MECANIQUE RATIONNELLE 1 :
CORRIGE DE L'EXAMEN FINAL

Exercice 01 : (noté sur 06pts)

1. $M_0(\vec{F}) = OB.F = 2{,}6.500 = 1300\ N.m$ 0,5

$M_0(-\vec{F}) = OA.F = -3{,}6.500 = -1800\ N.m$ 0,5

$M_0(\vec{F},-\vec{F}) = M_0(\vec{F}) + M_0(-\vec{F}) = -500N.m$ 0,5

2. $M_A(\vec{F},-\vec{F}) = M_A(\vec{F}) + M_A(-\vec{F}) = -AB.F + 0 = -500N.m$ 1,0

$M_B(\vec{F},-\vec{F}) = M_B(\vec{F}) + M_B(-\vec{F}) = 0 - BA.F = -500N.m$ 1,0

$M_C(\vec{F},-\vec{F}) = M_C(\vec{F}) + M_C(-\vec{F}) = CB.F - CA.F = -0{,}5.500 - 0{,}5.500 = -500N.m$ 1,0

3. A l'équilibre, on a :

$$M_0(\vec{F}) + M_0(-\vec{F}) + M_0(\vec{T}) + M_0(-\vec{T}) = 0 \Leftrightarrow -500 + \left(\frac{1{,}25}{2}\right)T + \left(\frac{1{,}25}{2}\right)T = 0$$ 1,0

$$\Rightarrow 500 = 1{,}25.T \Rightarrow T = \frac{500}{1{,}25} = 400N.m$$ 0,5

Exercice 02: (noté sur 08pts)

1. La vitesse et l'accélération du centre de masse G par dérivation

a. La vitesse :

$$\vec{V}(G)/_0 = \left.\frac{d\overrightarrow{AG}}{dt}\right|_{(0)}$$

Le vecteur taux de rotation du repère (1) par rapport au repère (0) est :

$$\vec{\omega}_{1/0} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{vmatrix}_{(1),(0)}$$

Si on prendra $(R_0) \equiv (Axyz) = (0)$ comme repère de projection

$$\overrightarrow{AG} = \frac{\overrightarrow{AC}}{2} \quad et \quad \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{AB} = \left| \begin{matrix} L\, cos\theta \\ L\, sin\theta \\ 0 \end{matrix} \right|_{(0)} \qquad et \quad \overrightarrow{BC} = \left| \begin{matrix} \frac{3L}{4}\cos(\theta+\alpha) \\ \frac{3L}{4} sin(\theta+\alpha) \\ 0 \end{matrix} \right|_{(0)}$$

$$\overrightarrow{AG} = \left| \begin{matrix} \frac{L}{2} cos\theta + \frac{3L}{8}\cos(\theta+\alpha) \\ \frac{L}{2} sins\theta + \frac{3L}{8} sin(\theta+\alpha) \\ 0 \end{matrix} \right|_{(0)}$$

0,5

$$\Rightarrow \quad \vec{V}(G)/_0 = \left.\frac{d\overrightarrow{AG}}{dt}\right|_{(0)} = \left| \begin{matrix} -\frac{L}{2}\dot{\theta} sin\theta - \frac{3L}{8}\dot{\theta}\sin(\theta+\alpha) \\ \frac{L}{2}\dot{\theta} cos\theta + \frac{3L}{8}\dot{\theta} cos(\theta+\alpha) \\ 0 \end{matrix} \right|_{(0)}$$

1,0

b. L'accélération :

1,0

$$\vec{\Gamma}(G)/_0 = \left.\frac{d\vec{V}(G)/_0}{dt}\right|_{(0)} = \left| \begin{matrix} -\frac{L}{2}\ddot{\theta} sin\theta - \frac{L}{2}\dot{\theta}^2 cos\theta - \frac{3L}{8}\ddot{\theta}\sin(\theta+\alpha) - \frac{3L}{8}\dot{\theta}^2 cos\theta(\theta+\alpha) \\ \frac{L}{2}\ddot{\theta} cos\theta - \frac{L}{2}\dot{\theta}^2 sin\theta + \frac{3L}{8}\ddot{\theta} cos(\theta+\alpha) - \frac{3L}{8}\dot{\theta}^2 sin(\theta+\alpha) \\ 0 \end{matrix} \right|_{(0)}$$

2. La vitesse et l'accélération du centre de masse G par la méthode de distribution

a. La vitesse

$$\vec{V}(G)/_0 = \vec{V}(A)/_0 + \vec{\omega}_{1/0} \wedge \overrightarrow{AG}$$

