Corrigé type de l'épreuve de O.V (2018/2019)

EX01 (6 pts)

1- Le système de la fig 1 est un système à 1 degré de liberté => 1 seule coordonnée généralisée.

On choisit comme coordonnée généralisée la grandeur x telle qu'elle est définie dans l'énoncé.

Le système admet alors une seule équation de Lagrange du type :

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = 0$$ 0,5

$\mathcal{L} = T - U$ fonction de Lagrange

D fonction dissipation

L'énergie cinétique T est donnée par

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$ 0,5

L'énergie potentielle U est uniquement élastique =>

$$U(x) = \frac{1}{2} K x^2 \quad \text{avec} \quad K = 6k$$ 0,5

alors : $$\boxed{\mathcal{L}(x,\dot{x}) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} K x^2}$$ 0,5

$$D = \frac{1}{2} \alpha \dot{x}^2$$ 0,5

après dérivation on obtient :

$$\boxed{\ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{6k}{m} x = 0}$$ 0,5

par identification on aura :

$$\omega_0^2 = \frac{6k}{m}$$

$$2\delta = \frac{\alpha}{m}$$

alors la pulsation propre ω_0 et le rapport d'amortissement ξ sont

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{6k}{m}}} = \boxed{12 \text{ rad/s}}$$ 0,5

$$\xi = \frac{\delta}{\omega_0} = \boxed{\frac{\alpha}{\sqrt{24km}}}$$ 0,5

2- On obtient le régime critique si $\xi = 1$ =>

$$\frac{\alpha}{\sqrt{24km}} = 1 \Rightarrow \alpha_c = \sqrt{24km}$$ 0,5

A.N : pour $k = 48$ N/m, $m = 2$ kg =>

$$\alpha_c = \sqrt{24 \times 2 \times 48} = \boxed{48 \text{ N.s/m}}$$

3- si $\alpha = 4$ N.s/m alors :

$$\xi = \frac{\alpha}{\sqrt{24km}} = \frac{1}{12} < 1$$

dans ce cas le régime est pseudosinusoïdal =>

$$x(t) = A e^{-\delta t} \cos(\omega_a t + \varphi)$$ 0,5

avec : $$\omega_a = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2} = \sqrt{143} = \boxed{11{,}95 \text{ rad/s}}$$

Calcul de A et φ

d'après les C.I : $x(0) = 0$ et $\dot{x}(0) = 5$ m/s

on obtient :

$x(0) = 0 \Rightarrow A\cos\varphi = 0$

$\dot{x}(0) = 5 \Rightarrow A(-\delta\cos\varphi - \omega_a \sin\varphi) = 5$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi = \pi/2}$$

$$A = -\frac{5}{\sqrt{143}} = \boxed{-0{,}42}$$ 0,5

et avec $\delta = 1 \text{ s}^{-1}$ =>

$$\boxed{x(t) = 0{,}12\, e^{-t} \sin(11{,}95t)}$$ 0,5

EX02 (8pts)

1- Le ressort équivalent k_e de k_1 et k_2

Comme k_1 est en série avec k_2 alors:

$$\frac{1}{k_e} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \Rightarrow \boxed{k_e = \frac{2}{3}k = 4\,N/m}$$ 0,5

2- L'énergie cinétique $T(\dot{x})$:

T = l'énergie cinétique de m + l'énergie cinétique du disque

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} J_{disque} \dot{\theta}^2$$

θ = angle de rotation du disque

nous avons : $x = R\theta \Rightarrow \dot{x} = R\dot{\theta}$

alors et comme $J_{disque} = \frac{1}{2} MR^2$:

$$T = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\dot{\theta}^2$$

$$= \boxed{\frac{1}{2}\left(m + \frac{1}{2}M\right)\dot{x}^2}$$ 1,50

3- Dans le système nous avons un mvt de rotation du disque autour de son axe de symétrie et un mvt de translation de m verticalement

le 1er mvt est repéré par θ l'angle de rotation du disque

le 2ème mvt est repéré par x

et comme nous avons : $x = R\theta$

alors le système est à 1 degré de liberté. 0,5

Donc on peut choisir x comme coordonnée généralisée

alors le système admet une seule équation de Lagrange de type:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = 0$$ 0,5

avec :

$$\mathcal{L}(x,\dot{x}) = T - U = \frac{1}{2}\left(m + \frac{1}{2}M\right)\dot{x}^2 - \frac{1}{2}\left(k_3 + \frac{1}{4}k_e\right)x^2$$ 0,5

$$D = \frac{1}{2}\alpha \dot{x}^2 \quad \left(D = \frac{1}{2} P_d\right)$$ 0,5

après dérivation on obtient :

$$\boxed{\ddot{x} + \frac{\alpha}{m + \frac{1}{2}M}\dot{x} + \frac{k_3 + \frac{1}{4}k_e}{m + \frac{1}{2}M}x = 0}$$ 0,5

