ECOLE SUPERIEURE EN SCIENCES APPLIQUEES DE TLEMCEN
ANALYSE NUMERIQUE I
EXAMEN FINAL **DUREE : 01H30MN** **M. BELMEKKI**

Exercice 1. *Soit $a > 1$. Pour calculer la racine carrée de a, on utilise la procédure itérative :*

$$x_{k+1} = \phi(x_k), \qquad k \geq 0$$

où

$$\phi(x) = \frac{1}{2} + x - \frac{x^2}{2a}$$

1. (**02pts**)
Si $\lim_{k \mapsto \infty} x_k = \alpha$ alors α doit vérifier l'équation suivante :

$$\alpha = \alpha + \frac{1}{2} - \frac{\alpha^2}{2a}$$

ce qui conduit à

$$\alpha = \pm\sqrt{a}.$$

2. (**02pts**)
La procédure ne peut converger vers $-\sqrt{a}$. En effet :

$$\phi'(x) = 1 - \frac{x}{a}$$

donc

$$\phi'(-\sqrt{a}) = 1 - \frac{-\sqrt{a}}{a} = 1 + \frac{\sqrt{a}}{a} > 1$$

3. (**02pts**)
ϕ est contractante sur $[1, b]$ si et seulement si

$$\max_{x \in [1,b]} |\phi'(x)| < 1$$

On doit avoir :

$$-1 < 1 - \frac{x}{a} < 1, \ \forall x \in [1, b].$$

d'un côté

$$1 - \frac{x}{a} < 1$$

est toujours réalisée car $\frac{x}{a} > 0$.
d'un autre côté

$$1 - \frac{x}{a} > -1 \Rightarrow \frac{x}{a} < 2 \Rightarrow x < 2a$$

Finalement b doit satisfaire la condition :

$$b < 2a$$

4. (**02pts**)
Etudions la convergence sur l'intervalle $[1, a]$.
On a
$$b = a < 2a$$
car $a > 1$. *Donc d'après la question* 2., *la fonction* ϕ *est contractante.*
Reste à montrer que l'intevalle $[1, a]$ *est stable par la fonction* ϕ.
On doit montrer que $\phi(x) \in [1, a]$ *pour tout* $x \in [1, a]$.
pour cela étudions la fonction
$$\phi(x) = x + \frac{1}{2} - \frac{x^2}{2a}$$
sa dérivée est donnée par
$$\phi'(x) = 1 - \frac{x}{a}$$
On a
$$\phi'(a) = 0,$$
$$\phi'(x) < 0 \quad \textit{pour} \quad x < a$$
et
$$\phi'(x) > 0 \quad \textit{pour} \quad x > a$$
donc ϕ *atteint son maximum au point* $x = a$ *et sa valeur est :*
$$\phi(a) = \frac{a+1}{2}$$
De plus, pour tout $a > 1$, *on a :*
$$\phi(1) = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2a} > 1$$
et
$$\phi(a) = \frac{a+1}{2} < a$$
Finalement, la procédure est convergente et sa limite est $\sqrt{a}$

5. (**02pts**)
Pour estimer $\sqrt{2}$, *on applique la méthode précédente pour* $a = 2$.
La fonction ϕ *devient :*
$$\phi(x) = x + \frac{1}{2} - \frac{x^2}{4}$$
La procédure s'écrit :
$$x_{n+1} = x_n + 0.5 - 0.25x_n^2, \quad n \geq 0$$
On prend $x_0 = 1$ *et on obtient alors :*
$$\begin{aligned} x_1 &= 1.25 \\ x_2 &= 1.359375 \\ x_3 &= 1.397399 \\ x_4 &= 1.409218 \\ x_5 &= 1.412744 \\ x_6 &= 1.413782 \\ x_7 &= 1.414087 \end{aligned}$$