0,5

$$\vec{V}(G)/_0 = \left| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{matrix} \right|_{(0)} \wedge \left| \begin{matrix} \frac{L}{2} cos\theta + \frac{3L}{8}\cos(\theta+\alpha) \\ \frac{L}{2} sins\theta + \frac{3L}{8} sin(\theta+\alpha) \\ 0 \end{matrix} \right|_{(0)} = \left| \begin{matrix} -\frac{L}{2}\dot{\theta} sins\theta - \frac{3L}{8}\dot{\theta} sin(\theta+\alpha) \\ \frac{L}{2}\dot{\theta} cos\theta + \frac{3L}{8}\dot{\theta}\cos(\theta+\alpha) \\ 0 \end{matrix} \right|_{(0)}$$

1,0

b. L'accélération

0,5

$$\vec{\Gamma}(G)/_0 = \left.\frac{d\vec{V}(A)/_0}{dt}\right|_{(0)} + \frac{d\vec{\omega}_{1/0}}{dt} \wedge \overrightarrow{AG} + \vec{\omega}_{1/0} \wedge \left.\frac{d\overrightarrow{AG}}{dt}\right|_{(0)}$$

$$\vec{\Gamma}(G)/_0 = \left| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta} \end{matrix} \right|_{(0)} \wedge \left| \begin{matrix} \frac{L}{2} cos\theta + \frac{3L}{8}\cos(\theta+\alpha) \\ \frac{L}{2} sins\theta + \frac{3L}{8} sin(\theta+\alpha) \\ 0 \end{matrix} \right|_{(0)} + \left| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{matrix} \right|_{(0)} \wedge \left| \begin{matrix} -\frac{L}{2}\dot{\theta} sins\theta - \frac{3L}{8}\dot{\theta} sin(\theta+\alpha) \\ \frac{L}{2}\dot{\theta} cos\theta + \frac{3L}{8}\dot{\theta}\cos(\theta+\alpha) \\ 0 \end{matrix} \right|_{(0)}$$

$$\vec{\Gamma}(G)/_0 = \begin{vmatrix} -\frac{L}{2}\ddot{\theta}sins\theta - \frac{3L}{8}\ddot{\theta}sin(\theta+\alpha) \\ \frac{L}{2}\ddot{\theta}cos\theta + \frac{3L}{8}\ddot{\theta}\cos(\theta+\alpha) \\ 0 \end{vmatrix}_{(0)} + \begin{vmatrix} -\frac{L}{2}\dot{\theta}^2cos\theta - \frac{3L}{8}\dot{\theta}^2\cos(\theta+\alpha) \\ -\frac{L}{2}\dot{\theta}^2sins\theta - \frac{3L}{8}\dot{\theta}^2sin(\theta+\alpha) \\ 0 \end{vmatrix}_{(0)}$$

$$\vec{\Gamma}(G)/_0 = \begin{vmatrix} -\frac{L}{2}\dot{\theta}^2cos\theta - \frac{L}{2}\ddot{\theta}sins\theta - \frac{3L}{8}\dot{\theta}^2\cos(\theta+\alpha) - \frac{3L}{8}\ddot{\theta}sin(\theta+\alpha) \\ \frac{L}{2}\ddot{\theta}cos\theta - \frac{L}{2}\dot{\theta}^2sins\theta - \frac{3L}{8}\dot{\theta}^2sin(\theta+\alpha) + \frac{3L}{8}\ddot{\theta}\cos(\theta+\alpha) \\ 0 \end{vmatrix}_{(0)}$$

1,0

Si on prendra $(R_1) \equiv (Ax_1y_1z_1) = (1)$ comme repère de projection :

1. La vitesse et l'accélération du point G par dérivation

$$\overrightarrow{AG} = \begin{vmatrix} \frac{L}{2} + \frac{3L}{8}\cos\alpha \\ \frac{3L}{8}sin\alpha \\ 0 \end{vmatrix}_{(1)}$$

0,5

$$\vec{V}(G)/_0 = \left.\frac{d\overrightarrow{AG}}{dt}\right|_{(0)} = \left.\frac{d\overrightarrow{AG}}{dt}\right|_{(1)} + \vec{\omega}_{1/0} \wedge \overrightarrow{AG} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}_{(1)} + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{vmatrix}_{(1)} \wedge \begin{vmatrix} \frac{L}{2} + \frac{3L}{8}\cos\alpha \\ \frac{3L}{8}sin\alpha \\ 0 \end{vmatrix}_{(1)} = \begin{vmatrix} -\frac{3L}{8}\dot{\theta}sin\alpha \\ \frac{3L}{8}\dot{\theta}cos\alpha + \frac{L}{2}\dot{\theta} \\ 0 \end{vmatrix}_{(1)}$$

