Chapitre-3

Logique Propositionnelle

- Système de Preuve -

Plan

Plan

Introduction

- **Pour *prouver* qu'une formule est (non) satisfaite, qu'une formule est (non) valide, qu'un ensemble est (non) compatible,…..etc., on dispose seulement (pour le moment) de :**

  La table de vérité

- **Bien qu'il soit possible d'énumérer toutes les valuations pour établir une tables de vérité, la méthode est coûteuse en espace et en temps:**

  - **n variables dans les formules $\Rightarrow 2^n$ lignes**
  - **formules complexes $\Rightarrow$ un grand nombre de colonnes**

Introduction

❑ Une preuve courte est préférable à une longue liste de valuations comme explication de:

validité, satisfisabilité, compatibilité …. de formules

Le problème ? comment prouver

- la satisfisabilité ou non d'une formule
- la validité ou non d'une formule
- la compatibilité ou non d'un ensemble de formules
- une formule est conséquence d'un ensemble de formules

} sans utiliser la table de vérité

L'objectif du chapitre

Présenter quelques méthodes de preuve en logique propositionnelle.

Plan

1- Introduction

2- Preuve de la satisfaisabilité d'une formule

3- Preuve de la validité d'une formule

4- Preuve de compatibilité d'un ensemble de formules

5- Preuve de conséquence logique

Plan

Preuve de la satisfaisabilité d'une formule (méthode des tableaux sémantiques)

Principe:

Pour prouver qu'une FP φ est satisfaite on cherche systématiquement un modèle

On suppose que φ est Vrai est on cherche un modèle V

Preuve de la satisfaisabilité d'une formule
(méthode des tableaux sémantiques)

Exemple1:

$\{ \; A \wedge (\neg B \vee \neg A) \; \}$

$\{ \; A \; , \; \neg B \vee \neg A \; \}$

$\{ \; A , \neg B \; \}$ $\qquad\qquad$ $\{ \; \underline{A}, \; \underline{\neg A} \; \}$

$\boxed{V(A)=1 \text{ et } V(B)=0}$

Donc $A \wedge (\neg B \vee \neg A)$ satisfaite

Preuve de la satisfaisabilité d'une formule
(méthode des tableaux sémantiques)

Le problème de preuve de satisfaisabilité de φ a été réduit à un problème de satisfaisabilité d'un ensemble de littéraux.

Un ensemble de littéraux est satisfaisable ssi il ne contient pas il ne contient pas deux littéraux complémentaires

(ex:$\{ A, \neg A \}$)

Preuve de la satisfaisabilité d'une formule (méthode des tableaux sémantiques)

Exemple2: $\varphi = (A \vee B) \wedge (\neg B \wedge \neg A)$

$\{ \quad (A \vee B) \wedge (\neg B \wedge \neg A) \quad \}$

$\downarrow$

$\{ \ A \vee B, \quad \neg B \wedge \neg A \quad \}$

$\downarrow$

$\{ \ A \vee B, \quad \neg B, \quad \neg A \quad \}$

$\{ \ \underline{A}, \quad \neg B, \quad \neg \underline{A} \quad \}$ $\qquad$ $\{ \ \underline{B}, \quad \neg \underline{B}, \quad \neg A \quad \}$

Donc $\varphi = (A \vee B) \wedge (\neg B \wedge \neg A)$ **non satisfaite**

Preuve de la satisfaisabilité d'une formule (méthode des tableaux sémantiques)

Exemple3: $\varphi = A \vee (B \wedge C)$

$\{ \ A \vee (B \wedge C) \ \}$

$\{ \ A \ \}$ $\qquad$ $\{ \ B \wedge C \ \}$

$\qquad\qquad\qquad \downarrow$

$\qquad\qquad\qquad \{ \ B, C \ \}$

1. V(A)=1 V(B)= 0 V(C)=0
2. V(A)=1 V(B)= 0 V(C)=1
3. V(A)=1 V(B)= 1 V(C)=0
4. V(A)=1 V(B)= 1 V(C)=1

1. V(A)=0 V(B)=1 V(C)=1
2. V(A)=1 V(B)=1 V(C)=1

Preuve de la satisfaisabilité d'une formule (méthode des tableaux sémantiques)

Exemple4: $\varphi = (A \land B) \rightarrow C$

$\{ (A \land B) \rightarrow C \}$

$\{ \neg(A \land B) \}$ $\{ C \}$

1. V(A)=0 V(B)=0 V(C)=1
2. V(A)=0 V(B)=1 V(C)=1
3. V(A)=1 V(B)=0 V(C)=1
4. V(A)=1 V(B)=1 V(C)=1

$\{ \neg A \}$ $\{ \neg B \}$

1. V(A)=0 V(B)=0 V(C)=0
2. V(A)=0 V(B)=0 V(C)=1
3. V(A)=0 V(B)=1 V(C)=0
4. V(A)=0 V(B)=1 V(C)=1

1. V(A)=0 V(B)=0 V(C)=0
2. V(A)=0 V(B)=0 V(C)=1
3. V(A)=1 V(B)=0 V(C)=0
4. V(A)=1 V(B)=0 V(C)=1

Preuve de la satisfaisabilité d'une formule (méthode des tableaux sémantiques)