on arrête les itérations car

$$|x_7 - x_6| = 0.3\ 10^{-3} < 10^{-3}$$

d'où

$$\sqrt{2} = 1.414087 \quad \text{à} \quad 10^{-3} \text{près.}$$

Exercice 2. *(***10pts***)*

1. *En utilisant le rayon spectral, étudier la convergence des méthodes de Jacobi et de Gauss-Seïdel pour la résolution du système $Ax = b$*

   a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Méthode de Jacobi : (02pts)

$$A = M - N$$

où

$$M = D = I$$

et

$$N = E + F = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice de Jacobi est donnée par

$$J = M^{-1}N = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

et on a

$$Det(\lambda I - J) = 0 \Leftrightarrow \lambda^3 = 0$$

donc

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

d'où

$$\rho(J) = 0 < 1$$

par suite la procédure de Jacobi est convergente.

Méthode de Gauss-Seïdel : (02pts)

$$A = M - N$$

où

$$M = D - E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$N = F = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice de Gauss-Seïdel est donnée par

$$G = M^{-1}N = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

et on a

$$Det(\lambda I - G) = 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda - 2)(\lambda - 1) = 0$$

donc

$$\lambda_1 = 0,\ \ \lambda_2 = 1,\ \ \lambda_3 = 2$$

d'où

$$\rho(G) = 2 > 1$$

par suite la procédure de Gauss-Seïdel est divergente.

b)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Méthode de Jacobi : (02pts)

$$A = M - N$$

où

$$M = D = 2I$$

et

$$N = E + F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice de Jacobi est donnée par

$$J = M^{-1}N = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et on a

$$Det(\lambda I - J) = 0 \Leftrightarrow \lambda^3 + 5\lambda = 0$$

donc

$$\lambda_1 = 0,\ \ \lambda_2 = -i\sqrt{5},\ \ \lambda_3 = i\sqrt{5}$$

d'où

$$\rho(J) = \sqrt{5} > 1$$

par suite la procédure de Jacobi est divergente.

Méthode de Gauss-Seïdel : (02pts)

$$A = M - N$$

où

$$M = D - E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

et

$$N = F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice de Gauss-Seïdel est donnée par

$$G = M^{-1}N = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & -0.5 \\ 0 & -0.5 & -0.5 \\ 0 & 0 & -0.5 \end{pmatrix}$$

et on a

$$Det(\lambda I - G) = 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda + 0.5)^2 = 0$$

donc

$$\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = \lambda_3 = -0.5$$

d'où

$$\rho(G) = 0.5 < 1$$

par suite la procédure de Gauss-Seïdel est convergente.

2. *On considère le système $Ax = b$, où :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On décompose A de la manière suivante : $A = D - E - F$, où

$$D = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ -E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ -F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) (**01pts**)

La matrice de relaxation est donnée par :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\omega &= \left(\frac{1}{\omega}D - E\right)^{-1}\left(\frac{1-\omega}{\omega}D + F\right) \\ &= \begin{pmatrix} 1/\omega & 0 & 0 \\ 1 & 1/\omega & 0 \\ 0 & 0 & 1/\omega \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} (1-\omega)/\omega & 0 & 0 \\ 0 & (1-\omega)/\omega & -1 \\ 0 & 0 & (1-\omega)/\omega \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1-\omega & 0 & 0 \\ -\omega(1-\omega) & 1-\omega & -\omega \\ 0 & 0 & 1-\omega \end{pmatrix} \end{aligned}$$

b) (**01pts**)

Les valeurs propres de $\mathcal{L}_\omega$ sont

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1 - \omega$$

donc

$$\rho(\mathcal{L}_\omega) = |1 - \omega|$$

on a alors les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} \textit{La procédure de relaxation est convergente} &\Leftrightarrow \rho(\mathcal{L}_\omega) < 1 \\ &\Leftrightarrow |1-\omega| < 1 \\ &\Leftrightarrow 0 < \omega < 2 \end{aligned}$$