4- par identification nous avons :

$$2\delta = \frac{\alpha}{m + \frac{1}{2}M} = \frac{32}{9} = \boxed{3{,}55\,s^{-1}}$$ 0,5

$$\omega_0^2 = \frac{k_3 + \frac{1}{4}k_e}{m + \frac{1}{2}M} = \frac{100}{9} \Rightarrow \boxed{\omega_0 = 3{,}33\,rad/s}$$

d'où la valeur du rapport d'amortissement ξ est :

$$\xi = \frac{\alpha}{2\sqrt{\left(k_3 + \frac{1}{4}k_e\right)\left(m + \frac{1}{2}M\right)}} = \frac{8}{15} = \boxed{0{,}53}$$ 0,5

$\Rightarrow \xi < 1$ c'est le régime pseudopériodique (pseudosinusoïdale) dont la pseudo pulsation est :

$$\omega_a = \omega_0\sqrt{1 - \xi^2} = 2{,}82\,rad/s$$ 0,5

d'où la pseudopériode T_a est

$$T_a = \frac{2\pi}{\omega_a} = \boxed{2{,}23\,s}$$ 0,5

5- En présence de f(t) le système devient forcé et l'équation diff s'écrit :

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f(t)}{m + \frac{1}{2}M} \quad \ldots\ldots (1)$$ 0,5

car la force généralisée f_x correspondant à $f(t)$ est :

$F_x = f(t)\vec{i} \cdot \frac{\partial \vec{OM}}{\partial x} = f(t)$

et comme $f(t) = \sin t$ (sinusoïdale)

alors : $x(t) = A\cos(t + \varphi)$ (régime permanent)

résolution de l'équation diff :

$x(t) \longrightarrow \bar{x}(t) = \bar{A} e^{jt}$ $\quad \bar{A} = A e^{j\varphi}$

$f(t) \longrightarrow \bar{f}(t) = e^{-j\pi/2} e^{jt}$ 0,5

En résolvant l'eq (1) dans l'ensemble des nbs complexes on obtient :

$$\bar{A} = \frac{e^{-j\pi/2}}{(\omega_0^2 - 1) + j2\delta}$$ 0,5

d'où on tire :

$$A = |\bar{A}| = \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2-1)^2 + (2\delta)^2}} = \boxed{0,1\ m}$$

$$\varphi = \arg(\bar{A}) = -\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{2\delta}{\omega_0^2 - 1}$$ 0,5

$$= -\frac{\pi}{2} - 0,33 = \boxed{-1,91\ rad}$$

$$\simeq \boxed{-\frac{3\pi}{5}\ rad}$$

Exo3 (6 pts)

le système est constitué de deux masses ponctuelles m_1 et m_2.

m_1 est repérée par θ_1 (mvt de rotation)

m_2 " " " " θ_2 (" ")

alors le système est à deux degrés de liberté dont les coordonnées généralisées sont θ_1 et θ_2. 0,5

Donc le système admet deux équations de Lagrange de type :

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1}\right] - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2}\right] - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = 0$$ 0,5

ce sont les équations d'un système libre non-amorti.

par dérivation on obtient :

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_1 + \frac{g}{l}\theta_1 + \frac{1}{2}\ddot{\theta}_2 = 0 \\ \ddot{\theta}_2 + \frac{g}{l}\theta_2 + \ddot{\theta}_1 = 0 \end{cases} \quad \ldots\ (2)$$ 0,5

le système d'équations diff admet une solution sinusoïdale pour θ_1 et θ_2 de même pulsation.

alors on peut écrire :

$$\theta_1(t) = A\cos(\Omega t + \varphi_1) \iff \bar{\theta}_1 = \bar{A} e^{j\Omega t}$$

$$\theta_2(t) = B\cos(\Omega t + \varphi_2) \quad \bar{\theta}_2 = \bar{B} e^{j\Omega t} \quad \ldots (3)$$ 0,5

après dérivation de (3) et substitution dans ... on aura :

$$\begin{cases} \left(\frac{g}{l} - \Omega^2\right)\bar{A} - \frac{\Omega^2}{2}\bar{B} = 0 \\ -\Omega^2 \bar{A} + \left(\frac{g}{l} - \Omega^2\right)\bar{B} = 0 \end{cases}$$ 0,5

le système des deux équations algébriques admet une solution non-nulle si :

$$\frac{\bar{A}}{\bar{B}} = \frac{\frac{1}{2}\Omega^2}{\frac{g}{l} - \Omega^2} = \frac{\frac{g}{l} - \Omega^2}{\Omega^2}$$

d'où l'équation aux pulsations propres :

$$\left(\frac{g}{l} - \Omega^2\right)^2 - \frac{1}{2}\Omega^4 = 0 \quad \ldots (4)$$ 0,5

