Chapitre-2:
Logique propositionnelle
-Sémantique -

1

Plan

2

Plan

3

1- Introduction

- Le rôle de la sémantique est de préciser le sens
- Pour la logique propositionnelle, le seul sens d'une formule est sa valeur de vérité (i.e la propriété d'être vraie ou fausse)
- L'ensemble des valeurs de vérité est {0,1} où
  1 représente le Vrai et 0 représente le faux
- Pour la logique propositionnelle, la sémantique des formules obéit au deux principes suivants :
  - Bivalence : une formule est soit vraie, soit fausse
  - Vérifonctionnalité : la valeur de vérité d'une formule non-atomique est déterminée par les valeurs de ses constituants

4

1- Introduction

❑ Il existe des logiques non bivalentes, par exemple on peut définir:

- 3 valeurs de vérité {0,1/2,1} → logique trivalente
- infinité de valeurs [0,1] → logique multivaluée (floue, probabiliste)

❑ Il existe des logiques qui n'obeissent pas au principe de vérifonctionnalité, par exemple: la logique modale

5

Plan

6

2- Valuation (assignation, système de valeurs)

Définition

- **Une valuation est une fonction V de l'ensemble des variables propositionnelles VAR vers l'ensemble des valeurs de vérités {0,1}**

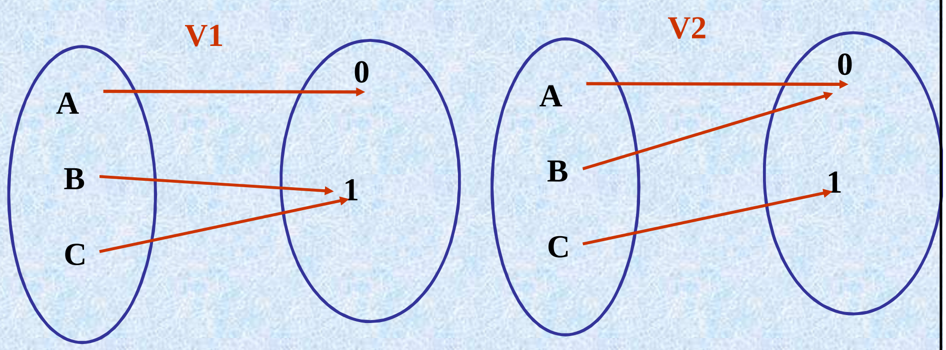
$$\boxed{V:\ Var \rightarrow \{0,1\}}$$

- **Une valuation affecte à chaque variable propositionnelle de Var une valeur de vérité**

7

2- Valuation (assignation, système de valeurs)

Exemple



V1(A)=0 V1(B)=1 V1(C)=1 **V2(A)=0 V2(B)=0 V2(C)=1**

8

2- Valuation (assignation, système de valeurs)

- Si Var contient n variables on a 2^n valuations possibles

Exemple n=3

	A	B	C
V1 →	0	0	0
V2 →	0	0	1
V3 →	0	1	0
V4 →	0	1	1
V5 →	1	0	0
V6 →	1	0	1
V7 →	1	1	0
V8 →	1	1	1

n=2

	A	B
V1 →	0	0
V2 →	0	1
V3 →	1	0
V4 →	1	1

9

Plan

1-Introduction

2- Valuation (assignation, système de valeurs)

3- Interprétation

4- Analyse sémantique (analyse de Vérité) d'une formule

5- Formules propositionnelles synonymes/équivalentes

6- Formes normales d'une formule propositionnelle

7- Satisfaisabilité et validité d'une formule

8- Modèle

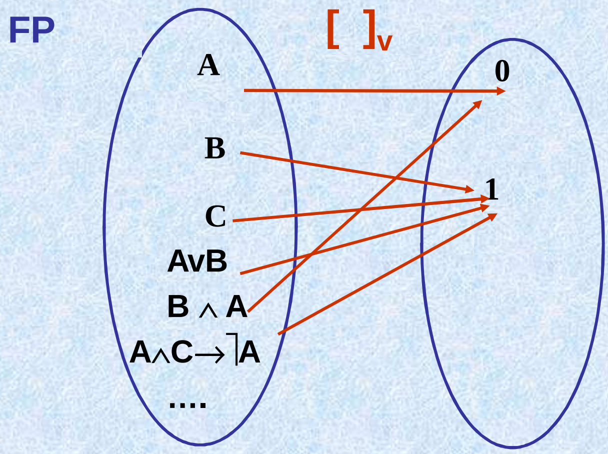
9- Compatibilité

10- Conséquence logique (conséquence tautologique)

10

3- Interprétation

❑ Pour Chaque valuation V, il existe une application unique qui prolonge V et qui est définie de l'ensemble des formules propositionnelles dans {0,1}.



