Université de Mohamed Boudiaf /M'sila
Faculté des Sciences et Technologies
Module : Stat et Proba

Année Universitaire: 2018/2019

CORRIGEE D'EPREUVE DU 3ème SEMESTRE

Questions de cour :(06)*points.*

1) Démontrer que : $V(x) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i(x_i - \bar{x})^2 = \left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} n_i x_i^2\right] - \bar{x}^2$.

$$V(x) = \frac{1}{N}\sum n_i(x_i^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2) = \frac{1}{N}\sum n_i x_i^2 - \frac{1}{N}\sum n_i 2x_i\bar{x} + \frac{1}{N}\sum n_i \bar{x}^2$$
$$= \frac{1}{N}\sum n_i x_i^2 - 2\bar{x}\cdot\frac{1}{N}\sum n_i x_i + \bar{x}^2\frac{1}{N}\sum n_i \quad \frac{1}{N}\sum n_i x_i = \bar{x} \text{ et } \sum n_i = N$$
$$= \frac{1}{N}\sum n_i x_i^2 - 2\bar{x}(\bar{x}) + \bar{x}^2\left(\frac{N}{N}\right) = \frac{1}{N}\sum n_i x_i^2 - 2\bar{x}^2 + \bar{x}^2$$
$$= \left[\frac{1}{N}\sum n_i x_i^2\right] - \bar{x}^2.$$

(1)

2) Démontrer que : $V(x)=E(x^2) - [E(x)]^2$.

$$V(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,[x - E(x)]^2\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,[x^2 - 2xE(x) + E^2(x)]\,dx$$
$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx}_{E(x^2)} - 2E(x)\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx}_{E(x)} + E^2(x)\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx}_{1}.$$
$$= E(x^2) - 2E^2(x) + E^2(x)\cdot 1 = E(x^2) - [E(x)]^2.$$

(2)

3) Compléter le tableau suivant :

La loi	p(X=k)	La fonction densité de probabilité	Espérance	Variance
La loi Normale contrée réduite		$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\left(\frac{x^2}{2}\right)}$	*0*	1
La loi Normale $N(m;\sigma)$		$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}$	m	σ^2
Loi de poisson $P(m)$	$e^{-m}.\left(\frac{m^k}{k!}\right)$		m	k
Loi binomiale $B(n;p)$	$C_n^k\,p^k\,q^{n-k}$		np	npq
Loi de poisson $P(1)$	$\frac{1}{e.(k!)}$		1	k

