Chapitre-3

Logique Propositionnelle

- Système de Preuve -

1

Plan

1- Introduction

2- Preuve de la satisfaisabilité d'une formule

3- Preuve de la validité d'une formule

4- Preuve de compatibilité d'un ensemble de formules

5- Preuve de conséquence logique

2

Plan

1- Introduction

2- Preuve de la satisfaisabilité d'une formule

3- Preuve de la validité d'une formule

4- Preuve de compatibilité d'un ensemble de formules

5- Preuve de conséquence logique

Introduction

❑ Pour ***prouver*** qu'une formule est (non) satisfaite, qu'une formule est (non) valide, qu'un ensemble est (non) compatible,…..etc., on dispose seulement (pour le moment) de :

La table de vérité

❑ Bien qu'il soit possible d'énumérer toutes les valuations pour établir une tables de vérité, la méthode est coûteuse en espace et en temps:

- n variables dans les formules $\Rightarrow 2^n$ lignes
- formules complexes $\Rightarrow$ un grand nombre de colonnes

Introduction

❑ Une **preuve courte est préférable** à une longue liste de valuations comme explication de:

validité, satisfisabilité, compatibilité …. de formules

Le problème ? comment prouver

- la **satisfisabilité** ou non d'une formule
- la **validité** ou non d'une formule
- la **compatibilité** ou non d'un ensemble de formules
- une formule est **conséquence** d'un ensemble de formules

} sans utiliser la table de vérité

L'objectif du chapitre

Présenter quelques **méthodes de preuve** en logique propositionnelle.

Plan

1- Introduction

2- Preuve de la satisfaisabilité d'une formule

3- Preuve de la validité d'une formule

4- Preuve de compatibilité d'un ensemble de formules

5- Preuve de conséquence logique

Plan

1- Introduction

2- Preuve de la satisfaisabilité d'une formule
(méthode des tableaux sémantiques)

3- Preuve de la validité d'une formule

4- Preuve de compatibilité d'un ensemble de formules

5- Preuve de conséquence logique

Preuve de la satisfaisabilité d'une formule (méthode des tableaux sémantiques)

Principe:

Pour prouver qu'une FP φ est satisfaite on cherche systématiquement un modèle

On suppose que φ est Vrai est on cherche un modèle V

Preuve de la satisfaisabilité d'une formule (méthode des tableaux sémantiques)

Exemple1:

$$\{ A \wedge (\neg B \vee \neg A) \}$$

$$\{ A , \neg B \vee \neg A \}$$

$$\{ A , \neg B \} \qquad \{ \underline{A}, \neg \underline{A} \}$$

$\boxed{V(A)=1 \text{ et } V(B)=0}$

Donc $A \wedge (\neg B \vee \neg A)$ satisfaite

9

Preuve de la satisfaisabilité d'une formule (méthode des tableaux sémantiques)

Le problème de preuve de satisfaisabilité de φ a été réduit à un problème de satisfaisabilité d'un ensemble de littéraux.

Un ensemble de littéraux est satisfaisable ssi il ne contient pas il ne contient pas deux littéraux complémentaire

(ex:$\{ A, \neg A\}$)

10

Preuve de la satisfaisabilité d'une formule (méthode des tableaux sémantiques)

Exemple2: $\varphi = (A \vee B) \wedge (\neg B \wedge \neg A)$

$$\{ \ (A \vee B) \wedge (\neg B \wedge \neg A) \ \}$$

$$\downarrow$$

$$\{ \ A \vee B, \ \neg B \wedge \neg A \ \}$$

$$\downarrow$$

$$\{ \ A \vee B, \ \neg B, \ \neg A \ \}$$

$$\swarrow \qquad \searrow$$

$$\{ \ \underline{A}, \ \neg B, \ \neg \underline{A} \ \} \qquad \{ \ \underline{B}, \ \neg \underline{B}, \ \neg A \ \}$$

Donc $\varphi = (A \vee B) \wedge (\neg B \wedge \neg A)$ non satisfaite

Preuve de la satisfaisabilité d'une formule (méthode des tableaux sémantiques)

Exemple3: $\varphi = A \vee (B \wedge C)$

$$\{ \ A \vee (B \wedge C) \ \}$$

$$\swarrow \qquad \searrow$$

$$\{ \ A \ \} \qquad \{ \ B \wedge C \ \}$$

$$\downarrow$$

$$\{ \ B, C \ \}$$

1. V(A)=1 V(B)= 0 V(C)=0
2. V(A)=1 V(B)= 0 V(C)=1
3. V(A)=1 V(B)= 1 V(C)=0
4. V(A)=1 V(B)= 1 V(C)=1

1. V(A)=0 V(B)=1 V(C)=1
2. V(A)=1 V(B)=1 V(C)=1

Preuve de la satisfaisabilité d'une formule (méthode des tableaux sémantiques)

Exemple4: $\varphi = (A \wedge B) \rightarrow C$

$\{ (A \wedge B) \rightarrow C \}$

$\{ \neg(A \wedge B) \}$

$\{ C \}$

1. V(A)=0 V(B)=0 V(C)=1
2. V(A)=0 V(B)=1 V(C)=1
3. V(A)=1 V(B)=0 V(C)=1
4. V(A)=1 V(B)=1 V(C)=1

$\{ \neg A \}$

$\{ \neg B \}$

1. V(A)=0 V(B)=0 V(C)=0
2. V(A)=0 V(B)=0 V(C)=1
3. V(A)=0 V(B)=1 V(C)=0
4. V(A)=0 V(B)=1 V(C)=1

1. V(A)=0 V(B)=0 V(C)=0
2. V(A)=0 V(B)=0 V(C)=1
3. V(A)=1 V(B)=0 V(C)=0
4. V(A)=1 V(B)=0 V(C)=1

Preuve de la satisfaisabilité d'une formule (méthode des tableaux sémantiques)

Remarque:

quand on sélectionne une conjonction on a une <u>seule</u> branche

➔ on appelle ce type de règles les α-règles

quand on sélectionne une disjonction on a <u>deux</u> branches

➔ on appelle ce type de règles les β-règles

Preuve de la satisfaisabilité d'une formule
(méthode des tableaux sémantiques)

