

Chapitre-3

Logique Propositionnelle

- Système de Preuve -

1

Plan

- 1- Introduction
- 2- Preuve de la satisfaisabilité d'une formule
- 3- Preuve de la validité d'une formule
- 4- Preuve de compatibilité d'un ensemble de formules
- 5- Preuve de conséquence logique

2

Plan

1- Introduction

2- Preuve de la satisfaisabilité d'une formule

3- Preuve de la validité d'une formule

4- Preuve de compatibilité d'un ensemble de formules

5- Preuve de conséquence logique

3

Introduction

□ Pour ***prouver*** qu'une formule est (non) satisfaite, qu'une formule est (non) valide, qu'un ensemble est (non) compatible,.....etc., on dispose seulement (pour le moment) de :

La table de vérité

□ Bien qu'il soit possible d'énumérer toutes les valuations pour établir une tables de vérité, la méthode est **coûteuse en espace et en temps**:

↳ **n variables dans les formules $\Rightarrow 2^n$ lignes**

↳ **formules complexes \Rightarrow un grand nombre de colonnes**

4

Introduction

- Une **preuve courte est préférable** à une longue liste de valuations comme explication de:
validité, satisfisabilité, compatibilité de formules

Le problème ? comment prouver

- la **satisfisabilité** ou non d'une formule
- la **validité** ou non d'une formule
- la **compatibilité** ou non d'un ensemble de formules
- une formule est **conséquence** d'un ensemble de formules

sans utiliser
la table de
vérité

L'objectif du chapitre

Présenter quelques **méthodes de preuve** en logique propositionnelle.

5

Plan

1- Introduction

2- Preuve de la satisfaisabilité d'une formule

3- Preuve de la validité d'une formule

4- Preuve de compatibilité d'un ensemble de formules

5- Preuve de conséquence logique

6

Plan

1- Introduction

2- Preuve de la satisfaisabilité d'une formule
(méthode des tableaux sémantiques)

3- Preuve de la validité d'une formule

4- Preuve de compatibilité d'un ensemble de formules

5- Preuve de conséquence logique

7

Preuve de la satisfaisabilité d'une formule (méthode des tableaux sémantiques)

Principe:

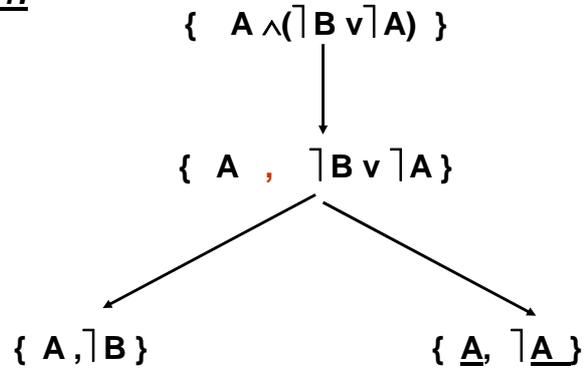
Pour prouver qu'une FP φ est satisfaite on cherche systématiquement un modèle

On suppose que φ est **Vrai** est on cherche un modèle **V**

8

Preuve de la satisfaisabilité d'une formule
(méthode des tableaux sémantiques)

Exemple1:



V(A)=1 et V(B)=0

Donc $A \wedge (\neg B \vee \neg A)$ **satisfaisable**

9

Preuve de la satisfaisabilité d'une formule
(méthode des tableaux sémantiques)

Le problème de preuve de satisfaisabilité de ϕ a été réduit à un problème de satisfaisabilité d'un **ensemble de littéraux**.

Un ensemble de littéraux est satisfaisable ssi il ne contient pas il ne contient pas deux littéraux complémentaires

(ex: { A, ¬A })

10

**Preuve de la satisfaisabilité d'une formule
(méthode des tableaux sémantiques)**

Exemple2:

$$\varphi = (A \vee B) \wedge (\neg B \wedge \neg A)$$

$$\{ (A \vee B) \wedge (\neg B \wedge \neg A) \}$$

$$\{ A \vee B, \neg B \wedge \neg A \}$$

$$\{ A \vee B, \neg B, \neg A \}$$

$$\{ \underline{A}, \neg B, \neg \underline{A} \}$$

$$\{ \underline{B}, \neg \underline{B}, \neg A \}$$

Donc $\varphi = (A \vee B) \wedge (\neg B \wedge \neg A)$ **non satisfaisable**

11

**Preuve de la satisfaisabilité d'une formule
(méthode des tableaux sémantiques)**

Exemple3:

$$\varphi = A \vee (B \wedge C)$$

$$\{ A \vee (B \wedge C) \}$$

$$\{ A \}$$

$$\{ B \wedge C \}$$

$$\{ B, C \}$$

1. $V(A)=1 \quad V(B)=0 \quad V(C)=0$

2. $V(A)=1 \quad V(B)=0 \quad V(C)=1$

3. $V(A)=1 \quad V(B)=1 \quad V(C)=0$

4. $V(A)=1 \quad V(B)=1 \quad V(C)=1$

1. $V(A)=0 \quad V(B)=1 \quad V(C)=1$

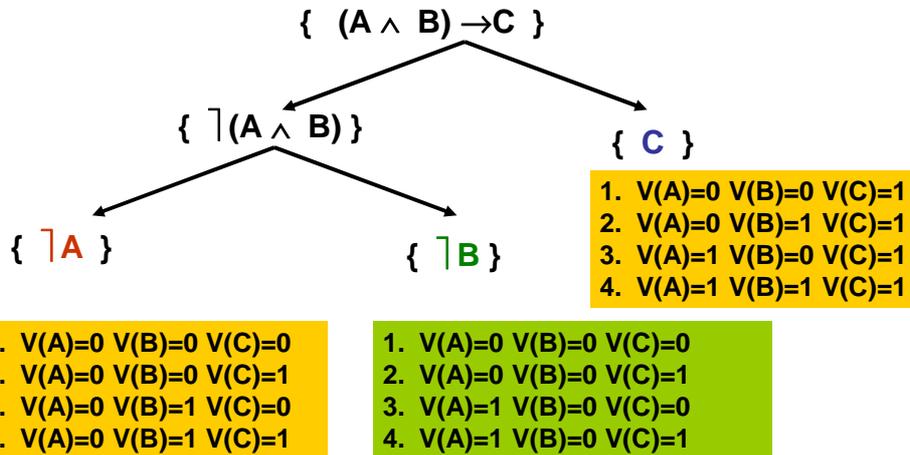
2. $V(A)=1 \quad V(B)=1 \quad V(C)=1$

12

Preuve de la satisfaisabilité d'une formule
(méthode des tableaux sémantiques)

Exemple4:

$$\phi = (A \wedge B) \rightarrow C$$



13

Preuve de la satisfaisabilité d'une formule
(méthode des tableaux sémantiques)

Remarque:

quand on sélectionne une conjonction on a une seule branche

→ on appelle ce type de règles les **α -règles**

quand on sélectionne une disjonction on a deux branches

→ on appelle ce type de règles les **β -règles**

14

**Preuve de la satisfaisabilité d'une formule
(méthode des tableaux sémantiques)**

Les α -règles

| | | | | | |
|--|-------------------------|----------------------------------|--------------------------------------|---|---|
| $\{FP\}$ | $\{\neg \neg \varphi\}$ | $\{\varphi_1 \wedge \varphi_2\}$ | $\{\neg(\varphi_1 \vee \varphi_2)\}$ | $\{\neg(\varphi_1 \rightarrow \varphi_2)\}$ | $\{\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2\}$ |
| ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ |
| $\{\alpha_1\}$ $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ | $\{\varphi\}$ | $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ | $\{\neg \varphi_1, \neg \varphi_2\}$ | $\{\varphi_1, \neg \varphi_2\}$ | $\{\varphi_1 \rightarrow \varphi_2,$ $\varphi_2 \rightarrow \varphi_1\}$ |