11

3- Interprétation

❑ Cette application est appelée:
interprétation des FP dans V
et elle est notée par [ ]$_V$

❑ La signification d'une formule φ dépend des valeurs de vérité des variables qu'elle contient et de la sémantique des connecteurs (vérifonctionnalité).

12

3- Interprétation

- La sémantique des connecteurs logiques est donnée par les tables suivantes

A	$\neg$A
1	0
0	1

A	B	A $\wedge$ B	A V B	A $\rightarrow$ B	A $\leftrightarrow$ B
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

13

3- Interprétation

- L'interprétation (ou sémantique) d'une formule φ dans la valuation V est notée $[\varphi]_v$ et est définie par:

  - Si φ est une variable propositionnelle alors $[\varphi]_v = V(\varphi)$
  - Si $\varphi = \neg\varphi'$ alors $[\varphi]_v = \neg[\varphi']_v$
  - Si $\varphi = \varphi'\ K\ \varphi''$ alors $[\varphi]_v = [\varphi']_v\ K\ [\varphi'']_v$
    $K \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$

14

3- Interprétation

Exemple:

Soit V1 la valuation définie par: $V1(A)=0, V1(B)=1, V1(C)=1$

Soit la formule: $\varphi = (A \wedge B) \rightarrow C$

La sémantique de φ est définie par:

$$
\begin{aligned}
[\varphi]_{v1} &= [(A \wedge B) \rightarrow C]_{v1} \\
&= [A \wedge B]_{v1} \rightarrow [C]_{v1} \\
&= ([A]_{v1} \wedge [B]_{v1}) \rightarrow [C]_{v1} \\
&= (V1(A) \wedge V1(B)) \rightarrow V1(C) \\
&= (0 \wedge 1) \rightarrow 1 \\
&= 0 \rightarrow 1 \\
&= 1
\end{aligned}
$$

Plan

1-Introduction

2- Valuation (assignation, système de valeurs)

3- Interprétation

4- Analyse sémantique (analyse de Vérité) d'une formule

5- Formules propositionnelles synonymes/équivalentes

6- Formes normales d'une formule propositionnelle

7- Satisfaisabilité et validité d'une formule

8- Modèle

9- Compatibilité

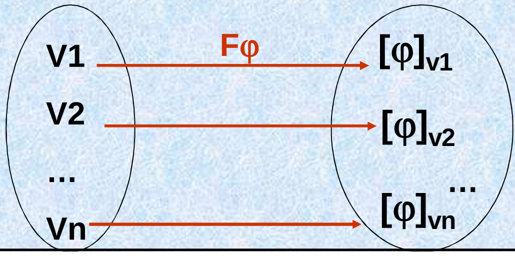
10- Conséquence logique (conséquence tautologique)

4- Analyse sémantique (analyse de Vérité) d'une formule

- **L'analyse de vérité d'une formule propositionnelle φ consiste à étudier sa valeur pour toutes les valuations possibles des variables propositionnelles qu'elles contient.**
- **Ceci revient à trouver une fonction Fφ qui associe à chaque valuation V des VP de φ l'interprétation de φ dans V**

$$\boxed{F\varphi : \{V1, V2, \ldots Vn\} \rightarrow \{0,1\}}$$

$$\boxed{F\varphi(V) = [\varphi]_v}$$



17

4- Analyse sémantique (analyse de Vérité) d'une formule

- **L'analyse de vérité peut être faite de deux manières:**

4-1 Table de Vérité

4-2 Diagramme de Quine

18

4- Analyse sémantique (analyse de Vérité) d'une formule

4-1 Table de Vérité

❑ ***Description de la méthode***

- **Soient A1,A2,….An les VP de la formule φ**
- **On énumère toutes les valuations possibles sur l'ensemble {A1,..An} (soit 2^n valuations)**
- **Pour chaque valuation V on calcule $[\varphi]_V$**

19

4- Analyse sémantique (analyse de Vérité) d'une formule

4-1 Table de Vérité

Exemple: $\varphi = (A \wedge B) \rightarrow C$

Eφ

A	B	C	$A \wedge B$	$A \wedge B \rightarrow C$
0	0	0	0	1
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	0	1	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

20

4- Analyse sémantique (analyse de Vérité) d'une formule

4-1 Table de Vérité

- Quand le nombre de variables augmente:
  - ➡ nombre total de valuations possibles augmente
  - ➡ nombre de lignes de la table de vérité augmente
- Quand la formule φ est longue
  - ➡ nécessité de calculs intermédiaires sur les sous formules de φ
  - ➡ nombre de colonnes de la table de vérité augmente