Les α-règles

$\{FP\}$	$\{\neg\neg\varphi\}$	$\{\varphi1 \wedge \varphi2\}$	$\{\neg(\varphi1 \vee \varphi2)\}$	$\{\neg(\varphi1 \rightarrow \varphi2\}$	$\{\varphi1 \leftrightarrow \varphi2\}$
$\{\alpha1\}$ $\{\alpha1, \alpha2\}$	$\{\varphi\}$	$\{\varphi1, \varphi2\}$	$\{\neg\varphi1, \neg\varphi2\}$	$\{\varphi1, \neg\varphi2\}$	$\{\varphi1 \rightarrow \varphi2,$ $\varphi2 \rightarrow \varphi1\}$

Toutes les α-règles sont synonymes à des conjonctions

15

Preuve de la satisfaisabilité d'une formule
(méthode des tableaux sémantiques)

Les β-règles

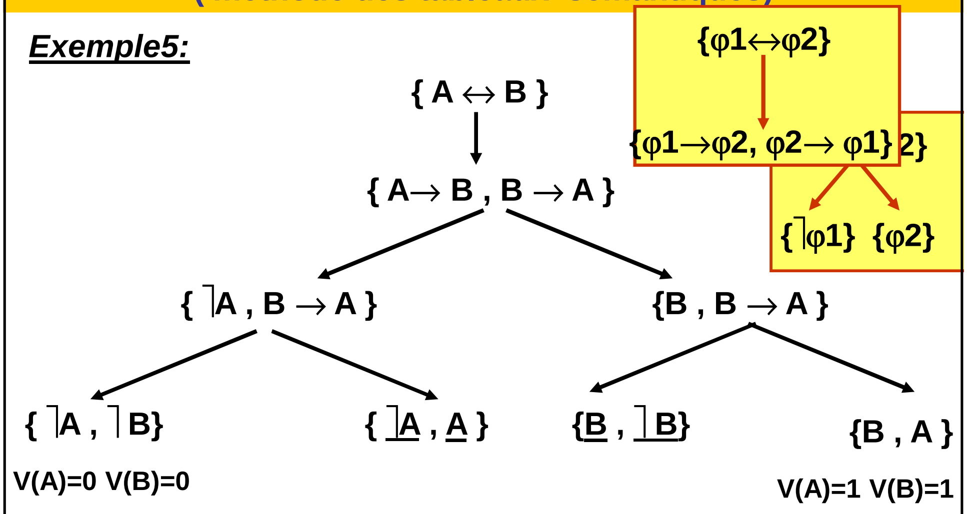
$\{FP\}$	$\{\varphi1 \vee \varphi2\}$	$\{\neg(\varphi1 \wedge \varphi2)\}$	$\{\varphi1 \rightarrow \varphi2\}$	$\{\neg(\varphi1 \leftrightarrow \varphi2)\}$
$\{\beta1\}$ $\{\beta2\}$	$\{\varphi1\}$ $\{\varphi2\}$	$\{\neg\varphi1\}$ $\{\neg\varphi2\}$	$\{\neg\varphi1\}$ $\{\varphi2\}$	$\{\neg(\varphi1 \rightarrow \varphi2)\}$ $\{\neg(\varphi2 \rightarrow \varphi1)\}$

Toutes les β-règles sont synonymes à des disjonctions

16

Preuve de la satisfaisabilité d'une formule
(méthode des tableaux sémantiques)

Exemple5:



Preuve de la satisfaisabilité d'une formule
(méthode des tableaux sémantiques)

Remarques:

La méthode des tableaux sémantiques permet de:

- Prouver si une formule est satisfaite ou non

- Déterminer un ou tous les modèles d'une formule

Plan

1- Introduction

2- Preuve de la satisfaisabilité d'une formule
(méthode des tableaux sémantiques)

3- Preuve de la validité d'une formule

4- Preuve de compatibilité d'un ensemble de formules

5- Preuve de conséquence logique

Plan

1- Introduction

2- Preuve de la satisfaisabilité d'une formule
(méthode des tableaux sémantiques)

3- Preuve de la validité d'une formule

4- Preuve de compatibilité d'un ensemble de formules

5- Preuve de conséquence logique

Preuve de la validité d'une formule

Théorème $\boxed{\varphi \text{ valide} \Leftrightarrow \neg\varphi \text{ est non satisfaite}}$

Démonstration

$$\begin{aligned} \varphi \text{ valide} &\Leftrightarrow \forall v \ [\varphi]_v=1 \\ &\Leftrightarrow \forall v \ [\neg\varphi]_v=0 \\ &\Leftrightarrow \neg\varphi \text{ est non satisfaite} \end{aligned}$$

Prouver que φ est valide

revient à prouver que

¬φ est non satisfaite (alg précédent)

21

Preuve de la validité d'une formule

φ Valide ?

1. φ' := ¬φ

2. Algorithme des tableaux sémantiques précédent pour φ'

3. <u>Si</u> φ' non satisfaite <u>Alors</u> φ valide

<u>Sinon</u> φ non valide

22

Preuve de la validité d'une formule

Exemple: $\varphi = A \vee \neg A$ Valide?

$\varphi' = \neg(A \vee \neg A)$

$\{ \neg(A \vee \neg A) \}$

$\downarrow$

$\{ \neg A, \neg(\neg A) \}$

$\downarrow$

$\{ \underline{\neg A}, \underline{A} \}$

φ' non satisfaite

$\Rightarrow$ $\varphi = A \vee \neg A$ valide

23

Preuve de la validité d'une formule

Exemple: $\varphi = A \wedge \neg B$ Valide?

$\varphi' = \neg(A \wedge \neg B)$

$\{ \neg(A \wedge \neg B) \}$

$\swarrow \quad \searrow$

$\{ \neg A \}$ $\qquad$ $\{ \neg\neg B \}$

$\downarrow$

$\{ B \}$

φ' Satisfaite (pour A=0)

$\Rightarrow$ φ Non valide

24

Plan

1- Introduction

2- Preuve de la satisfaisabilité d'une formule
(méthode des tableaux sémantiques)

3- Preuve de la validité d'une formule

4- Preuve de compatibilité d'un ensemble de formules

5- Preuve de conséquence logique

Plan

1- Introduction

2- Preuve de la satisfaisabilité d'une formule
(méthode des tableaux sémantiques)

3- Preuve de la validité d'une formule

4- Preuve de compatibilité d'un ensemble de formules

5- Preuve de conséquence logique

Preuve de compatibilité d'un ensemble de formules

Théorème

$\left(\begin{array}{l}\Sigma=\{\varphi 1,..\varphi n\} \\ \text{est compatible}\end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l}\varphi 1\wedge..\wedge\varphi n \\ \text{est satisfaite}\end{array}\right)$

Démonstration

$\Sigma=\{\varphi 1,..\varphi n\}$ **est compatible** $\Leftrightarrow \exists v\ [\varphi 1]_v=[\varphi 2]_v=\ldots[\varphi n]_v=1$