1,0

$$\vec{\Gamma}(G)/_0 = \left.\frac{d\vec{V}(G)/_0}{dt}\right|_{(0)} = \left.\frac{d\vec{V}(G)/_0}{dt}\right|_{(1)} + \vec{\omega}_{1/0} \wedge \vec{V}(G)/_0$$

$$= \begin{vmatrix} -\frac{3L}{8}\ddot{\theta}sin\alpha \\ \frac{3L}{8}\ddot{\theta}cos\alpha + \frac{L}{2}\ddot{\theta} \\ 0 \end{vmatrix}_{(1)} + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{vmatrix}_{(1)} \wedge \begin{vmatrix} -\frac{3L}{8}\dot{\theta}sin\alpha \\ \frac{3L}{8}\dot{\theta}cos\alpha + \frac{L}{2}\dot{\theta} \\ 0 \end{vmatrix}_{(1)}$$

$$= \begin{vmatrix} -\frac{3L}{8}\ddot{\theta}sin\alpha - \frac{3L}{8}\dot{\theta}^2cos\alpha - \frac{L}{2}\dot{\theta}^2 \\ \frac{3L}{8}\ddot{\theta}cos\alpha + \frac{L}{2}\ddot{\theta} - \frac{3L}{8}\dot{\theta}^2sin\alpha \\ 0 \end{vmatrix}_{(1)}$$

1,0

2. La vitesse et l'accélération du centre de masse G par la méthode de distribution

$$\vec{V}(G)/_0 = \vec{V}(A)/_0 + \vec{\omega}_{1/0} \wedge \overrightarrow{AG} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}_{(1)} + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{vmatrix}_{(1)} \wedge \begin{vmatrix} \frac{L}{2} + \frac{3L}{8}\cos\alpha \\ \frac{3L}{8}sin\alpha \\ 0 \end{vmatrix}_{(1)} = \begin{vmatrix} -\frac{3L}{8}\dot{\theta}sin\alpha \\ \frac{3L}{8}\dot{\theta}cos\alpha + \frac{L}{2}\dot{\theta} \\ 0 \end{vmatrix}_{(1)}$$

1,5

$$\vec{\Gamma}(G)/_0 = \left.\frac{d\vec{V}(A)/_0}{dt}\right|_{(0)} + \frac{d\vec{\omega}_{1/0}}{dt}\wedge\overrightarrow{AG} + \vec{\omega}_{1/0}\wedge\left.\frac{d\overrightarrow{AG}}{dt}\right|_{(0)} = \left.\frac{d\vec{V}(A)/_0}{dt}\right|_{(1)} + \vec{\omega}_{1/0}\wedge\vec{V}(A)/_0 + \frac{d\vec{\omega}_{1/0}}{dt}\wedge\overrightarrow{AG} + \vec{\omega}_{1/0}\wedge\left(\left.\frac{d\overrightarrow{AG}}{dt}\right|_{(1)} + \vec{\omega}_{1/0}\wedge\overrightarrow{AG}\right)$$

$$= \left|\begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix}\right|_{(1)} + \left|\begin{matrix}0\\0\\\dot\theta\end{matrix}\right|_{(1)}\wedge\left|\begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix}\right|_{(1)} + \left|\begin{matrix}0\\0\\\ddot\theta\end{matrix}\right|_{(1)}\wedge\left|\begin{matrix}\frac{L}{2}+\frac{3L}{8}\cos\alpha\\\frac{3L}{8}\sin\alpha\\0\end{matrix}\right|_{(1)} + \left|\begin{matrix}0\\0\\\dot\theta\end{matrix}\right|_{(1)}\wedge\left(\left|\begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix}\right|_{(1)} + \left|\begin{matrix}0\\0\\\dot\theta\end{matrix}\right|_{(1)}\wedge\left|\begin{matrix}\frac{L}{2}+\frac{3L}{8}\cos\alpha\\\frac{3L}{8}\sin\alpha\\0\end{matrix}\right|_{(1)}\right) =$$

$$= \left|\begin{matrix}-\frac{3L}{8}\ddot\theta\sin\alpha\\\frac{L}{2}\ddot\theta+\frac{3L}{8}\ddot\theta\cos\alpha\\0\end{matrix}\right|_{(1)} + \left|\begin{matrix}-\frac{3L}{8}\dot\theta^2\cos\alpha-\frac{L}{2}\dot\theta^2\\-\frac{3L}{8}\dot\theta^2\sin\alpha\\0\end{matrix}\right|_{(1)} == \left|\begin{matrix}-\frac{3L}{8}\ddot\theta\sin\alpha-\frac{3L}{8}\dot\theta^2\cos\alpha-\frac{L}{2}\dot\theta^2\\\frac{3L}{8}\ddot\theta\cos\alpha+\frac{L}{2}\ddot\theta\ -\frac{3L}{8}\dot\theta^2\sin\alpha\\0\end{matrix}\right|_{(1)}$$