Toutes les α -règles sont synonymes à des **conjonctions**

15

**Preuve de la satisfaisabilité d'une formule
(méthode des tableaux sémantiques)**

Les β -règles

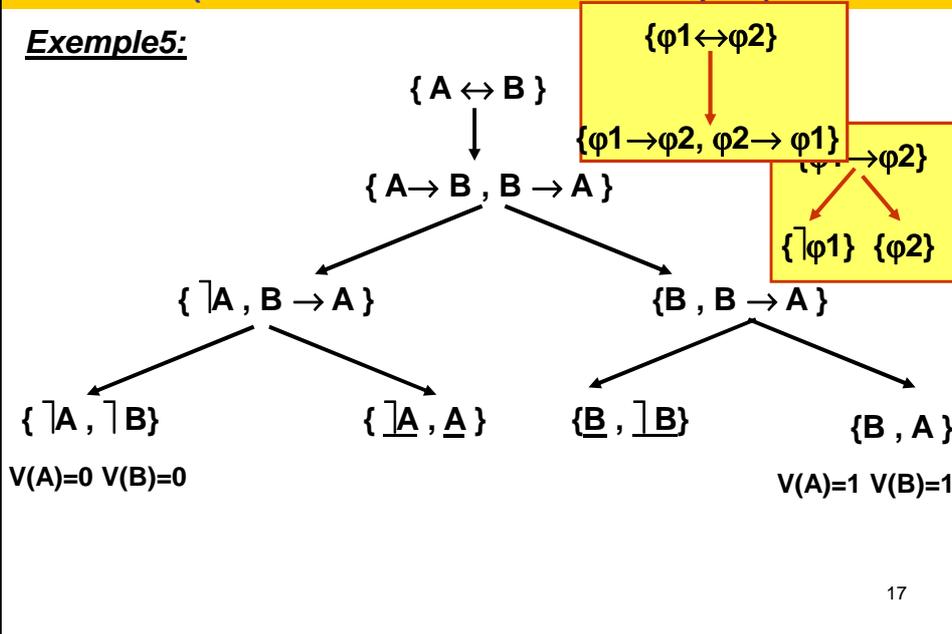
| | | | | |
|---------------------------|--------------------------------|---|---------------------------------------|--|
| $\{FP\}$ | $\{\varphi_1 \vee \varphi_2\}$ | $\{\neg(\varphi_1 \wedge \varphi_2)\}$ | $\{\varphi_1 \rightarrow \varphi_2\}$ | $\{\neg(\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2)\}$ |
| ↙ ↘ | ↙ ↘ | ↙ ↘ | ↙ ↘ | ↙ ↘ |
| $\{\beta_1\} \{\beta_2\}$ | $\{\varphi_1\} \{\varphi_2\}$ | $\{\neg \varphi_1\} \{\neg \varphi_2\}$ | $\{\neg \varphi_1\} \{\varphi_2\}$ | $\{\neg(\varphi_1 \rightarrow \varphi_2)\}$ $\{\neg(\varphi_2 \rightarrow \varphi_1)\}$ |

Toutes les β -règles sont synonymes à des **disjonctions**

16

Preuve de la satisfaisabilité d'une formule (méthode des tableaux sémantiques)

Exemple5:



Preuve de la satisfaisabilité d'une formule (méthode des tableaux sémantiques)

Algorithme

L'algorithme construit à partir d'une formule φ un arbre noté T dont les nœuds sont des ensembles de formules.

1-Initialisation :

Au départ, l'arbre ne contient qu'un seul nœud : l'ensemble $\{\varphi\}$;

2-Tant qu'il existe une feuille **F** de l'arbre qui contient une formule ψ qui est simplifiable (non littéral) faire:

□ Si ψ est simplifiable par une α -règle, alors on crée un fils **F0** à **F** où **F0** est obtenu en supprimant ψ de **F** et en ajoutant la formule (dans le cas d'une double négation) ou les deux formules (pour les autres cas) obtenues par la simplification.

□ Si ψ est simplifiable par une β -règle, alors on crée deux fils **F1** et **F2**, chacun étant obtenu en supprimant ψ de **F** et en ajoutant respectivement les formules obtenues par la simplification.

3-Si toutes les feuilles contiennent une paire de littéraux complémentaires alors φ non-satisfaisable, sinon φ satisfaisable.

Preuve de la satisfaisabilité d'une formule (méthode des tableaux sémantiques)

Remarques:

La méthode des tableaux sémantiques permet de:

- Prouver si une formule est satisfaite ou non
- Déterminer un ou tous les modèles d'une formule

19

Plan

1- Introduction

2- Preuve de la satisfaisabilité d'une formule
(méthode des tableaux sémantiques)

3- Preuve de la validité d'une formule

4- Preuve de compatibilité d'un ensemble de formules

5- Preuve de conséquence logique

20

Plan

1- Introduction

2- Preuve de la satisfaisabilité d'une formule
(méthode des tableaux sémantiques)

3- Preuve de la validité d'une formule

4- Preuve de compatibilité d'un ensemble de formules

5- Preuve de conséquence logique

21

Preuve de la validité d'une formule

Théorème

φ valide $\Leftrightarrow \neg \varphi$ est non satisfaite

Démonstration

φ valide $\Leftrightarrow \forall v [\varphi]_v=1$
 $\Leftrightarrow \forall v [\neg \varphi]_v=0$
 $\Leftrightarrow \neg \varphi$ est non satisfaite

 Prouver que φ est valide
revient à prouver que

$\neg \varphi$ est non satisfaite (alg précédent)

22

Preuve de la validité d'une formule

φ Valide ?