$\Leftrightarrow \exists v\ [\varphi 1 \wedge..\wedge\varphi n\ ]_v=1$

$\Leftrightarrow \varphi 1\wedge..\wedge\varphi n$ **est satisfaite**

Prouver que $\Sigma=\{\varphi 1,..\varphi n\}$ est compatible

revient à prouver que

la FP $\varphi = \varphi 1\wedge..\wedge\varphi_n$ est satisfaite

Preuve de compatibilité d'un ensemble de formules

$\Sigma=\{\varphi 1,..\varphi n\}$ **est compatible ?**

1. $\varphi' := \varphi 1\wedge\varphi 2\wedge\ldots\wedge\varphi n$
2. **Algorithme des tableaux sémantiques précédent φ'**
3. **<u>Si</u> φ' satisfaite <u>Alors</u> Σ est compatible**

   <u>Sinon</u> Σ est incompatible

Plan

1- Introduction

2- Preuve de la satisfaisabilité d'une formule

3- Preuve de la validité d'une formule

4- Preuve de compatibilité d'un ensemble de formules

5- Preuve de conséquence logique

29

Plan

1- Introduction

2- Preuve de la satisfaisabilité d'une formule

3- Preuve de la validité d'une formule

4- Preuve de compatibilité d'un ensemble de formules

5- Preuve de conséquence logique

- méthode des tableaux sémantiques
- méthode de Déduction Naturelle

30

Plan

1- Introduction

2- Preuve de la satisfaisabilité d'une formule

3- Preuve de la validité d'une formule

4- Preuve de compatibilité d'un ensemble de formules

5- Preuve de conséquence logique
- méthode des tableaux sémantiques
- méthode de Déduction Naturelle

31

Preuve de conséquence logique (méthode des tableaux sémantiques)

Théorème

$$(\varphi 1 ,\dots , \varphi n \vdash \varphi) \Leftrightarrow (\varphi 1 \wedge \dots \wedge \varphi n \rightarrow \varphi \text{ tautologie})$$

<u>*Démonstration*</u> ***(Voir TD)***

Prouver que $\varphi 1 ,\dots , \varphi n \vdash \varphi$

revient à prouver que

la FP $\varphi 1 \wedge \dots \wedge \varphi n \rightarrow \varphi$ est valide

32

Plan

1- Introduction

2- Preuve de la satisfaisabilité d'une formule

3- Preuve de la validité d'une formule

4- Preuve de compatibilité d'un ensemble de formules

5- Preuve de conséquence logique

- méthode des tableaux sémantiques
- méthode de Déduction Naturelle

33

Plan

1- Introduction

2- Preuve de la satisfaisabilité d'une formule

3- Preuve de la validité d'une formule

4- Preuve de compatibilité d'un ensemble de formules

5- Preuve de conséquence logique

- méthode des tableaux sémantiques
- méthode de Déduction Naturelle

34

Preuve de conséquence logique (méthode de déduction naturelle)

- La méthode de ***déduction naturelle*** formalise bien la méthode de démonstration en mathématique.

- Quand on fait des preuves en math , on utilise :
  - des axiomes
  - des règles qui permettent pas à pas, de déduire des conséquences à partir de prémisses.

35

Preuve de conséquence logique (méthode de déduction naturelle)

Exemple

Problème réel

1- S'il fait froid alors il neige et Ali est malade

2- Il fait froid

3- Si Ali est malade alors il ne travaille pas

Démontrer que: « Ali ne travaille pas et il neige »

Formulation

Problème logique

$\varphi 1 = F \rightarrow N \wedge M$

$\varphi 2 = F$

$\varphi 3 = M \rightarrow \neg T$

$\varphi = \neg T \wedge N$

Démontrer que : $\varphi 1\ \varphi 2\ \varphi 3 \vdash \varphi$

F: « Il fait froid »
N: « il neige »
M: « Ali est malade »
T: « Ali travaille »

Preuve de conséquence logique
(méthode de déduction naturelle)

$\varphi 1 = F \rightarrow N \wedge M$

$\varphi 2 = F$

$\varphi 3 = M \rightarrow \neg T$

$\varphi = \neg T \wedge N$

$\varphi 1\ \varphi 2\ \varphi 3 \vdash \varphi$?

Démonstration

1- $F \rightarrow N \wedge M$ ---------> axiome
2- F ---------> axiome
3- $N \wedge M$ ---------> 1 , 2
4- M ---------> 3
5- $M \rightarrow \neg T$ ---------> axiome
6- $\neg T$ ---------> 5 , 4
7- N ---------> 3
8- $\neg T \wedge N$ ---------> 6 , 7

37

Plan

1- Introduction

2- Preuve de la satisfaisabilité d'une formule

3- Preuve de la validité d'une formule

4- Preuve de compatibilité d'un ensemble de formules

5- Preuve de conséquence logique
- méthode des tableaux sémantiques
- méthode de Déduction Naturelle
  * définition

38

Preuve de conséquence logique
(méthode de déduction naturelle)

Définition:

Soit le séquent S = $\varphi 1\ \varphi 2 \ldots \varphi n \mid\!\!\text{—}\ \varphi$

Une preuve par déduction du séquent S est une suite finie (non vide) de séquents S1,S2,….S_m telle que:

- **S_m = S = $\varphi 1\ \varphi 2 \ldots \varphi n \mid\!\!\text{—}\ \varphi$**
- **$\forall 1 \leq i \leq m$ on est dans l'un des cas :**
  - **S_i est un axiome**
  - **S_i est obtenu par application d'une des règle d'inférence sur des séquents de la suite S1,S2,..Si-1**

Preuve de conséquence logique
(méthode de déduction naturelle)

Démonstration par déduction

1- $F \rightarrow N \wedge M$ --------→ axiome
2- F ------------→ axiome
3- $N \wedge M$ ------------→ 1 , 2
4- M ------------→ 3
5- $M \rightarrow \rceil T$ ------------→ axiome
6- $\rceil T$ ------------→ 5 , 4
7- N ------------→ 3
8- $\rceil T \wedge N$ ------------→ 6 , 7

Preuve de conséquence logique (méthode de déduction naturelle)

