Logique du Premier Ordre
Sémantique

1

Plan

1- Introduction
2- Notion de Structure
3- Interprétation d'un langage
4- Valuation des variables dans une structure
5- Interprétation de Termes
6- Interprétation de Formules
7- Satisfaisabilité
8- Validité
9- Thèse et tautologie
10- Formules équivalentes
11- Modèles
12 Compatibilité
13 Conséquence logique
14- Formes normales des formules de la logique du 1er ordre
15- Programmation logique (Prolog)

2

Plan

1- Introduction
2- Notion de Structure
3- Interprétation d'un langage
4- Valuation des variables dans une structure
5- Interprétation de Termes
6- Interprétation de Formules
7- Satisfaisabilité
8- Validité
9- Thèse et tautologie
10- Formules équivalentes
11- Modèles
12 Compatibilité
13 Conséquence logique
14- Formes normales des formules de la logique du 1er ordre
15- Programmation logique (Prolog)

1- Introduction

Considérons la formule:

$$\exists y \ \forall x \ p(y,x)$$

est-elle vraie ou fausse?

La valeur de vérité de la formule dépend de comment on "lit" le symbole p et du domaine de discours considéré.

1- Introduction

$\exists y \; \forall x \; p(y,x)$

Exemple-1

domaine = N
p(x,y) = $x \leq y$
La formule se lit:
« il existe un entier naturel inférieur ou égal à tous les entiers »
La formule est VRAIE

Exemple-2

domaine = N
p(x,y) = $x < y$
La formule se lit:
« il existe un entier naturel inférieur strictement à tous les entiers »
La formule est FAUSSE (car on n'a pas $0 < 0$)

Exemple-3

domaine = Z
p(x,y) = $x \leq y$
La formule se lit:
« il existe un entier relatif inférieur ou égal à tous les entiers relatifs»
La formule est FAUSSE

1- Introduction

- Le but de la sémantique de la logique du 1er ordre est de:
  - Donner une signification aux symboles de prédicats
  - Donner une signification et aux symboles de fonctions
  - Fixer le domaine dans lequel les variables prennent valeur

Afin d'établir la valeur de vérité (vrai ou faux) des formules.

Plan

2- Notion de Structure

Définition

On appelle structure tout quadruplet S = (D, C, F, R) où:

- **D: est un ensemble *non vide* appelé domaine de discours**
- **C: un ensemble (vide ou non) de constantes**
- **F: un ensemble (vide ou non) de fonctions sur D**
- **R: un ensemble (vide ou non) de relations sur D**

2- Notion de Structure

Exemple

(D,C,F,R) telle que
D=N
C={0}
F={+,*, succ}
R={≤}

Sont des structures

(D,C,F,R) telle que
D=Réels
C={0, 1}
F={+, - , *}
R=∅

2- Notion de Structure

Exemple

(D,C,F,R) telle que
D=N
C={0}
F={+, - , succ}
R={≤}

N'est pas une structure
car la soustraction n'est pas interne dans N

(D,C,F,R) telle que
D=∅
C={0}
F={+,*}
R={≤}

N'est pas une structure
car le domaine est vide

2- Notion de Structure

Donner une signification

- **aux symboles de prédicats**
- **aux symboles de fonctions**
- **aux symboles de constantes**
- **et Fixer le domaine dans lequel les variables prennent valeur**

revient à associer au langage considéré (de la logique du 1er ordre) une structure.

Plan

3- Interprétation d'un langage

Définition

Soit L un langage défini par :

les constante $c1,c2$,..

les symboles de prédicats $p1,p2$,….

les symboles fonctionnels $f1$ $f2$,….

Soit $S=(D,C, F, R)$ une structure

Une interprétation de L dans S consiste à associer :

- A chaque constante ci de L un élément de C noté $[ci]_S$
- A chaque prédicat pi de L de poids n une relation n-aire de R notée $[pi]_S$.
- A chaque symbole fonctionnel fi de L de poids n, une fonction de F notée

$[fi]_S : D^n \to D$.

