ce qui donne

$$W_d = 40 \times 25 \times 10^{-4} \int_0^T \cos^2 t\, dt = 0.05\,\text{Joule}$$

D'autre part, l'énergie fournie au systèmes est donnée par

$$W_f = \int_0^T \alpha_2\, \dot{y}\, \dot{x}\, dt$$

où

$$x(t) = 0.05 \sin t \Rightarrow \dot{x} = 0.05 \cos t,$$

$$y(t) = 0.1 \sin t \Rightarrow \dot{x} = 0.1 \cos t$$

et

$$\alpha_2 = 20\,\text{kg.s}^{-1}$$

ce qui donne

$$W_f = 20 \times 5 \times 10^{-3} \int_0^T \cos^2 t\, dt = 0.05\,\text{Joule}$$

Les deux énergies sont égales ; l'énergie fournie pendant une période compense exactement l'énergie dissipée par frottement pendant la même période T.