Démonstration par déduction

1- $\varphi 1\ \varphi 2\ \varphi 3$	$\vdash$	$F \rightarrow N \wedge M$	$\dashrightarrow$ axiome
2- $\varphi 1\ \varphi 2\ \varphi 3$	$\vdash$	F	$\dashrightarrow$ axiome
3- $\varphi 1\ \varphi 2\ \varphi 3$	$\vdash$	$N \wedge M$	$\dashrightarrow$ 1 , 2
4- $\varphi 1\ \varphi 2\ \varphi 3$	$\vdash$	M	$\dashrightarrow$ 3
5- $\varphi 1\ \varphi 2\ \varphi 3$	$\vdash$	$M \rightarrow \neg T$	$\dashrightarrow$ axiome
6- $\varphi 1\ \varphi 2\ \varphi 3$	$\vdash$	$\neg T$	$\dashrightarrow$ 5 , 4
7- $\varphi 1\ \varphi 2\ \varphi 3$	$\vdash$	N	$\dashrightarrow$ 3
8- $\varphi 1\ \varphi 2\ \varphi 3$	$\vdash$	$\neg T \wedge N$	$\dashrightarrow$ 6 , 7

Plan

1- Introduction

2- Preuve de la satisfaisabilité d'une formule

3- Preuve de la validité d'une formule

4- Preuve de compatibilité d'un ensemble de formules

5- Preuve de conséquence logique
- méthode des tableaux sémantiques
- méthode de Déduction Naturelle
  - * définition
  - * Axiomes

Preuve de conséquence logique
(méthode de déduction naturelle)

Les axiomes

$\varphi 1\ \varphi 2 \ldots \varphi n \vdash \varphi i \qquad 1 \leq i \leq n$ (axiome)

Ceci signifie que lorsqu'une formule φi figure dans une liste des prémisses (hypothèses), la preuve de φi est immédiate.

43

Preuve de conséquence logique
(méthode de déduction naturelle)

Exemple

$A \vee B,\ B,\ C \wedge A \vdash A \vee B \qquad$ (axiome)

$F \rightarrow N \wedge M \quad F \quad M \rightarrow \urcorner T \vdash F \rightarrow N \wedge M \qquad$ axiome

44

Plan

1- Introduction

2- Preuve de la satisfaisabilité d'une formule

3- Preuve de la validité d'une formule

4- Preuve de compatibilité d'un ensemble de formules

5- Preuve de conséquence logique
- méthode des tableaux sémantiques
- méthode de Déduction Naturelle
  * définition
  * Axiomes
  * Règles d'inférence

Preuve de conséquence logique (méthode de déduction naturelle)

Les règles d'inférence

Une règle d'inférence définit une transition valide dans le déroulement d'une preuve .

La représentation d'une règle d'inférence est de la forme

$$\frac{S1\ S2\ \ldots Sk}{S}$$

Preuve de conséquence logique
(méthode de déduction naturelle)

$$\frac{S1\ S2\ \ldots Sk}{S}$$

S, S1 S2 …Sk sont des séquents

S1 S2 …Sk sont appelés *antécédents*

S est appelé *conséquent*

Exemple:

$$\frac{\varphi 1\ \varphi 2\ \varphi 3 \vdash \varphi \qquad \varphi 1\ \varphi 2\ \varphi 3 \vdash \varphi'}{\varphi 1\ \varphi 2\ \varphi 3 \vdash \varphi \wedge \varphi'}$$

Preuve de conséquence logique
(méthode de déduction naturelle)

Démonstration par déduction

$$\frac{\Sigma \vdash \varphi 1 \rightarrow \varphi 2 \quad \Sigma \vdash \varphi 1}{\Sigma \vdash \varphi 2}$$ **Modus Ponens**

1- $\varphi 1\ \varphi 2\ \varphi 3 \vdash F \rightarrow N \wedge M$ - - - - → axiome

2- $\varphi 1\ \varphi 2\ \varphi 3 \vdash F$ - - - - → axiome

3- $\varphi 1\ \varphi 2\ \varphi 3 \vdash N \wedge M$ - - - - → MP 1,2

4- $\varphi 1\ \varphi 2\ \varphi 3 \vdash M$ - - - - → 3

5- $\varphi 1\ \varphi 2\ \varphi 3 \vdash M \rightarrow \neg T$ - - - - → axiome

6- $\varphi 1\ \varphi 2\ \varphi 3 \vdash \neg T$ - - - - → 5 , 4

7- $\varphi 1\ \varphi 2\ \varphi 3 \vdash N$ - - - - → 3

8- $\varphi 1\ \varphi 2\ \varphi 3 \vdash \neg T \wedge N$ - - - - → 6 , 7

Preuve de conséquence logique (méthode de déduction naturelle)

Démonstration par déduction

$$\frac{\Sigma \vdash \varphi 1 \wedge \varphi 2}{\Sigma \vdash \varphi 2} \wedge e2$$

1- φ1 φ2 φ3 |— F →N ∧ M --------→ axiome
2- φ1 φ2 φ3 |— F --------→ axiome
3- φ1 φ2 φ3 |— N ∧ M --------→ MP 1,2
4- φ1 φ2 φ3 |— M --------→ ∧e2 sur 3
5- φ1 φ2 φ3 |— M→⌉T --------→ axiome
6- φ1 φ2 φ3 |— ⌉T --------→ 5 , 4
7- φ1 φ2 φ3 |— N --------→ 3
8- φ1 φ2 φ3 |— ⌉T∧N --------→ 6 , 7

Preuve de conséquence logique (méthode de déduction naturelle)

Démonstration par déduction

$$\frac{\Sigma \vdash \varphi 1 \rightarrow \varphi 2 \quad \Sigma \vdash \varphi 1}{\Sigma \vdash \varphi 2} \text{ Modus Ponens}$$

1- φ1 φ2 φ3 |— F →N ∧ M --------→ axiome
2- φ1 φ2 φ3 |— F --------→ axiome
3- φ1 φ2 φ3 |— N ∧ M --------→ MP 1,2
4- φ1 φ2 φ3 |— M --------→ ∧e2 sur 3
5- φ1 φ2 φ3 |— M→⌉T --------→ axiome
6- φ1 φ2 φ3 |— ⌉T --------→ MP 5,4
7- φ1 φ2 φ3 |— N --------→ 3
8- φ1 φ2 φ3 |— ⌉T∧N --------→ 6 , 7

Preuve de conséquence logique
(méthode de déduction naturelle)

Démonstration par déduction

$$\frac{\Sigma \vdash \varphi 1 \wedge \varphi 2}{\Sigma \vdash \varphi 1} \wedge \mathbf{e1}$$