21

4- Analyse sémantique (analyse de Vérité) d'une formule

4-1 Table de Vérité

- En informatique la méthode des tables de Vérité n'est utilisée que pour les ***formules simples*** avec un nombre réduit de variables (problème d'espace mémoire et de temps d'exécution).
- On préfère en général la méthode de Quine ci-dessous

22

4- Analyse sémantique (analyse de Vérité) d'une formule

4-2 Diagramme de Quine

Description de la méthode

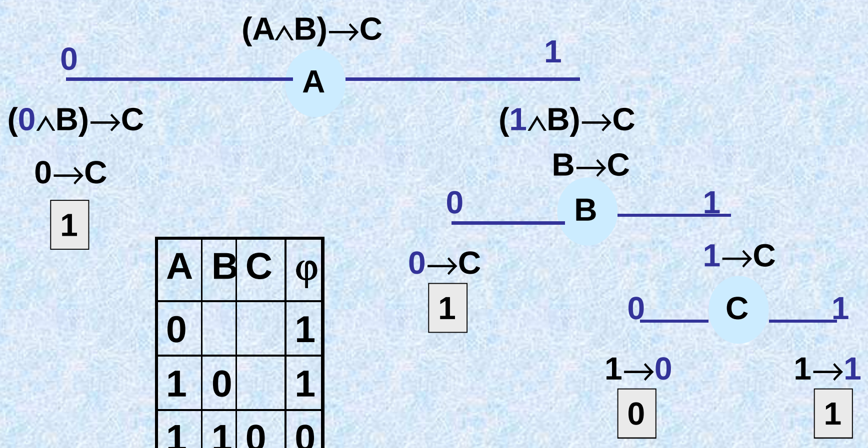
- Soient A1,A2,..An les VP de la FP φ
- Choisir une variable Ai
- On remplace à gauche Ai par 0 , et à droite par 1
- On effectue les calculs possibles (pour simplifier sémantiquement φ)
- On répète la procédure pour les formules obtenues jusqu'à ce qu'il n'ait plus de VP

23

4- Analyse sémantique (analyse de Vérité) d'une formule

4-2 Diagramme de Quine

Exemple: $\varphi = (A \wedge B) \rightarrow C$



A	B	C	φ
0			1
1	0		1
1	1	0	0
1	1	1	1

24

4- Analyse sémantique (analyse de Vérité) d'une formule

4-2 Diagramme de Quine

$\varphi = A \wedge B \rightarrow C$

Analyse par méthode de Quine

A	B	C	φ
0	∀	∀	1
1	0	∀	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Analyse par table de vérité

A	B	C	A∧B	φ
0	0	0	0	1
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	0	1	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

25

4- Analyse sémantique (analyse de Vérité) d'une formule

4-2 Diagramme de Quine

Exemple: $\varphi = (A \rightarrow ((BvC) \rightarrow A)) \rightarrow B$

$(A \rightarrow ((BvC) \rightarrow A)) \rightarrow B$

0 — B — 1

$(A \rightarrow ((0vC) \rightarrow A)) \rightarrow 0$

$(A \rightarrow (C \rightarrow A)) \rightarrow 0$

0 — A — 1

$(0 \rightarrow (C \rightarrow 0)) \rightarrow 0$

$1 \rightarrow 0$

$\boxed{0}$

$(1 \rightarrow (C \rightarrow 1)) \rightarrow 0$

$(1 \rightarrow 1) \rightarrow 0$

$1 \rightarrow 0$

$\boxed{0}$

$(A \rightarrow ((1vC) \rightarrow A)) \rightarrow 1$

$\boxed{1}$

A	B	φ
0	0	0
1	0	0
∀	1	1

26

Plan

27

5- Formules propositionnelles synonymes/équivalentes

5.1 Formules synonymes

Définition

Deux formules φ1 et φ2 sont synonymes ssi pour toute valuation V, φ1 et φ2 ont même interprétation.

$$\varphi 1 \text{ synonyme de } \varphi 2 \iff \forall V\ [\varphi 1]_V = [\varphi 2]_V$$

Exemples

$A \lor \rceil\rceil B$	$A \lor B$	sont synonymes
$\rceil(A \land B)$	$\rceil A \lor \rceil B$	sont synonymes
$A \lor B \lor (C \land \rceil C)$	$A \lor B$	sont synonymes

28

5- Formules propositionnelles synonymes/équivalentes

5.2 Formules équivalentes

Définition

$\varphi 1$ et $\varphi 2$ équivalentes $\Leftrightarrow$ $\left\{ \begin{array}{c} \varphi 1 \text{ synonyme de } \varphi 2 \\ \text{et} \\ \varphi 1 \text{ et } \varphi 2 \text{ ont les mêmes variables} \end{array} \right\}$