3- Interprétation d'un langage

Exemple-1: L1 : - constante c

- prédicat p de poids 2

$S1 = (N,\{0\}, \emptyset, \{<\})$

$[c]_{S1}=0$,

$[p(x,y)]_{S1}=x<y$

S2= ({Mohamed, Ali, Madjid }, {Mohamed},∅,{_est-frère-de_})

$[c]_{S2}$=Mohamed,

$[p(x,y]_{S2}$= x est-frère-de y

S3 = ({les amphis}, {A10},∅ ,{_est.dans.le.même.couloir.que_})

$[c]_{S3}$=A10,

$[p(x,y)]_{S3}$= x est-dans-le-même-couloir-que y)

3- Interprétation d'un langage

Exemple-2:

L2:
- 2 constantes c1 c2
- un prédicat p de poids 2
- un symbole fonctionnel f de poids 1
- 2 symboles fonctionnels g et h de poids 2

S1=(R, {0 ,1}, {carrée,somme, produit},{<})

$[c1]_{S1}=0$
$[c2]_{S1}=1$
$[p(x,y)]_{S1}= x<y$
$[f(x)]_{S1}= x^2$
$[g(x,y)]_{S1}= x + y$
$[h(x,y)]_{S1}=x*y$

15

3- Interprétation d'un langage

Exemple-2:

L2:
- 2 constantes c1 c2
- un prédicat p de poids 2
- un symbole fonctionnel f de poids 1
- 2 symboles fonctionnels g et h de poids 2

S2=(vecteurs, {vecteur nul, vecteur unitaire i}, {opposé d'un vecteur, somme, différence} ,{parallèle.à})

$[c1]_{S2}$ = le vecteur nul
$[c2]_{S2}$ = le vecteur unitaire i
$[p(x,y)]_{S2}$ = x parallèle-à y
$[f(x)]_{S2}$ =opposé de x $= -x$
$[g(x,y)]_{S2} = x+y$
$[h(x,y)]_{S2} = x- y$

16

3- Interprétation d'un langage

Remarques:

- **Tout langage a au moins une structure comme interprétation (même si cette structure est abstraite).**
- **Un langage peut avoir plusieurs structures comme interprétations.**
- **Etant donnée un langage L et une structure S , Il peut exister plusieurs interprétations de L dans S.**

Exemple: **L: 2 constante c1,c2**

S1= (N,{0,1},∅,∅)

2 interprétations possibles de L dans S1:

- $[c1]_{S1} = 0$ et $[c2]_{S1} = 1$
- $[c1]_{S1} = 1$ et $[c2]_{S1} = 0$

Plan

4- Valuation des variables dans une structure

Définition

Soient Var: l'ensemble des variables d'un langage L

D: le domaine d'une interprétation S de L

Une valuation V pour les variables Var dans S est une fonction

$$V: \quad Var \rightarrow D$$

qui attribut à chaque variable x de Var une valeur V(x) de D.

4- Valuation des variables dans une structure

Exemple

D={3,8,9}

V(x1)=9, V(x2)=3 V(x3)=8 V(xi)= 9 si i>3 est une valuation

x=y vrai si x=4 y=4 mais fausse si x=4 y=3

Plan

5- Interprétation de Termes

Une fois qu'on a défini la notion d'interprétation, le premier problème à considérer est : comment évaluer un terme t?

Le rôle d'un terme est celui d'indiquer un individu c'est à dire un élément du domaine de discours. Quel élément? (comment savoir lequel).

Considérons par exemple le terme f(a,g(a))
où f: est un symbole de fonction de poids2
g :un symbole de fonction de poids 1
a: une constante.

- Tout d'abord ceci dépend de l'interprétation choisie.

Par exemple, soit S l'interprétation du langage de t où

D=N $[f]_S$=+ $[g]_S$ =succ $[a]_S$ =0.