1- φ1 φ2 φ3 $\vdash$	F →N ∧ M	axiome
2- φ1 φ2 φ3 $\vdash$	F	axiome
3- φ1 φ2 φ3 $\vdash$	N ∧ M	MP 1,2
4- φ1 φ2 φ3 $\vdash$	M	∧e2 sur 3
5- φ1 φ2 φ3 $\vdash$	M→⌉T	axiome
6- φ1 φ2 φ3 $\vdash$	⌉T	MP 5,4
7- φ1 φ2 φ3 $\vdash$	N	∧e1 sur 3
8- φ1 φ2 φ3 $\vdash$	⌉T∧N	6 , 7

51

Preuve de conséquence logique
(méthode de déduction naturelle)

Démonstration par déduction

$$\frac{\Sigma \vdash \varphi 1 \quad \Sigma \vdash \varphi 2}{\Sigma \vdash \varphi 1 \wedge \varphi 2} \wedge \boldsymbol{i}$$

1- φ1 φ2 φ3 $\vdash$	F →N ∧ M	axiome
2- φ1 φ2 φ3 $\vdash$	F	axiome
3- φ1 φ2 φ3 $\vdash$	N ∧ M	MP 1,2
4- φ1 φ2 φ3 $\vdash$	M	∧e2 sur 3
5- φ1 φ2 φ3 $\vdash$	M→⌉T	axiome
6- φ1 φ2 φ3 $\vdash$	⌉T	MP 5,4
7- φ1 φ2 φ3 $\vdash$	N	∧e1 sur 3
8- φ1 φ2 φ3 $\vdash$	⌉T∧N	∧i sur 6,7

52

Preuve de conséquence logique
(méthode de déduction naturelle)

Les règles d'inférence de la méthode de déduction naturelles sont divisées en 2 catégories:

- **les règles *d'introduction***
- **les règles *d'élimination***

Preuve de conséquence logique
(méthode de déduction naturelle)

Règles d'inférence

$\dfrac{\Sigma, \varphi \vdash \varphi 1 \wedge \neg \varphi 1}{\Sigma \vdash \neg \varphi} \; \neg \mathbf{i}$	$\dfrac{\Sigma, \neg \varphi \vdash \varphi 1 \wedge \neg \varphi 1}{\Sigma \vdash \varphi} \; \neg e$
$\dfrac{\Sigma \vdash \varphi 1 \quad \Sigma \vdash \varphi 2}{\Sigma \vdash \varphi 1 \wedge \varphi 2} \; \wedge i$	$\dfrac{\Sigma \vdash \varphi 1 \wedge \varphi 2}{\Sigma \vdash \varphi 1} \; \wedge \mathbf{e1} \qquad \dfrac{\Sigma \vdash \varphi 1 \wedge \varphi 2}{\Sigma \vdash \varphi 2} \; \wedge \mathbf{e2}$
$\dfrac{\Sigma \vdash \varphi}{\Sigma \vdash \varphi 1 \vee \varphi} \; \vee i1 \qquad \dfrac{\Sigma \vdash \varphi}{\Sigma \vdash \varphi \vee \varphi 2} \; \vee i2$	$\dfrac{\Sigma \vdash \varphi 1 \vee \varphi 2 \quad \Sigma, \varphi 1 \vdash \varphi \quad \Sigma, \varphi 2 \vdash \varphi}{\Sigma \vdash \varphi} \; \vee e$
$\dfrac{\Sigma, \varphi \vdash \varphi 1}{\Sigma \vdash \varphi \rightarrow \varphi 1} \; \rightarrow i$	$\dfrac{\Sigma \vdash \varphi 1 \rightarrow \varphi 2 \quad \Sigma \vdash \varphi 1}{\Sigma \vdash \varphi 2}$ **Modus Ponens**

Preuve de conséquence logique
(méthode de déduction naturelle)

Les règles d'inférence de la déduction naturelle sont valides

Ces règles sont démontrées

Preuve de conséquence logique
(méthode de déduction naturelle)

Exemple de démonstration d'une règle d'inférence

la règle ∧e1 $\dfrac{\Sigma \vdash \varphi 1 \wedge \varphi 2}{\Sigma \vdash \varphi 1} \wedge e1$

$$\Sigma \vdash \varphi 1 \wedge \varphi 2 \Rightarrow \forall V\,(V \models \Sigma \rightarrow V \models \varphi 1 \wedge \varphi 2\,)$$
$$\Rightarrow \forall V\,(V \models \Sigma \rightarrow [\,\varphi 1 \wedge \varphi 2]_V = 1\,)$$
$$\Rightarrow \forall V\,(V \models \Sigma \rightarrow [\,\varphi 1]_V = 1 \wedge [\varphi 2]_V = 1\,)$$
$$\Rightarrow \forall V\,(V \models \Sigma \rightarrow [\,\varphi 1]_V = 1\,)$$
$$\Rightarrow \forall V\,(V \models \Sigma \rightarrow V \mid == \varphi 1\,)$$
$$\Rightarrow \Sigma \vdash \varphi 1$$

Preuve de conséquence logique (méthode de déduction naturelle)

Exemple Démonstration par déduction naturelle du séquent

$A \wedge B \vdash B \wedge A$

1. $A \wedge B \vdash A \wedge B$	axiome
2- $A \wedge B \vdash A$	$\wedge$e1 sur 1
3- $A \wedge B \vdash B$	$\wedge$e2 sur 1
4- $A \wedge B \vdash B \wedge A$	$\wedge$i sur (3,2)

Preuve de conséquence logique (méthode de déduction naturelle)

Exemple Démonstration par déduction naturelle du séquent

$(A \wedge B) \wedge C \vdash A \wedge (B \wedge C)$

1. $(A \wedge B) \wedge C \vdash (A \wedge B) \wedge C$	axiome
2- $(A \wedge B) \wedge C \vdash C$	$\wedge$e2 sur 1
3- $(A \wedge B) \wedge C \vdash A \wedge B$	$\wedge$e1 sur 1
4- $(A \wedge B) \wedge C \vdash A$	$\wedge$e1 sur 3
5- $(A \wedge B) \wedge C \vdash B$	$\wedge$e2 sur 3
6- $(A \wedge B) \wedge C \vdash B \wedge C$	$\wedge$i sur (5,2)
7- $(A \wedge B) \wedge C \vdash A \wedge (B \wedge C)$	$\wedge$i sur (4,6)

Preuve de conséquence logique
(méthode de déduction naturelle)

Exemple

Démonstration par déduction naturelle du séquent

$A \wedge B$, C |— $B \wedge C$

1. $A \wedge B$,C |— $A \wedge B$	**axiome**
2- $A \wedge B$, C |— B	**$\wedge$e2 sur 1**
3- $A \wedge B$, C |— C	**axiome**
4- $A \wedge B$, C |— $B \wedge C$	**$\wedge$i sur (2,3)**