Exemples

$A \rightarrow B$, $\rceil A \vee B$ sont équivalentes

$A \vee B \vee (C \wedge \rceil C)$ $A \vee B$ synonymes mais non équivalentes

29

5- Formules propositionnelles synonymes/équivalentes

❑***Lemme-1:***

$\varphi 1$ synonyme de $\varphi 2$ $\Rightarrow$ $\varphi 1[\alpha/A]$ est synonyme $\varphi 2[\alpha/A]$

❑***Lemme-2:***

$\varphi 1$ synonyme de $\varphi 2$ $\Rightarrow$ $\varphi 1[\alpha 1/A1, .. \alpha n/An]$ est synonyme de $\varphi 2[\alpha 1/A1, .. \alpha n/An]$

❑***Lemme-3:***

$\alpha 1$ est synonyme de $\alpha 2$ $\Rightarrow$ $\varphi[\alpha 1/A]$ est synonyme $\varphi[\alpha 2/A]$

30

Plan

31

6- Formes normales d'une formule propositionnelle

❑ En Informatique, et en particulier dans certaines méthodes de preuve, on exige que la Formule à traiter soit sous une forme bien particulière.

❑ Par exemple:

φ ne doit contenir que les connecteurs $\rightarrow$ et $\rceil$

φ ne doit contenir que les connecteurs $\rceil$ et $\wedge$ et v

…etc.

❑ Nous allons définir les formes les plus connues. Nous montrons comment on peut mettre une Formule sous une forme normale donnée.

32

6- Formes normales d'une formule propositionnelle

Quelques définitions

- **Atome**: On appelle *atome* une Variable Propositionnelle
- **Littéral**: Un littéral est un *atome* ou la *négation d'un atome*
- **Conjonction élémentaire**: est un littéral
  ou
  une conjonction de littéraux

Exemples: A∧B∧⌉C∧⌉A∧D , (A∧B)∧C , ⌉B, B des conj.elem.

A∧⌉⌉B , ⌉(A∧B), (AvB)∧(B→C) non conjonctions élémentaires

- **Disjonction élémentaire**: est un littéral
  ou
  une disjonction de littéraux

33

6- Formes normales d'une formule propositionnelle

6-1 Forme Normale Négative (FNN)

- **Définition**

Une formule φ est sous forme normale négative (sous FNN) ssi :

- \- φ est construite avec les connecteurs ∧ v ⌉ seulement
  \- et
- le connecteur ⌉ n'apparaît que devant les VP
  (⌉ ne gouverne pas une ∧ , une v ou une autre ⌉)

- **Exemples**

A∧⌉B v C , (A∧⌉B)v (A∧C) ∧⌉A , A∧(BvC) sont sous FNN

A→B, A∧ ⌉⌉B vC , A∧⌉ (AvB) ne sont pas sous FNN

34

6- Formes normales d'une formule propositionnelle

6-1 Forme Normale Négative (FNN)

❑Lemme:

Toute forme propositionnelle φ est synonyme d'une FP sous FNN

❑ Méthode de mise sous FNN

1- Eliminer les $\rightarrow$ et les $\leftrightarrow$ en remplaçant
$\varphi 1 \rightarrow \varphi 2$ par $\neg\varphi 1 \vee \varphi 2$
$\varphi 1 \leftrightarrow \varphi 2$ par $(\neg\varphi 1 \vee \varphi 2) \wedge (\varphi 1 \vee \neg\varphi 2)$

2-Utiliser les identité de Morgan pour pousser les négations vers l'intérieur
$\neg(\varphi 1 \wedge \varphi 2) = \neg\varphi 1 \vee \neg\varphi 2$ $\qquad$ $\neg(\varphi 1 \vee \varphi 2) = \neg\varphi 1 \wedge \neg\varphi 2$

3- Remplacer les sous formules $\neg\neg\varphi$ par φ

35

6- Formes normales d'une formule propositionnelle

6-1 Forme Normale Négative (FNN)

❑Exemple de mise sous FNN

$$\varphi = ((A \wedge \neg B) \rightarrow \neg C)$$

- $((A \wedge B) \rightarrow \neg C) = \neg(A \wedge \neg B) \vee \neg C$ étape 1
- $= (\neg A \vee \neg\neg B) \vee \neg C$ étape 2
- $= (\neg A \vee B) \vee \neg C$ étape 3

36

6- Formes normales d'une formule propositionnelle

6-2 Forme Normale Conjonctive (FNC)