1,5

3. La $\vec{V}(D)/_0$ par application de la loi de composition des vitesses

On a : $\vec{V}(D)/_0 = \vec{V}(D)/_1 + \vec{V}_e$ **0,5**

$$\vec{V}(D)/_1 = \left.\frac{d\overrightarrow{AD}}{dt}\right|_{(1)}$$

Et

$$\overrightarrow{AD} = \left|\begin{matrix}\frac{3L}{4}\cos\alpha\\\frac{3L}{4}\sin\alpha\\0\end{matrix}\right|_{(1)} \Rightarrow \vec{V}(D)/_1 = \left|\begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix}\right|_{(1)}$$

0,5

Soit un point D' lié à $R_1 \cong (1)$ et qui coïncide avec D à l'instant t :

$$\vec{V}_e = \left.\frac{d\overrightarrow{AD'}}{dt}\right|_{(0)} = \left.\frac{d\overrightarrow{AD'}}{dt}\right|_{(1)} + \vec{\omega}_{1/0}\wedge\overrightarrow{AD'} = \vec{\omega}_{1/0}\wedge\overrightarrow{AD'}$$

0,5

à l'instant t : $D \equiv D'$ $\Rightarrow$ $\vec{V}_e = \vec{\omega}_{1/0}\wedge\overrightarrow{AD} = \left|\begin{matrix}0\\0\\\dot\theta\end{matrix}\right|_{(1)}\wedge\left|\begin{matrix}\frac{3L}{4}\cos\alpha\\\frac{3L}{4}\sin\alpha\\0\end{matrix}\right|_{(1)} = \left|\begin{matrix}-\frac{3L}{4}\dot\theta\sin\alpha\\\frac{3L}{4}\dot\theta\cos\alpha\\0\end{matrix}\right|_{(1)}$

0,5

D'où : $\vec{V}(D)/_0 = \left|\begin{matrix}-\frac{3L}{4}\dot\theta\sin\alpha\\\frac{3L}{4}\dot\theta\cos\alpha\\0\end{matrix}\right|_{(1)}$ **0,5**

<u>Exercice 03:</u> (noté sur 06pts)

$\vec{F}(12000\ daN)$

$\vec{P}(30000\ daN)$

L'équation d'équilibre :

0,5

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{F} + \vec{A} + \vec{P} + \vec{R} + \vec{S} = \vec{0} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ (\mathbf{1})$$

0,5

$$\sum \vec{M}_F = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{M}_F(\vec{F}) + \vec{M}_F(\vec{A}) + \vec{M}_F(\vec{P}) + \vec{M}_F(\vec{R}) + \vec{M}_F(\vec{S}) = \vec{0} \ldots (\mathbf{2})$$

La projection de (1) sur x donne:

0,5

$$F + 0 - Psin15 - R + 0 = 0 \quad \text{ou} \quad F + 0 - Pcos75 - R + 0 = 0 \ldots\ldots (\mathbf{3})$$

La projection de (1) sur y donne:

0,5

$$0 + A - Pcos15 + 0 + S = 0 \quad \text{ou} \quad 0 + A - Psin75 + 0 + S = 0 \ldots\ldots (\mathbf{4})$$

1,0

$$(\mathbf{2}) \Rightarrow 0 + 2A - 4{,}8Pcos15 + 5{,}55S = 0 \Leftrightarrow 2A - 4{,}8sin75 + 5{,}55S = 0 \ldots\ldots\ldots (\mathbf{5})$$

De l'équation (3) on a :

$$R = F - Psin15 = 12000 - 30000.0{,}2588 = \mathbf{4235{,}42}\boldsymbol{daN}$$

1,0

L'équation (4) donne :

$$S = Pcos15 - A \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

Et en remplaçant S dans l'équation (5) on obtient :

$$2A - 4{,}8Pcos15 + 5{,}55(Pcos15 - A) = 0 \Leftrightarrow -3{,}55A = 5{,}55Pcos15 - 4{,}8Pcos15$$

D'où :

$$A = \frac{0{,}75P}{3{,}55}cos15 = \frac{0{,}75.30000}{3{,}55}.0{,}96 = \mathbf{6084{,}50}\boldsymbol{daN}$$

1,0

L'équation (6) donne :

$$S = Pcos15 - A = 30000.0{,}96 - 6084{,}50 = \mathbf{22715{,}5}\boldsymbol{daN}$$

1,0