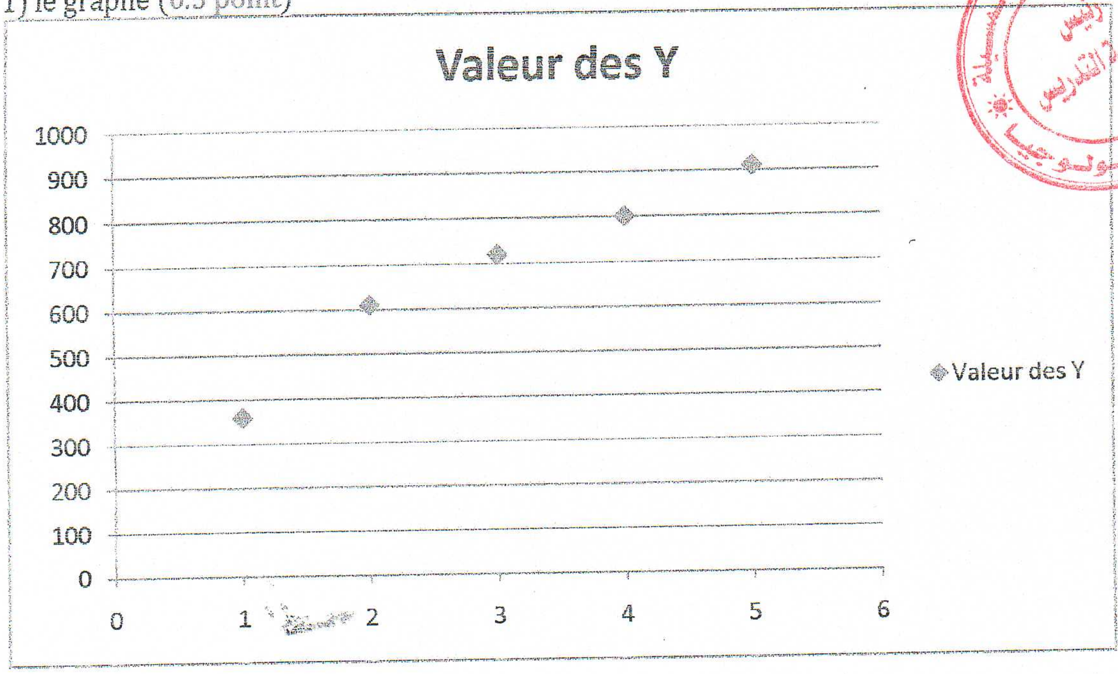
(1) 0,5 (1) 0,5

Exercice N°01 : (05)*points.*

- On Pose B_v « Avoir une face blanche visible »
  B_c « " " " Cachée » (1)
- Dans le total, On a 3 faces Blanches et 3 faces noirs dans les six faces (1)
  $P(B_v) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.
- On cherche la Probabilité Conditionnelle de l'évènement :
  « Avoir un face blanche (B_c) Sachant que l'on a déja une face blanche (B_v) (1)
- $P(B_c | B_v) = \frac{P(B_c \cap B_v)}{P(B_v)}$
  $(B_v \cap B_c)$ et $(B_v$ et $B_c)$: « Avoir un jeton avec deux faces blanches » (1)
  $P(B_v \cap B_c) = \frac{1 \text{ jeton}}{3 \text{ jetons}} = \frac{1}{3}$ donc : $P = \frac{1/3}{1/2} = \frac{2}{3}$.

Exercice N°01: (5 points)

1) le graphe (0.5 point)



2) le nuage de points est allongé, l'ajustement affine est justifié (0.5 point)

3) la méthode des moindres carrés

$\overline{x} = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} x_i = 3$ (0.5 point) , $V(X) = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} x_i^2 - \overline{3^2} = 2$, (0.5 point)

$\overline{y} = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} y_i = 680$ (0.5 point) , $\text{cov}(X) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p} x_i y_i - 2X680 = 258$ (0.5 point)

$a = \frac{\text{cov}(X)}{V(X)} = 129;$ (0.5 point) , $b = \overline{y} - 129\overline{x} = 293$ (0.5 point)

Donc la droite d'ajustement est $y = 129x + 293$.

4) $129 \times 3 + 293 = 680$ donc le point moyen G(3; 680) est sur la droite d'ajustement. (0.5 point)

5) pour $x_i = 29$ on a $y = 129 \times 29 + 293 = 4034$ (0.5 point)

Exercice N°3: (5pt) On jette une pièce de monnaie qui porte P ou F, 10 fois

1) C'est une variable aléatoire X à valeurs entières : 0, 1, 2, 3, ..., 10 1,5
Suit une loi binomiale de paramètres (n = 10) et $(p = \frac{1}{2})$ donc :
pour tout $k \in \{0, \dots, 10\}$ on a :

$$P(X=k) = C_n^k p^k q^{n-k} = C_{10}^k \left(\tfrac{1}{2}\right)^k \left(\tfrac{1}{2}\right)^{10-k} = \frac{C_{10}^k}{2^{10}} = \frac{10!}{(10-k)!\,k!\,2^{10}}$$

2) $E(X) = n.p = 10 . \frac{1}{2} = 5$. 1

$V(X) = n.p.q = n.p.(1-p) = 10\,\frac{1}{2}.\frac{1}{2} = 2{,}5$. 1

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{2{,}5} =$