- **Définition**

Une formule φ est sous forme normale conjonctive (sous FNC) ssi

- φ est une disjonction élémentaire
  ou
- φ est une conjonction de disjonctions élémentaires

- **Exemples**

(AvB)∧(AvBv ⌉C)   (Av ⌉Cv ⌉D) ∧(⌉ Av ⌉D)   AvB   A
sont sous FNC

37

6- Formes normales d'une formule propositionnelle

6-2 Forme Normale Conjonctive (FNC)

- **Lemme:**

Toute formule propositionnelle φ est synonyme d'une FP sous FNC

- **Méthode de mise sous FNC (1)**

- Mettre φ sous FNN
- Remplacer toutes les sous-formules

φ1v(φ2∧φ3) par (φ1vφ2)∧(φ1vφ3)
distributivité à gauche de v par ∧

(φ2∧φ3)vφ1 par (φ2vφ1) ∧(φ3vφ1)
distributivité à droite de v par ∧

38

6- Formes normales d'une formule propositionnelle

6-2 Forme Normale Conjonctive (FNC)

- Exemple de mise sous FNC

- $\varphi = A \rightarrow (B \wedge C)$
- $= \neg A \vee (B \wedge C)$ sous FNN
- $= (\neg A \vee B) \wedge (\neg A \vee C)$ distributivité à gauche de v par rapport à $\wedge$

sous FNC

39

6- Formes normales d'une formule propositionnelle

6-2 Forme Normale Conjonctive (FNC)

- Méthode de mise sous FNC (2)

(Utilisation de la table de vérité)

A	B	C	φ
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

FNC= $(A \vee \neg B \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee B \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee \neg B \vee C)$

40

6- Formes normales d'une formule propositionnelle

6-3 Forme Normale Disjonctive (FND)

- **Définition**

Une formule φ est sous forme normale disjonctive (sous FND) ssi
- φ est une conjonction élémentaire

  ou
- φ est une disjonction de conjonctions élémentaires

- **Exemples**

(A∧B)v(A ∧ B ∧ ⌉C) (A ∧ ⌉C ∧ ⌉D) v (⌉ A ∧ ⌉D) A ∧B A
sont sous FND

41

6- Formes normales d'une formule propositionnelle

6-3 Forme Normale Disjonctive (FND)

- **Lemme:**

Toute formule propositionnelle φ est synonyme d'une FP sous FND

- **Méthode de mise sous FND (1)**

- Mettre φ sous FNN
- Remplacer toutes les sous-formules

  φ1 ∧ (φ2vφ3) par (φ1 ∧ φ2) v(φ1 ∧ φ3)
  distributivité à gauche de ∧ par v

  (φ2vφ3) ∧ φ1 par (φ2 ∧ φ1) v(φ3 ∧ φ1)
  distributivité à droite de ∧ par v

42

6- Formes normales d'une formule propositionnelle

6-3 Forme Normale Disjonctive (FND)

❑Exemple de mise sous FND

- φ = ⌉ (A→(B∧C))
- =⌉ (⌉Av (B ∧C))
- =⌉ ⌉A ∧ ⌉(B ∧C))
- =⌉ ⌉A ∧ (⌉B v ⌉C))
- = A ∧ (⌉B v ⌉C)) sous FNN
- =(A ∧⌉B) v (A ∧ ⌉C) distributivité à gauche de ∧ par rapport à v
- sous FND

43

6- Formes normales d'une formule propositionnelle

6-3 Forme Normale Conjonctive (FND)

❑ Méthode de mise sous FND (2)

(Utilisation de la table de vérité)

A	B	C	φ
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

FND= (⌉A ∧⌉B ∧⌉C) v (⌉A ∧⌉B∧C) v (⌉A∧B∧⌉C) v (A∧⌉B∧⌉C) v (A∧B∧C)

44

Plan

45

7- Satisfaisabilité et validité d'une formule

7-1 Formule satisfaite

❑ Une formule φ est satisfaite ssi φ est vraie pour au moins une valuation V des variables de φ on a $[\varphi]_V=1$

$$\boxed{\varphi \text{ satisfaisable} \leftrightarrow \exists V\ [\varphi]_V=1}$$

Une formule satisfaite ssi elle est vraie au moins une fois

❑ Une formule n'est pas satisfaite ssi elle est fausse pour toute valuation V des variables de φ

$$\boxed{\varphi \text{ non satisfaite} \leftrightarrow \forall V[\varphi]_V=0}$$