59

Preuve de conséquence logique
(méthode de déduction naturelle)

Exemple

Démonstration par déduction naturelle du séquent

$A \wedge \neg A$ |— $B \wedge \neg B$

1. $A \wedge \neg A$, B |— $A \wedge \neg A$	**axiome**
2. $A \wedge \neg A$ |— $\neg B$	**$\neg$i sur 1**
3. $A \wedge \neg A$, $\neg B$ |— $A \wedge \neg A$	**axiome**
4. $A \wedge \neg A$ |— B	**$\neg$e sur 3**
5. $A \wedge \neg A$ |— $B \wedge \neg B$	**$\wedge$i sur (4,2)**

60

Preuve de conséquence logique (méthode de déduction naturelle)

Exemple

Démonstration par déduction naturelle du séquent

$\vdash A \rightarrow (B \rightarrow A)$

1-	A, B	$\vdash A$	axiome
2-	A	$\vdash B \rightarrow A$	$\rightarrow$i sur 1
3-		$\vdash A \rightarrow (B \rightarrow A)$	$\rightarrow$i sur 3

61

Preuve de conséquence logique (méthode de déduction naturelle)

Exemple

Démonstration par déduction naturelle du séquent

$A, A \rightarrow B, A \rightarrow (B \rightarrow C) \vdash C$

1.	$A, A \rightarrow B, A \rightarrow (B \rightarrow C)$	$\vdash A \rightarrow (B \rightarrow C)$	axiome
2-	$A, A \rightarrow B, A \rightarrow (B \rightarrow C)$	$\vdash A$	axiome
3-	$A, A \rightarrow B, A \rightarrow (B \rightarrow C)$	$\vdash B \rightarrow C$	MP(1,2)
4-	$A, A \rightarrow B, A \rightarrow (B \rightarrow C)$	$\vdash A \rightarrow B$	axiome
5-	$A, A \rightarrow B, A \rightarrow (B \rightarrow C)$	$\vdash B$	MP(4,2)
6-	$A, A \rightarrow B, A \rightarrow (B \rightarrow C)$	$\vdash C$	MP (3, 5)

62

Preuve de conséquence logique
(méthode de déduction naturelle)

Exemple

Démonstration par déduction naturelle du séquent

Av B |— BvA

1. Av B |— AvB axiome

2- Av B, A |— A axiome

3- Av B, A |— BvA vi1 sur 2

4- Av B, B |— B axiome

5- Av B, B |— B v A vi2 sur 4

6- AvB |— BvA ve (1, 3, 5)

63

Plan

1- Introduction

2- Preuve de la satisfaisabilité d'une formule

3- Preuve de la validité d'une formule

4- Preuve de compatibilité d'un ensemble de formules

5- Preuve de conséquence logique
- **méthode des tableaux sémantiques**
- **méthode de Déduction Naturelle**
  - **définition**
  - **Axiomes**
  - **Règles d'inférence**
  - **Règles dérivées**

Preuve de conséquence logique
(méthode de déduction naturelle)

Règles dérivées:

L'objectif des règles dérivées et de rendre les preuves plus courtes en évitant certains détails

Chaque règle dérivée remplace une suite de séquents

Preuve de conséquence logique
(méthode de déduction naturelle)

supposons la démonstration de $\varphi \vdash \neg\neg\varphi \wedge \varphi$

1-	φ	$\vdash$	φ	axiome
2-	$\varphi, \neg\varphi$	$\vdash$	φ	axiome
3-	$\varphi, \neg\varphi$	$\vdash$	$\neg\varphi$	axiome
4-	$\varphi, \neg\varphi$	$\vdash$	$\varphi \wedge \neg\varphi$	$\wedge$i sur 2,3
5-	φ	$\vdash$	$\neg\neg\varphi$	$\neg$i sur 4
6-	φ	$\vdash$	$\neg\neg\varphi \wedge \varphi$	$\wedge$i sur (1,5)

Dans l'exemple ci-dessus on peut passer directement de la ligne1 à la ligne 5 en appliquant la règle dérivée de $\neg\neg$i.

1-	φ	$\vdash$	φ	axiome
2-	φ	$\vdash$	$\neg\neg\varphi$	$\neg\neg$i sur 1
3-	φ	$\vdash$	$\neg\neg\varphi \wedge \varphi$	$\wedge$i sur (1,2)

Preuve de conséquence logique (méthode de déduction naturelle)

Règle d'augmentation des prémisses $\dfrac{\Sigma \vdash \varphi}{\Sigma, \Sigma' \vdash \varphi}$ **AP**

Règle d'introduction de la double négation $\dfrac{\Sigma \vdash \varphi}{\Sigma \vdash \neg\neg\varphi}$ **$\neg\neg$ i**

Règle d'élimination de la double négation $\dfrac{\Sigma \vdash \neg\neg\varphi}{\Sigma \vdash \varphi}$ **$\neg\neg$ e**

Règle d'élimination de l'implication $\dfrac{\Sigma \vdash \varphi 1 \rightarrow \varphi 2}{\Sigma\ \varphi 1 \vdash \varphi 2}$ **$\rightarrow$e**

Règle de Modus Tollens $\dfrac{\Sigma \vdash \varphi 1 \rightarrow \varphi 2 \quad \Sigma \vdash \neg \varphi 2}{\Sigma \vdash \neg \varphi 1}$ **MT**

Règle du Tiers Exclus $\dfrac{}{\Sigma \vdash \varphi \vee \neg\varphi}$ **RTE**

67

(méthode de déduction naturelle)

Règle d'augmentation des prémisses

$$\boxed{\dfrac{\Sigma \vdash \varphi}{\Sigma, \Sigma' \vdash \varphi} \quad \textbf{AP}}$$

Exemple **démontrer $A \wedge B \vdash C \rightarrow A$**

1-	$A \wedge B$	$\vdash A \wedge B$	axiome
2-	$A \wedge B$	$\vdash A$	$\wedge$e1 sur 1
3-	$A \wedge B, C$	$\vdash A$	AP sur 2
4-	$A \wedge B$	$\vdash C \rightarrow A$	$\rightarrow$i sur 3

68

Preuve de conséquence logique (méthode de déduction naturelle)