Remarque:

quand on sélectionne une conjonction on a une <u>seule</u> branche

➔ on appelle ce type de règles les α-règles

quand on sélectionne une disjonction on a <u>deux</u> branches

➔ on appelle ce type de règles les β-règles

Preuve de la satisfaisabilité d'une formule
(méthode des tableaux sémantiques)

Les α-règles

{FP}	$\{\neg\neg\varphi\}$	$\{\varphi1 \wedge \varphi2\}$	$\{\neg(\varphi1 \vee \varphi2)\}$	$\{\neg(\varphi1 \rightarrow \varphi2)\}$	$\{\varphi1 \leftrightarrow \varphi2\}$
$\{\alpha1\}$ $\{\alpha1, \alpha2\}$	$\{\varphi\}$	$\{\varphi1, \varphi2\}$	$\{\neg\varphi1, \neg\varphi2\}$	$\{\varphi1, \neg\varphi2\}$	$\{\varphi1 \rightarrow \varphi2,$ $\varphi2 \rightarrow \varphi1\}$

Toutes les α-règles sont synonymes à des conjonctions

Preuve de la satisfaisabilité d'une formule
(méthode des tableaux sémantiques)

Les β-règles

{FP}	$\{\varphi1 \vee \varphi2\}$	$\{\neg(\varphi1 \wedge \varphi2)\}$	$\{\varphi1 \rightarrow \varphi2\}$	$\{\neg(\varphi1 \leftrightarrow \varphi2)\}$
$\{\beta1\}$ $\{\beta2\}$	$\{\varphi1\}$ $\{\varphi2\}$	$\{\neg\varphi1\}$ $\{\neg\varphi2\}$	$\{\neg\varphi1\}$ $\{\varphi2\}$	$\{\neg(\varphi1 \rightarrow \varphi2)\}$ $\{\neg(\varphi2 \rightarrow \varphi1)\}$

Toutes les β-règles sont synonymes à des disjonctions

Preuve de la satisfaisabilité d'une formule
(méthode des tableaux sémantiques)

Exemple5:

$\{\varphi 1 \leftrightarrow \varphi 2\}$
$\downarrow$
$\{\varphi 1 \rightarrow \varphi 2, \varphi 2 \rightarrow \varphi 1\}$

$\{\varphi 1 \rightarrow \varphi 2\}$
$\{\neg \varphi 1\}$ $\{\varphi 2\}$

$\{ A \leftrightarrow B \}$
$\downarrow$
$\{ A \rightarrow B , B \rightarrow A \}$

$\{ \neg A , B \rightarrow A \}$ | $\{B , B \rightarrow A \}$

$\{ \neg A , \neg B\}$ | $\{ \neg \underline{A} , \underline{A} \}$ | $\{\underline{B} , \underline{\neg B}\}$ | $\{B , A \}$

V(A)=0 V(B)=0

V(A)=1 V(B)=1

Preuve de la satisfaisabilité d'une formule
(méthode des tableaux sémantiques)

Algorithme

L'algorithme construit à partir d'une formule φ un arbre noté T dont les nœuds sont des ensembles de formules.

1-Initialisation :
Au départ, l'arbre ne contient qu'un seul nœud : l'ensemble {φ} ;

2-Tant qu'il existe une feuille F de l'arbre qui contient une formule ψ qui est simplifiable (non littéral) faire:

- **Si ψ est simplifiable par une α-règle, alors on créer un fils F0 à F où F0 est obtenu supprimant ψ de F et en ajoutant la formule (dans le cas d'une double négation) ou les deux formules (pour les autres cas) obtenues par la simplification.**
- **Si ψ est simplifiable par une β-règle, alors on créer deux fils F1 et F2, chacun étant obtenu en supprimant ψ de F et en ajoutant respectivement les formules obtenues par la simplification.**

3-Si toutes les feuilles contiennent une paire de littéraux complémentaires
alors φ non-satisfaite,
sinon φ satisfaite.

Preuve de la satisfaisabilité d'une formule
(méthode des tableaux sémantiques)

Remarques:

La méthode des tableaux sémantiques permet de:

- Prouver si une formule est satisfaite ou non

- Déterminer un ou tous les modèles d’une formule

Plan

1- Introduction

2- Preuve de la satisfaisabilité d'une formule (méthode des tableaux sémantiques)

3- Preuve de la validité d'une formule

4- Preuve de compatibilité d'un ensemble de formules

5- Preuve de conséquence logique

Plan

1- Introduction

2- Preuve de la satisfaisabilité d'une formule
(méthode des tableaux sémantiques)