Une formule non satisfaite ssi elle est toujours fausse

❑ ***Exemple:*** AVB est satisfaite

$A \wedge \rceil A$ non satisfaite

46

7-Satisfaisabilité et Validité d'une formule

7-2 Formule valide

- Une formule φ est **valide** ssi pour toute valuation V des variables de φ on a $[\varphi]_V=1$

$$\varphi \text{ valide} \leftrightarrow \forall V\ [\varphi]_V=1$$

Une formule φ est valide ssi elle est toujours vraie

- Une formule **n'est pas valide** ssi elle est fausse pour au moins une valuation

$$\varphi \text{ non valide} \leftrightarrow \exists V\ [\varphi]_V=0$$

Une formule φ est non valide ssi elle est fausse au moins une fois

- ***Exemple***: $A \vee \rceil A$ est valide

$A \vee B$ n'est pas valide

47

7-Satisfaisabilité et Validité d'une formule

7-3 Tautologie

- Une **tautologie** est une formule qui est **toujours vraie**
- Une tautologie est une formule valide

$$\varphi \text{ est une tautologie} \leftrightarrow \forall V\ [\varphi]_V=1$$

7-4 Antilogie

- Une **antilogie** est une formule qui est **toujours fausse**
- Une antilogie est une formule non satisfaite

$$\varphi \text{ est une antilogie} \leftrightarrow \forall V\ [\varphi]_V=0$$

48

7-Satisfaisabilité et Validité d'une formule

- On a donc 3 catégories de formules:
  - Les formules valides (toujours vraie)
    i.e les tautologies
  - Les formule satisfiables et non valides
  - Les formules non satisfiables (toujours fausses)
    i.e les antilogies.

49

7-Satisfaisabilité et Validité d'une formule

- Exemples

formules valides	formules satisfiables et non valides	formules non satisfaites
$A \vee \neg A$	A	$A \wedge \neg A$
$A \vee \neg A \vee B$	$A \vee B$	$(A \vee \neg A) \rightarrow (A \wedge \neg A)$
$A \rightarrow A$	$A \rightarrow B$	$A \wedge \neg A \wedge B$
$(A \wedge B) \rightarrow (B \wedge A)$	$B \rightarrow (B \wedge A)$	$(A \vee B) \wedge (\neg A \wedge \neg B)$
$(A \wedge B) \rightarrow A$	$(A \vee B) \rightarrow A$	$(A \rightarrow B) \wedge (A \wedge \neg B)$
$(A \wedge \neg A) \rightarrow B$	$(A \wedge C) \rightarrow B$	
$B \rightarrow B \vee A$	$(A \vee B) \wedge C$	
$(A \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg A$	$(A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow A)$	
$(A \rightarrow A \wedge \neg A) \rightarrow \neg A$	$(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg B)$	

50

Plan

8- Modèle

8-1 Modèle d'une formule propositionnelle

- **Définition**

Un **modèle** d'une formule propositionnelle φ est une **valuation** V telle que $[\varphi]_V=1$

$$\boxed{V \text{ est un modèle de } \varphi \quad \leftrightarrow \quad [\varphi]_V = 1}$$

- On note $V \models \varphi$

$$\boxed{V \models \varphi \quad \leftrightarrow \quad [\varphi]_V = 1}$$

$$\boxed{\rceil (V \models \varphi) \leftrightarrow \quad [\varphi]_V = 0}$$

- ***Exemple***: $AvB \rightarrow A \wedge B$ a deux modèles :

V1 / V1(A)=0 V1(B)=0

V2/ V2(A)=1 V2(B)=1

8- Modèle

8-2 Modèle d'un ensemble de formules propositionnelles

- **Définition**

Un modèle d'un ensemble de formules propositionnelles Σ est une valuation V qui satisfait toutes les formules de Σ

V modèle de $\Sigma \leftrightarrow \forall\varphi \in \Sigma \;\; V \models \varphi$

V modèle de $\Sigma \leftrightarrow \forall\varphi \in \Sigma \;\; [\varphi]_V=1$

V non modèle de $\Sigma \leftrightarrow \exists\, \varphi \in \Sigma \; \rceil (V \models \varphi)$

V non modèle de $\Sigma \leftrightarrow \exists\varphi \in \Sigma \;\; [\varphi]_V=0$

- On note $V \models \Sigma$

- ***Exemple*** $\Sigma = \{AvB, A \rightarrow BvC, \; C \}$

  Σ a un modèle

  V1 / V1(A)=1,V1(B)=0,V1(C)=1

53

Plan

54

9- Compatibilité

9-1 Compatibilité d'une formule

Définition

Une FP φ est **compatible** ssi φ a au moins un **modèle**

φ est compatible $\leftrightarrow \exists V\ [\varphi]_V = 1$

φ est incompatible $\leftrightarrow \forall V\ [\varphi]_V = 0 \quad \leftrightarrow\ \varphi$ antilogie