Par rapport à cette interprétation, le terme f(a,g(a)) indique la somme de l'entier 0 et de 'entier successeur de 0, donc le nombre 1.

5- Interprétation de Termes

Considérons maintenant le terme f(x,g(x))

où f: est un symbole de fonction de poids2

g :un symbole de fonction de poids 1

x: une variable.

Quelle est l'évaluation du terme ?

Ceci dépend de l'entier associé à x.

Une définition précise de la valeur d'un terme t dont les variables sont x1,x2,…xn , par rapport à une interprétation S, doit donc tenir compte des éléments du domaine de discours a1,a2,..an que l'on a choisi d'associer aux variables

23

5- Interprétation de Termes

Définition

Soient L : un langage

S: une structure interprétation de L

t: un terme de L

V: une valuation des variables de t

L'interprétation du terme t (dite aussi valeur de t) notée $[t]_{S,v}$ est définie par:

- **Si t est une constante c alors $[t]_{S,v} = [c]_S$**
- **Si t est une variable x alors $[t]_{S,v} = v(x)$**
- **Si t est de la forme f(t1,..,tn) et $[ti]_{S,v}$ =bi alors**

$$[t]_{S,v}= [f]_S ([t1]_{S,v} , [t2]_{S,v} ,\ldots[tn]_{S,v})$$

24

5- Interprétation de Termes

Exemple

L: - 2 constantes c1 c2
- un symbole fonctionnel f de poids 1
- 2 symboles fonctionnels g et h de poids 2

S =(D,C,F,R) une structure pour L telle que:

D= N

$[c1]_S=0$ $[c2]_S=1$

$[f(x)]_S=x^2$

$[g(x,y)]_S=x+y$

$[h(x,y)]_S=x*y$

V une valuation telle que V(x)=3, V(y) =4, V(z)=6

t1= g(y,h(c1,x)) $[t1]_{S,v} = 4 + (0*3) =4$

t2= f(g(c2, h(y,z))) $[t2]_{S,v} = (1 + (4*6))^2 = 25^2 =725$

Plan

6- Interprétation de Formules

Définition

Soit φ : une formule d'un langage L,

S: une interprétation du langage L ayant le domaine D.

V: une valuation des variables par rapport à S

L'interprétation de φ par rapport à S et V noté $[\varphi]_{S,v}$ est définie par:

- **Si $\varphi = p(t1,t2,..tn)$ alors $[\varphi]_{S,v} = [p]_S\ ([t1]_{S,v}, [t2]_{S,v}, ..[tn]_{S,v})$**
- **Si $\varphi = t1 \equiv t2$ alors $[\varphi]_{S,v} = [t1]_{S,v} \equiv [t2]_{S,v}$**
- **Si $\varphi = \rceil \varphi 1$ alors $[\varphi]_{S,v} = \rceil([\varphi 1]_{S,v})$**
- **Si $\varphi = \varphi 1\ K\ \varphi 2$ $K \in \{\wedge, v, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ alors $[\varphi]_{S,v} = [\varphi 1]_{S,v}\ K\ [\varphi 2]_{S,v}$**
- **Si $\varphi = \forall x\ \varphi 1$ alors $[\varphi]_{S,v} = \wedge_{a \in D}\ ([\varphi 1]_{S,v})[a/x]$**
- **Si $\varphi = \exists x \varphi 1$ alors $[\varphi]_{S,v} = V_{a \in D}\ ([\varphi 1]_{S,v})[a/x]$**

Plan

7- Satisfaisabilité

Satisfaisabilité d'une formule pour une structure est une valuation

Définition

Soient L un langage du 1er ordre

φ : une formule construite sur L

S : une structure interprétation de L

V : une valuation pour l'ensemble des variables Var

$\boxed{\varphi \text{ est satisfaite dans S pour la valuation V} \Leftrightarrow [\varphi]_{S,v} = 1}$

$\boxed{\varphi \text{ est non satisfaite dans S pour la valuation V} \Leftrightarrow [\varphi]_{S,v} = 0}$

