

ECOLE SUPERIEURE EN SCIENCES APPLIQUEES DE TLEMCEN
ANALYSE NUMERIQUE I
EXAMEN FINAL DUREE : 01H30MN M. BELMEKKI

Exercice 1. (10pts) Soit $a > 1$. Pour calculer la racine carrée de a , on utilise la procédure itérative :

$$x_{k+1} = \phi(x_k), \quad k \geq 0$$

où

$$\phi(x) = \frac{1}{2} + x - \frac{x^2}{2a}$$

1. Montrer que si

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \alpha$$

alors

$$\alpha = \pm\sqrt{a}$$

2. En calculant ϕ' , montrer que la procédure ne peut converger vers $-\sqrt{a}$.

3. Trouver une condition sur b pour que la fonction $\phi(x)$ soit une contraction sur l'intervalle $[1, b]$.

4. On prend $b = a$, étudier la convergence de la procédure sur $[1, a]$.

5. Appliquer cette méthode pour estimer $\sqrt{2}$ à 10^{-3} près.

Exercice 2. (10pts)

1. En utilisant le rayon spectral, étudier la convergence des méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel pour la résolution du système $Ax = b$ pour chacun des cas suivants :

a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

b)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

2. On considère le système $Ax = b$, où :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice de relaxation est donnée par :

$$\mathcal{L}_\omega = \left(\frac{1}{\omega}D - E \right)^{-1} \left(\frac{1-\omega}{\omega}D + F \right)$$

où D , $-E$ et $-F$ sont respectivement les matrices Diagonale, Triangulaire inférieure et Triangulaire supérieure avec $A = D - E - F$.

a) Ecrire la matrice \mathcal{L}_ω de la méthode de relaxation.

b) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur le paramètre ω pour la convergence de la méthode de relaxation.