Exemples

AvB, est compatible

$A \wedge \neg A$ est incompatible

55

9- Compatibilité

9-2 Compatibilité d'un ensemble de formules

Définition

Un ensemble de formules Σ est compatible ssi il au moins un modèle

Σ est compatible $\leftrightarrow\ \exists V\ \forall \varphi \in \Sigma\ [\varphi]_V = 1$

Σ est incompatible $\leftrightarrow\ \forall V\ \exists \varphi \in \Sigma\ [\varphi]_V = 0$

Exemple

L'ensemble $\{A \rightarrow B, A \wedge \neg C, C \vee B\}$ est compatible

V(A)=1, V(B)=1 , V(C)=0

56

9- Compatibilité

9-2 Compatibilité d'un ensemble de formules

❑ **Exemple** {A→C, A∧⌉C, CvB} est incompatible

A	B	C	A→C	A∧⌉C	CvB
0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	0	1
0	1	0	1	0	1
0	1	1	1	0	1
1	0	0	0	1	0
1	0	1	1	0	1
1	1	0	0	1	1
1	1	1	1	0	1

Aucun modèle de l'ensemble

9- Compatibilité

❑ **Exemple**

Pour l'inscription à une université, on a énoncé le règlement suivant:

1. **Tout inscrit non algérien a une chambre dans la cité universitaire**
2. **Tout inscrit a une carte d'identité ou n'a pas une chambre dans la cité universitaire**
3. **Tout inscrit marié n'a pas de bourse**
4. **Un inscrit a une bourse ssi il est algérien**
5. **Tout inscrit qui a une carte d'identité est algérien et marié.**
6. **Tout inscrit algérien a une carte d'identité.**

Peut-on accepter quelqu'un dans cette université?

9- Compatibilité

Les VP:

- **A.** x est algérien
- **B.** x a une chambre universitaire
- **C.** x a une carte d'identité
- **D.** x a une bourse
- **E.** x marié

Les formules

La formulation du règlement d'inscription donne les FP suivantes

1. $\neg A \rightarrow B$
2. $C \vee \neg B$
3. $E \rightarrow \neg D$
4. $D \leftrightarrow A$
5. $C \rightarrow A \wedge E$
6. $A \rightarrow C$

59

9- Compatibilité

Le problème posé

« Peut-on accepter quelqu'un dans cette université? »

revient à vérifier si

l'ensemble de ces FP est compatible ?

60

9- Compatibilité

__Méthodes__

1. Utilisation de la Table de vérité

2. Quand l'ensemble des FP est grand et le nombre des VP est important, on essaye de procéder progressivement à satisfaire les différentes FP: on fixe une VP à 0 (puis 1) et on déduit les valeurs de vérité des autres VP jusqu'à avoir un modèle

__Exemple:__

L'ensemble précédent est incompatible

Donc aucune personne ne peut être inscrite à cette université

61

Plan

1-Introduction

2- Valuation (assignation, système de valeurs)

3- Interprétation

4- Analyse sémantique (analyse de Vérité) d'une formule

5- Formules propositionnelles synonymes/équivalentes

6- Formes normales d'une formule propositionnelle

7- Satisfaisabilité et validité d'une formule

8- Modèle

9- Compatibilité

10- Conséquence logique (conséquence tautologique)

62

10- Conséquence logique (conséquence tautologique)

10-1 Conséquence d'une formule

❑ **Définition**

Un formule φ est une **conséquence logique** (ou conséquence tautologique) d'une formule ψ ssi tout modèle de ψ est une modèle de φ.

(φ conséquence de ψ) $\leftrightarrow$ $(\forall V\ ([\psi]_V =1 \rightarrow [\varphi]_V =1))$

(φ conséquence de ψ) $\leftrightarrow$ $(\forall V\ [\psi \rightarrow \varphi]_V =1)$

(φ conséquence de ψ) $\leftrightarrow$ ($\psi \rightarrow \varphi$ est une tautologie)

<u>Notation:</u> $\psi \models \varphi$

63

10- Conséquence logique (conséquence tautologique)

10-1 Conséquence d'une formule

❑ **Exemple**

$\psi = A \wedge B$	$\varphi = A \vee B$	φ est conséquence de ψ
$\psi = A \wedge (A \rightarrow B)$	$\varphi = A \wedge B$	φ est conséquence de ψ

❑ **lemme**

Deux FP $\varphi 1$ et $\varphi 2$ sont synonymes ssi

$$\begin{cases} \varphi 1 \text{ est conséquence de } \varphi 2 \\ \text{et} \\ \varphi 2 \text{ est conséquence de } \varphi 1. \end{cases}$$

64

10- Conséquence logique (conséquence tautologique)

10-1 Conséquence d'une formule

❑ **Définition**

Une formule φ n'est pas une conséquence logique (ou conséquence tautologique) d'une formule ψ ssi il existe un modèle de ψ qui n'est pas une modèle de φ.