(4) admet 2 solutions positives :

$$\Omega_1^2 = (2 - \sqrt{2})\frac{g}{l} \Rightarrow \Omega_1 = \sqrt{(2-\sqrt{2})\frac{g}{l}}$$

$$\Omega_2^2 = (2 + \sqrt{2})\frac{g}{l} \quad \Omega_2 = \sqrt{(2+\sqrt{2})\frac{g}{l}}$$ 0,5

qui sont les 2 pulsations propres du syst

par conséquent les deux modes propres associés sont :

1^er mode propre :

$$\Omega^2 = \Omega_1^2 = (2-\sqrt{2})\, g/l$$

$$\Rightarrow \frac{\bar{A}}{\bar{B}} = +\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow A = \frac{1}{\sqrt{2}} B \Rightarrow \boxed{B = \sqrt{2} A}$$

$$\text{et } \arg(\bar{A}) - \arg(\bar{B}) = 0 \Rightarrow \boxed{\varphi_1 = \varphi_2}$$

donc :

$$\theta_1(t) = A\cos(\Omega_1 t + \varphi_1)$$
$$\theta_2(t) = \sqrt{2} A\cos(\Omega_1 t + \varphi_1)$$

0,5

les 2 pendules vibrent en phase avec des amplitudes proportionnelles ($B = \sqrt{2}A$)

2^ème mode propre :

$$\Omega^2 = \Omega_2^2 = (2+\sqrt{2})\, g/l$$

$$\Rightarrow \frac{\bar{A'}}{\bar{B'}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \boxed{B' = \sqrt{2} A'}$$

$$\text{et } \arg(\bar{A'}) - \arg(\bar{B'}) = \pi \Rightarrow \boxed{\varphi'_1 = \varphi'_2 + \pi}$$

donc :

$$\theta_1(t) = A'\cos(\Omega_2 t + \varphi'_1)$$
$$\theta_2(t) = \sqrt{2} A'\cos(\Omega_2 t + \varphi'_1 - \pi)$$

0,5

les 2 pendules vibrent en opposition de phase avec des amplitudes proportionnelles ($B' = \sqrt{2}A'$).

solution générale :

c'est une combinaison linéaire des deux modes propres :

$$\theta_1(t) = A\cos(\Omega_1 t + \varphi_1) + A'\cos(\Omega_2 t + \varphi'_1) \quad \text{.... (5)}$$
$$\theta_2(t) = \sqrt{2}A\cos(\Omega_1 t + \varphi_1) + \sqrt{2}A'\cos(\Omega_2 t + \varphi'_1 - \pi)$$

0,5

3- Dans les conditions initiales :

$$\theta_1(0) = \theta_0,\ \dot{\theta}_1(0) = 0 \text{ et } \theta_2(0) = \sqrt{2}\theta_0,\ \dot{\theta}_2(0) = 0$$

et d'après la solution générale (5)

on obtient :

$$\begin{cases} \theta_1(0) = A\cos\varphi_1 + A'\cos\varphi'_1 = \theta_0 \\ \theta_2(0) = \sqrt{2}A\cos\varphi_1 + \sqrt{2}A'\cos(\varphi'_1 - \pi) = \sqrt{2}\theta_0 \\ \dot{\theta}_1(0) = -\Omega_1 A\sin\varphi_1 - \Omega_2 A'\sin\varphi'_1 = 0 \\ \dot{\theta}_2(0) = -\sqrt{2}A\Omega_1\sin\varphi_1 - \sqrt{2}A'\Omega_2\sin(\varphi'_1 - \pi) = 0 \end{cases} \quad \text{.... (6)}$$

0,5

le système d'équation (6) donne la solution suivante :

$$\varphi_1 = \varphi'_1 = 0, \quad A = \theta_0 \text{ et } A' = 0$$

alors :

$$\boxed{\begin{aligned} \theta_1(t) &= A\cos(\Omega_1 t) \\ \theta_2(t) &= \sqrt{2}A\cos(\Omega_1 t) \end{aligned}}$$

0,5

c'est le 1^er mode de vibration

fin