Exemple

$\forall y\, p(x,y)$ est satisfaite pour S=(N, ∅, ∅ ,{≤ }) et la valuation V / V(x)=0

$\forall y\, p(x,y)$ est non satisfaite pour S=(N, ∅, ∅ ,{≤ }) et la valuation V/ V(x)=5

7- Satisfaisabilité

Satisfaisabilité d'une formule pour une structure

Définition

Soient L un langage du 1er ordre

φ : une formule construite sur L

S : une structure interprétation de L

$\boxed{\varphi \text{ satisfaite pour S} \Leftrightarrow \exists \text{ V telle que } [\varphi]_{S,V} = 1}$

$\boxed{\varphi \text{ non satisfaite pour S} \Leftrightarrow \forall \text{V on a } [\varphi]_{S,V} = 0}$

Exemple

$\forall y\, p(x,y)$ est satisfaite pour S=(N, ∅, ∅ ,{≤ }) (V(x)=0)

$\forall y\, p(x,y)$ non satisfaite pour S=(N, ∅, ∅ ,{≥ })

7- Satisfaisabilité

Satisfaisabilité d'une formule

Définition

Soient L un langage du 1er ordre

φ : une formule construite sur L

φ satisfaite $\Leftrightarrow \exists S \quad \exists V$ telles que $[\varphi]_{S,V} = 1$
φ non satisfaite $\Leftrightarrow \forall S \quad \forall V \quad [\varphi]_{S,V} = 0$

Exemple

$\forall y\ p(x,y)$ est satisfaite ($S = (N, \emptyset, \emptyset, \{\leq\})$ $V(x)=0$)

$\forall y\ (p(x,y) \wedge \neg p(x,y))$ est non satisfaite

Plan

8- Validité

Validité d'une formule dans une structure

Définition

Soient L un langage du 1er ordre

φ : une formule construite sur L

S : une structure interprétation de L

$$\varphi \text{ valide dans une structure } S \Leftrightarrow \forall V \ [\varphi]_{S,V} = 1$$

$$\varphi \text{ non valide dans une structure } S \Leftrightarrow \exists V \ [\varphi]_{S,V} = 0$$

Exemple

$\forall y\ p(a,y)$ est valide dans $S = (\mathbb{N}, \{0\}, \varnothing, \{\leq\})$

$\forall x\ p(x,f(x))$ est valide dans $S = (\mathbb{N}, \varnothing, \{succ\}, \{\leq\})$

8- Validité

Validité d'une formule dans une structure

Théorème

Si φ est une formule <u>close</u> (sans variables libres) alors

$$\varphi \text{ valide} \Leftrightarrow \varphi \text{ satisfaite}$$

Démonstration:

$\Rightarrow$? φ valide dans S $\Rightarrow$ φ satisfaite (évident)

$$\Leftarrow ? \left\{\begin{array}{l} \varphi \text{ satisfaite dans } S \\ \varphi \text{ close} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \exists v\ [\varphi]_{S,v} = 1 \\ \forall v\ [\varphi]_{S,v} = [\varphi]_S \text{ (pas de variables libres dans } \varphi) \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \forall v\ [\varphi]_{S,v} = 1$$

$$\Rightarrow \varphi \text{ valide dans } S$$

8- Validité
Validité (universelle) d'une formule

Définition

Soients L un langage du 1er ordre
φ : une formule construite sur L

φ est (universellement)valide $\Leftrightarrow \forall S\ \ \varphi$ est valide dans S

φ est non valide $\Leftrightarrow \exists S\ \ \varphi$ est non valide dans S

Exemple

$\forall x\ p(x) \rightarrow \exists y\ p(y)$ est valide

$\exists x \forall y\ \varphi(x,y) \rightarrow \forall y \exists x\ \varphi(x,y)$ est valide

$\forall y \exists x\ \varphi(x,y) \rightarrow \exists x \forall y\ \varphi(x,y)$ n'est pas valide

Plan