Règle d'augmentation des prémisses	$\dfrac{\Sigma \vdash \varphi}{\Sigma, \Sigma' \vdash \varphi}$	AP
Règle d'introduction de la double négation	$\dfrac{\Sigma \vdash \varphi}{\Sigma \vdash \neg\neg\varphi}$	$\neg\neg$ i
Règle d'élimination de la double négation	$\dfrac{\Sigma \vdash \neg\neg\varphi}{\Sigma \vdash \varphi}$	$\neg\neg$ e
Règle d'élimination de l'implication	$\dfrac{\Sigma \vdash \varphi 1 \rightarrow \varphi 2}{\Sigma\ \varphi 1 \vdash \varphi 2}$	$\rightarrow$e
Règle de Modus Tollens	$\dfrac{\Sigma \vdash \varphi 1 \rightarrow \varphi 2 \quad \Sigma \vdash \neg \varphi 2}{\Sigma \vdash \neg \varphi 1}$	MT
Règle du Tiers Exclus	$\dfrac{}{\Sigma \vdash \varphi \vee \neg\varphi}$	RTE

(méthode de déduction naturelle)

Règle d'introduction de la double négation

$$\boxed{\dfrac{\Sigma \vdash \varphi}{\Sigma \vdash \neg\neg \varphi} \quad \neg\neg\ \mathrm{i}}$$

Démonstration de la règle dérivée $\neg\neg$ i :

1-	$\Sigma\ \varphi, \neg\varphi$	$\vdash \varphi$	axiome
2-	$\Sigma\ \varphi, \neg\varphi$	$\vdash \neg\varphi$	axiome
3-	$\Sigma, \varphi, \neg\varphi$	$\vdash \varphi \wedge \neg\varphi$	$\wedge$i (1,2)
4-	Σ, φ	$\vdash \neg\neg\varphi$	$\neg$i sur 3
5-	Σ	$\vdash \varphi \rightarrow \neg\neg\varphi$	$\rightarrow$i sur 4
6-	Σ	$\vdash \varphi$	hypothèse
7-	Σ	$\vdash \neg\neg\varphi$	MP(5,6)

(méthode de déduction naturelle)

Règle d'introduction de la double négation

$$\frac{\Sigma \vdash \varphi}{\Sigma \vdash \neg\neg\varphi}\ \neg\neg i$$

Exemple **Démontrer** $\vdash A \rightarrow \neg\neg A$

1- $A \vdash A$ **axiome**

2- $A \vdash \neg\neg A$ $\neg\neg$ **i sur 1**

3- $\vdash A \rightarrow \neg\neg A$ $\rightarrow$**i sur2**

Preuve de conséquence logique
(méthode de déduction naturelle)

Règle d'augmentation des prémisses $\dfrac{\Sigma \vdash \varphi}{\Sigma,\ \Sigma' \vdash \varphi}$ **AP**

Règle d'introduction de la double négation $\dfrac{\Sigma \vdash \varphi}{\Sigma \vdash \neg\neg\varphi}$ $\neg\neg$ **i**

Règle d'élimination de la double négation $\dfrac{\Sigma \vdash \neg\neg\varphi}{\Sigma \vdash \varphi}$ $\neg\neg$ **e**

Règle d'élimination de l'implication $\dfrac{\Sigma \vdash \varphi 1 \rightarrow \varphi 2}{\Sigma\ \varphi 1 \vdash \varphi 2}$ $\rightarrow$**e**

Règle de Modus Tollens $\dfrac{\Sigma \vdash \varphi 1 \rightarrow \varphi 2 \quad \Sigma \vdash \neg\varphi 2}{\Sigma \vdash \neg\varphi 1}$ **MT**

Règle du Tiers Exclus $\dfrac{}{\Sigma \vdash \varphi \vee \neg\varphi}$ **RTE**

(méthode de déduction naturelle)

Règle d'élimination de la double négation

$$\frac{\Sigma \vdash \neg\neg\varphi}{\Sigma \vdash \varphi}\ \neg\neg e$$

Démonstration de la règle dérivée $\neg\neg$ **e** *:*

1- Σ	$\vdash \neg\neg\varphi$	**hypothèse**
2- $\Sigma, \neg\neg\varphi, \neg\varphi$	$\vdash \neg\neg\varphi$	**axiome**
3- $\Sigma, \neg\neg\varphi, \neg\varphi$	$\vdash \neg\varphi$	**axiome**
4- $\Sigma, \neg\neg\varphi, \neg\varphi$	$\vdash \neg\varphi \wedge \neg\neg\varphi$	$\wedge$**i (3,2)**
5- $\Sigma, \neg\neg\varphi$	$\vdash \varphi$	$\neg$**e sur 4**
6- Σ	$\vdash \neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$	$\rightarrow$**i sur 5**
7- Σ	$\vdash \varphi$	**MP (1,6)**

(méthode de déduction naturelle)

Règle d'élimination de la double négation

$$\frac{\Sigma \vdash \neg\neg\varphi}{\Sigma \vdash \varphi}\ \neg\neg e$$

Exemple **Démontrer** $\vdash \neg\neg A \rightarrow A$

1-	$\neg\neg A \vdash \neg\neg A$	**axiome**
2-	$\neg\neg A \vdash A$	$\neg\neg$ **e sur1**
3-	$\vdash \neg\neg A \rightarrow A$	$\rightarrow$**i sur2**

Preuve de conséquence logique (méthode de déduction naturelle)

Règle d'augmentation des prémisses $\dfrac{\Sigma \vdash \varphi}{\Sigma,\ \Sigma' \vdash \varphi}$ **AP**

Règle d'introduction de la double négation $\dfrac{\Sigma \vdash \varphi}{\Sigma \vdash \neg\neg\varphi}$ $\neg\neg$ **i**

Règle d'élimination de la double négation $\dfrac{\Sigma \vdash \neg\neg\varphi}{\Sigma \vdash \varphi}$ $\neg\neg$ **e**

Règle d'élimination de l'implication $\dfrac{\Sigma \vdash \varphi1 \to \varphi2}{\Sigma\ \varphi1 \vdash \varphi2}$ **$\to$e**

Règle de Modus Tollens $\dfrac{\Sigma \vdash \varphi1 \to \varphi2 \quad \Sigma \vdash \neg\varphi2}{\Sigma \vdash \neg\varphi1}$ **MT**

Règle du Tiers Exclus $\dfrac{}{\Sigma \vdash \varphi \vee \neg\varphi}$ **RTE**

75

(méthode de déduction naturelle)

Règle d'élimination de l'implication

$$\boxed{\dfrac{\Sigma \vdash \varphi1 \to \varphi2}{\Sigma\ \varphi1 \vdash \varphi2} \quad \to e}$$