3- Preuve de la validité d'une formule

4- Preuve de compatibilité d'un ensemble de formules

5- Preuve de conséquence logique

21

Preuve de la validité d'une formule

Théorème φ valide $\Leftrightarrow \rceil \varphi$ est non satisfaite

Démonstration

$$\varphi \text{ valide} \Leftrightarrow \forall v \ [\varphi]_v=1$$
$$\Leftrightarrow \forall v \ [\rceil \varphi]_v=0$$
$$\Leftrightarrow \rceil \varphi \text{ est non satisfaite}$$

Prouver que φ est valide

revient à prouver que

$\rceil \varphi$ est non satisfaite (alg précédent)

22

Preuve de la validité d'une formule

φ **Valide ?**

1. $\varphi' := \neg\varphi$
2. Algorithme des tableaux sémantiques précédent pour φ'
3. <u>Si</u> φ' non satisfaite <u>Alors</u> φ valide
   <u>Sinon</u> φ non valide

Preuve de la validité d'une formule

<u>Exemple:</u> $\varphi = A \vee \neg A$ Valide?

$\varphi' = \neg(A \vee \neg A)$

$$\{\neg(A \vee \neg A)\}$$
$$\downarrow$$
$$\{\neg A, \neg(\neg A)\}$$
$$\downarrow$$
$$\{\neg \underline{A}, \underline{A}\}$$

φ' non satisfaite

$\Rightarrow$ $\varphi = A \vee \neg A$ valide

Preuve de la validité d'une formule

Exemple: $\varphi = A \wedge \neg B$ Valide?

$\varphi' = \neg(A \wedge \neg B)$

$\{ \neg(A \wedge \neg B) \}$

$\{ \neg A \}$ $\quad\quad$ $\{ \neg\neg B \}$

$\quad\quad\quad\quad$ $\{ B \}$

φ' Satisfaite (pour A=0)

$\Rightarrow$ φ Non valide

Plan

1- Introduction

2- Preuve de la satisfaisabilité d'une formule
(méthode des tableaux sémantiques)

3- Preuve de la validité d'une formule

4- Preuve de compatibilité d'un ensemble de formules

5- Preuve de conséquence logique

Plan

27

Preuve de compatibilité d'un ensemble de formules

Théorème

$$\left(\begin{array}{l} \Sigma=\{\varphi 1,..\varphi n\} \\ \text{est compatible} \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} \varphi 1 \wedge .. \wedge \varphi n \\ \text{est satisfaite} \end{array} \right)$$

Démonstration

$\Sigma=\{\varphi 1,..\varphi n\}$ est compatible $\Leftrightarrow \exists v\ [\varphi 1]_v=[\varphi 2]_v=\ldots[\varphi n]_v=1$

$\Leftrightarrow \exists v\ [\varphi 1 \wedge .. \wedge \varphi n\ ]_v=1$

$\Leftrightarrow \varphi 1 \wedge .. \wedge \varphi n$ est satisfaite

Prouver que $\Sigma=\{\varphi 1,..\varphi n\}$ est compatible

revient à prouver que

la FP $\varphi = \varphi 1 \wedge .. \wedge \varphi_n$ est satisfaite

28

Preuve de compatibilité d'un ensemble de formules

$\Sigma=\{\varphi 1,..\varphi n\}$ est compatible ?

1. **$\varphi' := \varphi 1 \wedge \varphi 2 \wedge \ldots \wedge \varphi n$**
2. **Algorithme des tableaux sémantiques précédent à φ'**
3. **<u>Si</u> φ' satisfaite <u>Alors</u> Σ est compatible**

   <u>Sinon</u> Σ est incompatible

Plan

1- Introduction

2- Preuve de la satisfaisabilité d'une formule

3- Preuve de la validité d'une formule

4- Preuve de compatibilité d'un ensemble de formules

5- Preuve de conséquence logique

Plan

1- Introduction

2- Preuve de la satisfaisabilité d'une formule

3- Preuve de la validité d'une formule

4- Preuve de compatibilité d'un ensemble de formules

5- Preuve de conséquence logique

- méthode des tableaux sémantiques
- méthode de Déduction Naturelle

31

Plan

1- Introduction

2- Preuve de la satisfaisabilité d'une formule

3- Preuve de la validité d'une formule

4- Preuve de compatibilité d'un ensemble de formules

5- Preuve de conséquence logique

- méthode des tableaux sémantiques
- méthode de Déduction Naturelle

32

Preuve de conséquence logique
(méthode des tableaux sémantiques)

Théorème

$(\varphi 1 ,\dots , \varphi n \vdash \varphi) \Leftrightarrow (\varphi 1 \wedge \dots \wedge \varphi n \rightarrow \varphi$ **tautologie** $)$

Démonstration ***(Voir TD)***

Prouver que $\varphi 1 ,\dots , \varphi n \vdash \varphi$

revient à prouver que

la FP $\varphi 1 \wedge \dots \wedge \varphi n \rightarrow \varphi$ **est valide**

Plan

1- Introduction

2- Preuve de la satisfaisabilité d'une formule

3- Preuve de la validité d'une formule

4- Preuve de compatibilité d'un ensemble de formules

5- Preuve de conséquence logique
- **méthode des tableaux sémantiques**
- **méthode de Déduction Naturelle**