(φ non conséquence de ψ) $\leftrightarrow$ ($\exists$V ($[\psi]_V$ =1 $\wedge$ $[\varphi]_V$ =0)

❑ **Exemple**

ψ = Av (A$\rightarrow$B) φ= A$\wedge$B φ non conséquence de ψ

V(A)=1 V(B)=0 , V est modèle de ψ et non modèle de φ

65

10- Conséquence logique (conséquence tautologique)

10-2 Conséquence d'un ensemble de formules

❑ **Définition**

Un formule φ est une conséquence logique (ou conséquence tautologique) d'un ensemble de formules propositionnelles Σ={φ1,φ2,….,φn} *(noté* φ1, … ,φn $\vdash$ φ*)* ssi tout modèle de Σ est un modèle de φ

(φ conséquence de Σ) $\leftrightarrow$ ($\forall$V (V modèle deΣ $\rightarrow$V modèle de φ))

(φ conséquence de Σ) $\leftrightarrow$ ($\forall$V (($\forall\varphi$i $\in\Sigma$ $[\varphi i]_V$ =1) $\rightarrow[\varphi]_V$ =1))

66

10- Conséquence logique (conséquence tautologique)

10-2 Conséquence d'un ensemble de formules

❑ **Exemple**

$\{A \to B, A \wedge \neg C, C \vee B\} \models A \wedge B$

A	B	C	A→B	A∧⌉C	CvB	A∧B
0	0	0	1	0	0	0
0	0	1	1	0	1	0
0	1	0	1	0	1	0
0	1	1	1	0	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	0	1	1

67

10- Conséquence logique (conséquence tautologique)

10-2 Conséquence d'un ensemble de formules

Remarques

Par abus de notation on écrit souvent

$\varphi 1,\ldots,\varphi n \models \varphi$	**à la place de**	$\{\varphi 1,\ldots,\varphi n\} \models \varphi$	
$\psi \models \varphi$	**à la place de**	$\{\psi\} \models \varphi.$	
$\Sigma, \psi \models \varphi$	**à la place de**	$\Sigma \cup \{\psi\} \models \varphi$	
$\models \varphi$	**à la place**	$\varnothing \models \varphi$	

68

10- Conséquence logique (conséquence tautologique)

10-2 Conséquence d'un ensemble de formules

❑ Définition

Un formule φ **n'est une conséquence** logique (ou conséquence tautologique) d'un ensemble de formes propositionnelles $\Sigma=\{\varphi 1,\varphi 2,\ldots.,\varphi n\}$ ssi il existe au moins un modèle de Σ qui n'est pas un modèle de φ

(φ non conséquence de Σ) $\leftrightarrow$

$(\exists V\ (V \text{ modèle de } \Sigma \ \wedge V \text{ non modèle de } \varphi))$

(φ non conséquence de Σ) $\leftrightarrow$

$(\exists V\ ((\forall \varphi i \in \Sigma\ \ [\varphi i]_V = 1)\ \wedge [\varphi]_V = 0))$

69

10- Conséquence logique (conséquence tautologique)

10-2 Conséquence d'un ensemble de formules

❑ Exemple

$A \wedge B$ n'est pas conséquence de $\{A \to B, C \vee B\}$

A	B	C	A→B	CvB		A∧B
0	0	0	1	0		0
0	0	1	1	1		0
0	1	0	1	1		0
0	1	1	1	1		0
1	0	0	0	0		0
1	0	1	0	1		0
1	1	0	1	1		1
1	1	1	1	1		1

70

10- Conséquence logique (conséquence tautologique)

10-2 Conséquence d'un ensemble de formules

Exemple

A	$\vdash A$	✓
A , B	$\vdash A$	✓
$\varphi1,\varphi2,..,\varphi n$	$\vdash \varphi i$	✓
$\varphi1, \varphi2$	$\vdash \varphi1 \wedge \varphi2$	✓
$\varphi1, \varphi2$	$\vdash \varphi1 \vee \varphi2$	✓
$\varphi1 \vee \varphi2$	$\vdash \varphi1$	✗
$\{\varphi1 , \varphi1 \rightarrow \varphi2\}$	$\vdash \varphi2$	✓
$\varphi1 \vee \varphi2$	$\vdash \varphi1 \wedge \varphi2$	✗
$\neg\varphi2, \varphi1 \rightarrow \varphi2$	$\vdash \neg\varphi1$	✓

71