Démonstration de la règle dérivée **$\to$e** *:*

1- Σ	$\vdash \varphi1 \to \varphi2$	**hypothèse**
2- $\Sigma, \varphi1$	$\vdash \varphi1$	**axiome**
3- $\Sigma, \varphi1$	$\vdash \varphi1 \to \varphi2$	**AP sur 1**
3- $\Sigma, \varphi1$	$\vdash \varphi2$	**MP sur 3 et 2**

76

(méthode de déduction naturelle)

Règle d'élimination de l'implication

$$\frac{\Sigma \mid\!\!-\ \varphi 1 \to \varphi 2}{\Sigma\ \varphi 1 \mid\!\!- \varphi 2} \to e$$

Exemple **Démontrer** $A \to (A \to \neg A),\ A \mid\!\!- \neg A$

1- $A \to (A \to \neg A) \mid\!\!- A \to (A \to \neg A)$ **axiome**

2- $A \to (A \to \neg A),\ A \mid\!\!- A \to \neg A$ $\to$**e sur 1**

3- $A \to (A \to \neg A),\ A \mid\!\!- \neg A$ $\to$**e sur2**

Preuve de conséquence logique
(méthode de déduction naturelle)

Règle d'augmentation des prémisses $\dfrac{\Sigma \mid\!\!-\ \varphi}{\Sigma,\ \Sigma' \mid\!\!-\ \varphi}$ **AP**

Règle d'introduction de la double négation $\dfrac{\Sigma \mid\!\!- \varphi}{\Sigma \mid\!\!- \neg\neg\varphi}$ $\neg\neg$ **i**

Règle d'élimination de la double négation $\dfrac{\Sigma \mid\!\!- \neg\neg\varphi}{\Sigma \mid\!\!- \varphi}$ $\neg\neg$ **e**

Règle d'élimination de l'implication $\dfrac{\Sigma \mid\!\!-\ \varphi 1 \to \varphi 2}{\Sigma\ \varphi 1 \mid\!\!- \varphi 2}$ $\to$**e**

Règle de Modus Tollens $\dfrac{\Sigma \mid\!\!- \varphi 1 \to \varphi 2 \quad \Sigma \mid\!\!- \neg \varphi 2}{\Sigma \mid\!\!- \neg \varphi 1}$ **MT**

Règle du Tiers Exclus $\dfrac{}{\Sigma \mid\!\!- \varphi \vee \neg\varphi}$ **RTE**

(méthode de déduction naturelle)

Règle de Modus Tollens

$$\frac{\Sigma \vdash \varphi1 \rightarrow \varphi2 \quad \Sigma \vdash \neg\varphi2}{\Sigma \vdash \neg\varphi1} \ \mathbf{MT}$$

Démonstration de la règle dérivée **MT** *:*

1- Σ	$\vdash$	$\varphi1 \rightarrow \varphi2$	hypothèse
2- Σ	$\vdash$	$\neg\varphi2$	hypothèse
3- $\Sigma, \varphi1$	$\vdash$	$\varphi1$	axiome
4- $\Sigma, \varphi1$	$\vdash$	$\varphi1 \rightarrow \varphi2$	AP (1)
5- $\Sigma, \varphi1$	$\vdash$	$\varphi2$	MP(4,3)
6- $\Sigma, \varphi1$	$\vdash$	$\neg\varphi2$	AP (2)
7- $\Sigma, \varphi1$	$\vdash$	$\varphi2 \wedge \neg\varphi2$	$\wedge$i(5,6)
8- Σ	$\vdash$	$\neg\varphi1$	$\neg$i sur (5)

79

(méthode de déduction naturelle)

Règle de Modus Tollens

$$\frac{\Sigma \vdash \varphi1 \rightarrow \varphi2 \quad \Sigma \vdash \neg\varphi2}{\Sigma \vdash \neg\varphi1} \ \mathbf{MT}$$

Exemple **Démontrer** $A \rightarrow B \vdash \neg B \rightarrow \neg A$

1- $A \rightarrow B, \neg B$	$\vdash$	$A \rightarrow B$	axiome
2- $A \rightarrow B, \neg B$	$\vdash$	$\neg B$	axiome
3- $A \rightarrow B, \neg B$	$\vdash$	$\neg A$	MT (1,2)
4- $A \rightarrow B$	$\vdash$	$\neg B \rightarrow \neg A$	$\rightarrow$i sur 3

80

Preuve de conséquence logique
(méthode de déduction naturelle)

Règle d'augmentation des prémisses $\dfrac{\Sigma \vdash \varphi}{\Sigma, \Sigma' \vdash \varphi}$ **AP**

Règle d'introduction de la double négation $\dfrac{\Sigma \vdash \varphi}{\Sigma \vdash \neg\neg\varphi}$ $\neg\neg$ **i**

Règle d'élimination de la double négation $\dfrac{\Sigma \vdash \neg\neg\varphi}{\Sigma \vdash \varphi}$ $\neg\neg$ **e**

Règle d'élimination de l'implication $\dfrac{\Sigma \vdash \varphi 1 \rightarrow \varphi 2}{\Sigma\ \varphi 1 \vdash \varphi 2}$ $\rightarrow$**e**

Règle de Modus Tollens $\dfrac{\Sigma \vdash \varphi 1 \rightarrow \varphi 2 \quad \Sigma \vdash \neg \varphi 2}{\Sigma \vdash \neg \varphi 1}$ **MT**

Règle du Tiers Exclus $\dfrac{}{\Sigma \vdash \varphi \vee \neg\varphi}$ **RTE**

81

(méthode de déduction naturelle)

Règle du Tiers Exclus

$\dfrac{}{\Sigma \vdash \varphi \vee \neg\varphi}$ **RTE**

Démonstration de la règle dérivée **RTE** *: (Voir TD)*

82

(méthode de déduction naturelle)

Règle du Tiers Exclus

$$\frac{}{\Sigma \vdash \varphi \vee \neg\varphi} \quad \text{RTE}$$

Exemple Démontrer $A \vee \neg A \rightarrow B \vdash (A \vee \neg A) \wedge B$

1- $A \vee \neg A \rightarrow B \vdash A \vee \neg A \rightarrow B$ axiome

2- $A \vee \neg A \rightarrow B \vdash A \vee \neg A$ RTE

3- $A \vee \neg A \rightarrow B \vdash B$ MP(1,2)

4- $A \vee \neg A \rightarrow B \vdash (A \vee \neg A) \wedge B$ $\wedge$i sur (2,3)

83