1. $\varphi' := \neg \varphi$
2. Algorithme des tableaux sémantiques précédent pour φ'
3. Si φ' non satisfaite Alors φ valide
Sinon φ non valide

23

Preuve de la validité d'une formule

Exemple: $\varphi = A \vee \neg A$ Valide?

$$\varphi' = \neg(A \vee \neg A)$$

$$\{ \neg(A \vee \neg A) \}$$

$$\{ \neg A, \neg(\neg A) \}$$

$$\{ \neg A, A \}$$

φ' non satisfaite

$\Rightarrow \varphi = A \vee \neg A$ valide

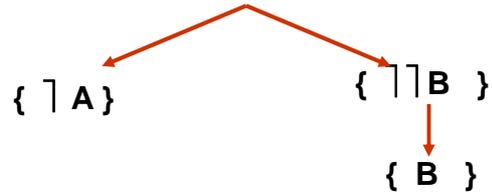
24

Preuve de la validité d'une formule

Exemple: $\varphi = A \wedge \neg B$ Valide?

$$\varphi' = \neg(A \wedge \neg B)$$

$$\{ \neg(A \wedge \neg B) \}$$



φ' Satisfaite (pour $A=0$)

$\Rightarrow \varphi$ Non valide

25

Plan

1- Introduction

2- Preuve de la satisfaisabilité d'une formule
(méthode des tableaux sémantiques)

3- Preuve de la validité d'une formule

4- Preuve de compatibilité d'un ensemble de formules

5- Preuve de conséquence logique

26

Plan

1- Introduction

2- Preuve de la satisfaisabilité d'une formule
(méthode des tableaux sémantiques)

3- Preuve de la validité d'une formule

4- Preuve de compatibilité d'un ensemble de formules

5- Preuve de conséquence logique

27

Preuve de compatibilité d'un ensemble de formules

Théorème

$$\left[\begin{array}{l} \Sigma = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \\ \text{est compatible} \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n \\ \text{est satisfaite} \end{array} \right]$$

Démonstration

$$\begin{aligned} \Sigma = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \text{ est compatible} &\Leftrightarrow \exists v [\varphi_1]_v = [\varphi_2]_v = \dots = [\varphi_n]_v = 1 \\ &\Leftrightarrow \exists v [\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n]_v = 1 \\ &\Leftrightarrow \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n \text{ est satisfaite} \end{aligned}$$

 Prouver que $\Sigma = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ est compatible
revient à prouver que
la FP $\varphi = \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n$ est satisfaite

28

Preuve de compatibilité d'un ensemble de formules

$\Sigma = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ est compatible ?

1. $\varphi' := \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \dots \wedge \varphi_n$
2. Algorithme des tableaux sémantiques précédent à φ'
3. Si φ' satisfaite Alors Σ est compatible
Sinon Σ est incompatible

29

Plan

1- Introduction

2- Preuve de la satisfaisabilité d'une formule

3- Preuve de la validité d'une formule

4- Preuve de compatibilité d'un ensemble de formules

5- Preuve de conséquence logique

30

Plan

1- Introduction

2- Preuve de la satisfaisabilité d'une formule

3- Preuve de la validité d'une formule

4- Preuve de compatibilité d'un ensemble de formules

5- Preuve de conséquence logique

- méthode des tableaux sémantiques
- méthode de Dédution Naturelle

31

Plan

1- Introduction

2- Preuve de la satisfaisabilité d'une formule

3- Preuve de la validité d'une formule

4- Preuve de compatibilité d'un ensemble de formules

5- Preuve de conséquence logique

- méthode des tableaux sémantiques
- méthode de Dédution Naturelle

32

Preuve de conséquence logique (méthode des tableaux sémantiques)

Théorème

$$(\varphi_1, \dots, \varphi_n \mid - \varphi) \Leftrightarrow (\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n \rightarrow \varphi \text{ tautologie})$$

Démonstration (Voir TD)



Prouver que $\varphi_1, \dots, \varphi_n \mid - \varphi$
revient à prouver que
la FP $\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n \rightarrow \varphi$ est valide

33

Plan

1- Introduction

2- Preuve de la satisfaisabilité d'une formule

3- Preuve de la validité d'une formule

4- Preuve de compatibilité d'un ensemble de formules

5- Preuve de conséquence logique

- méthode des tableaux sémantiques
- méthode de Déduction Naturelle

34