Université Mustapha Stambouli-Mascara-
Faculté des sciences exactes
Département de Physique
2eme année Master Physique des matériaux

Année universitaire : 2018-2019
Date : 09-01-2019
Durée : 1H45 min

Epreuve de l'unité : Physique des plasmas

Questions de cours (06pts) :

1- Rappeler les équations de base pour l'étude des plasmas.
2- Trouver l'équation de propagation du champ électromagnétique EM dans un plasma.
3- Citer les trois principales techniques de décharge permettant de créer un plasma en laboratoire.

Exercice 1 (08 pts):

On considère un ion en **r = 0** et soit $\mathbf{n_0}$ la densité ionique moyenne dans le plasma. Si le plasma est suffisamment chaud, la densité électronique est égal à :

$$\boldsymbol{n_e\,(r) = \,Zn_0\,\,(1 + \frac{e\Phi(r)}{k_B\,T})}$$

Où $\boldsymbol{\Phi(r)}$est le potentiel en ***r***, ***T*** la température du plasma et $\boldsymbol{k_B}$ la constante de Boltzmann.

1- Écrire l'équation différentielle vérifiée par le potentiel $\boldsymbol{\Phi}$ sous la forme :

$$\boldsymbol{a(r)\;\Phi'' + b(r)\Phi' + c(r)\Phi = 0}$$

2- Trouver un changement de variable $\boldsymbol{\psi = f(\Phi)}$ tel que l'équation différentielle du second ordre vérifiée par $\boldsymbol{\psi}$ soit à coefficients constants.
3- Trouver la forme du potentiel $\boldsymbol{\Phi}$. Les conditions aux limites sont que le potentiel $\boldsymbol{\Phi}$ doit tendre vers **0** lorsque **r** tend vers l'infini et il doit être équivalent au potentiel Coulombien lorsque **r** tend vers **0**. En déduire la distance caractéristique d'écrantage de la charge centrale dans ce cas.

Donnée :
On donne le Laplacien en coordonnées sphériques d'une fonction *f(r)* :

$$\Delta \boldsymbol{f(r) = \frac{1}{r}\,\frac{\partial^2(rf(r))}{\partial r^2}}$$

Exercice 2 (06pts):

Un demi-plasma occupe initialement le demi-espace gauche $(x \leq 0)$. Lorsqu'on laisse les électrons se mouvoir, ils ont tendance à occuper l'espace situé à droite $(x > 0)$ de la frontière initiale (interface plasma-vide) du fait de l'agitation thermique. Si on suppose qu'une couche électronique d'épaisseur x se déplace d'une distance x, il se forme un champ E au bord du plasma.

1- Que vaut le champ électrique?
2- Que vaut l'énergie potentielle à la distance x ?
3- Pour quelle valeur de x cette énergie est égale à l'énergie thermique ?
4- Que représente cette distance x ?

Bon courage

Université Mustapha Stambouli-Mascara-
Faculté des sciences exactes
2^{eme} année Master Physique des matériaux

Année universitaire : 2018-2019
Département de Physique

Corrigé de l'examen: Physique des plasmas

Questions de cours (06pts) :

Réponse 1 : 1.5pts

-L'équation de mouvement qui traduit la partie mécanique du couplage champs-plasmas :

$$m\frac{\overrightarrow{dv}}{dt} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \qquad \textbf{(0.25)}$$

-Les équations de Maxwell traduisant la partie électromagnétique du couplage champs-plasmas dont les expressions sont obtenues a partir de :

L'équation fondamentale de conservation de charge : $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}.\vec{J} = 0$

avec $(\vec{J} = -n\, e\, \vec{v})$ **(0.25)**

-*Equation de Poisson* : $\vec{\nabla}.\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = \frac{e(n_i - n_e)}{\varepsilon_0}$ **(0.25)**

$\vec{\nabla}.\vec{B} = 0$ **(0.25)**

-*Equation de Maxwell-Faraday* : $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ **(0.25)**

-*Equation de Maxwell-Ampère* : $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0\, \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ **(0.25)**

Réponse 2 : 3 pts

-On suppose que le plasma reste neutre $(n_i = n_e)$ donc : $\vec{\nabla}.\vec{E} = 0$ **(0. 5)**

- En utilisant la relation suivante : $\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}\, \vec{E}\right) = \overrightarrow{grad}\,(div\, E) - \Delta\vec{E}$ **(0.5)**

$\overrightarrow{grad}\,(div\, E) = 0$ **(0.5)**

$\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}\, \vec{E}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}(\mu_0 \vec{J} + \mu_0\, \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t})$ **(0.5)**

Donc :

$\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}\, \vec{E}\right) = -(\mu_0 \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} + \mu_0\, \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}) = -\mu_0 \frac{n e^2}{m} \vec{E} - \mu_0\, \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$ **(0.5)**

-On obtient finalement l'équation de propagation du champ électromagnétique EM dans un plasma

$$\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}\,\vec{E}\right) = -\Delta\vec{E}$$

$$\Delta\vec{E} = \mu_0 \frac{ne^2}{m}\vec{E} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} \qquad \text{avec :} \quad \mu_0\,\varepsilon_0\,c^2 = 1 \qquad \textbf{(0.5)}$$

Réponse 3 : **1.5pts**

1- La décharge en courant continu ou alternatif de basse fréquence **(0.5)**
2- La décharge de haute fréquence(HF) **(0.5)**
3- La décharge par rayonnement laser **(0.5)**

Exercice 1 (08pts) :

1- Equation différentielle vérifiée par le potentiel $\boldsymbol{\Phi}$

- La densité de charge ρ

A partir de la relation de la densité électronique on peut déduire la densité de charge ρ

$$n_e\,(r) = Zn_0\;\left(1 + \frac{e\Phi(r)}{k_B\,T}\right)$$

$$(n_e - Zn_0\,) = Zn_0\,\frac{e\Phi(r)}{k_B\,T} \qquad \textbf{Or} \qquad e \times (n_e - Zn_0\,) = e \times Z\,n_0\,\frac{e\Phi(r)}{k_B\,T}$$

Donc : $\rho = e(Zn_0 - n_e\,) \Rightarrow \boldsymbol{\rho = -e^2\,Zn_0\,\frac{\Phi(r)}{k_B\,T}}$ **(1)**

L'équation de poisson :

$$\vec{\nabla}.\vec{E} = -\vec{\nabla}^2\Phi = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \nabla^2\Phi = \Delta\Phi(r) = \frac{e^2\,Zn_0}{\varepsilon_0 \mathbf{k_B\,T}}\,\Phi(r) \qquad (1)$$

Appliquant la relation suivante :

$$\Delta f(r) = \frac{1}{r}\frac{\partial^2(rf(r))}{\partial r^2}$$

On trouve alors :

$$\Delta\Phi(r) = \frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} = \frac{1}{r}\left[2\frac{\partial\Phi}{\partial r} + r\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}\right] \qquad (1)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r}\left[2\frac{\partial\Phi}{\partial r} + r\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}\right] = \frac{e^2\,Zn_0}{\varepsilon_0 k_B\,T}\,\Phi(r)$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{r\frac{\partial^2\Phi(r)}{\partial r^2} + 2\frac{\partial\Phi(r)}{\partial r} - \frac{e^2\,Zn_0}{\varepsilon_0 k_B\,T}r\Phi(r) = 0} \qquad (1)$$

$$\boldsymbol{a(r)\,\Phi'' + b(r)\Phi' + c(r)\Phi = 0}$$

Soit : $a(r) = r, \; b(r) = 2 \;, c(r) = -\frac{e^2 Zn_0}{\varepsilon_0 k_B T} r$ **(0.75)**

2- changement de variable $\psi = f(\Phi)$

Posons : $\psi = r\Phi$ l'équation devient **:** **(0.25)**

$$r\,\Phi'' + 2\Phi' - \frac{e^2 Zn_0}{\varepsilon_0 k_B T} r\Phi = 0$$

avec : $\psi = r\Phi$; $\psi' = \Phi + r\Phi'$; $\psi'' = r\Phi'' + 2\Phi'$ **(0.5)**

Donc : $\psi'' - \frac{e^2 Zn_0}{\varepsilon_0 k_B T}\psi = 0$ avec : $\lambda_D^2 = \frac{\varepsilon_0 k_B T}{e^2 Zn_0}$ **(0.5)**

La solution de cette équation est de la forme :

$\psi(r) = A_1\, e^{\frac{+r}{\lambda_D}} + A_2\, e^{\frac{-r}{\lambda_D}}$ avec $\psi = r\Phi$ **(0.5)**

$$\Phi(r) = \frac{1}{r}\left[A_1\, e^{\frac{+r}{\lambda_D}} + A_2\, e^{\frac{-r}{\lambda_D}}\right]$$

Les conditions aux limites

$\lim_{r\to\infty} \Phi(r) = 0 \quad \Rightarrow A_1 = 0$ **(0.25)**

$\lim_{r\to 0} \Phi(r) = \frac{Ze}{4\pi\varepsilon_0 r} \quad \Rightarrow A_2 = \frac{Ze}{4\pi\varepsilon_0}$ **(0.25)**

Finalement le potentiel $\Phi(r)$ s'écrit :

$\Phi(r) = \frac{Ze}{4\pi\varepsilon_0 r} exp\left(\frac{-r}{\lambda_D}\right)$ **(0.5)**

Longueur de Debye : $\lambda_D = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 k_B T}{e^2 Zn_0}}$ **(0.5)**

Exercice 2 (06pts):

1-Le problème est unidimensionnel

Equation de Poisson :

$$\vec{\nabla}.\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \Longrightarrow \frac{dE}{dx} = -\frac{en_e}{\varepsilon_0} \Longrightarrow E = \frac{e\,n_e}{\varepsilon_0}x \qquad \textbf{(1)}$$

E est positif pour des valeurs de x négatives.

2- La force d'interaction se dérive d'un potentiel :

$$\vec{F} = -\nabla E_p = -eE = -\frac{e^2 n_e}{\varepsilon_0}x \Longrightarrow E_p = \frac{e^2 n_e}{2\varepsilon_0}x^2 \qquad \textbf{(1.5)}$$

3- on en déduit la Valeur de x:

$$E_p = \frac{1}{2}k_B T \Leftrightarrow \frac{e^2 n_e}{2\varepsilon_0}x^2 = \frac{1}{2}k_B T \quad \text{Donc :} \quad x^2 = \frac{\varepsilon_0 k_B T}{e^2 n_e} \qquad \textbf{(2)}$$

$$x = \lambda_D = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 k_B T}{e^2 n_e}} \qquad \textbf{(0.5)}$$

4- La distance x correspond à la longueur de Debye λ_D qui représente l'échelle spatiale caractérisant l'hypothèse de quasi neutralité et les phénomènes d'écrantage électrique. **(1)**