Université de M'sila

Faculté de technologie **SOCLE COMMUN**

Corrigé du contrôle de Phys.01 (2018/2019)

Questions générales(06pts)

1°- Relation entre coordonnées : cartésiennes et sphériques :

Cartésiennes et sphériques: $\begin{cases} x = r.\sin\theta.\cos\varphi \\ y = r.\sin\theta.\sin\varphi \\ z = r.\cos\theta \end{cases}$ 0.75

Cartésiennes et cylindriques: $\begin{cases} x = \rho.\cos\theta \\ y = \rho.\sin\theta \\ z = z \end{cases}$ 0.75

2°- les lois de Newton :

1ere Loi : loi d'inertie 0.25

2eme Loi : principe fondamentale de la dynamique $\sum \vec{F}^{ex} = \frac{d\vec{P}}{dt}$ 0.25

3eme Loi : Loi de réciprocité (action – réaction) 0.25

$\sum \vec{F}^{ex} = m\vec{a}$ dans le cas où la masse est constante 0.75

3°- $\vec{v} \cdot \vec{a} = 0 \Rightarrow \begin{cases} v = 0 & \Rightarrow \text{système au repos} \\ a = 0 & \Rightarrow \text{mouvement réctiligne uniforme} \\ \vec{a} \perp \vec{v} & \Rightarrow \text{mouvement circulaire uniforme} \end{cases}$ 1.5

4°- Non, l'énergie mécanique n'est constante que pour les forces conservatives. 0.5

5°- Non, l'accélération de Coriolis parvient si le mouvement est de rotation. 0.5

6°- Non, la quantité de mouvement est constante pour un système isolé. 0.5

Exercice 01 (07pts)

$\begin{cases} \rho(t) = be^{\omega t} \\ \theta(t) = \omega t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\rho} = \omega be^{\omega t} = \omega\rho \\ \dot{\theta} = \omega \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{\rho} = \omega^2 be^{\omega t} = \omega^2\rho \\ \ddot{\theta} = 0 \end{cases}$

1°- En coordonnées polaires (ρ, θ) : soit le vecteur position : $\overrightarrow{OM} = \vec{r} = \rho\vec{u}_\rho$ 0.25

Vecteur vitesse :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\rho}\vec{u}_\rho + \dot{\theta}\rho\vec{u}_\theta = \omega\rho\vec{u}_\rho + \omega\rho\vec{u}_\theta$$

$$\boxed{\vec{v} = \omega\rho(\vec{u}_\rho + \vec{u}_\theta) = \omega be^{\omega t}\,(\vec{u}_\rho + \vec{u}_\theta)}$$ 0.5

Module de la vitesse :

$$\boxed{|\vec{v}| = v = \sqrt{2}\omega\rho = \sqrt{2}\omega be^{\omega t}}$$ 0.5

Vecteur accélération :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2\right)\vec{u}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\vec{u}_\theta = (\omega^2\rho - \omega^2\rho)\vec{u}_\rho + (2\omega^2\rho)\vec{u}_\theta$$

$$\boxed{\vec{a} = 2\omega^2\rho\vec{u}_\theta = 2\omega^2 b e^{\omega t}\vec{u}_\theta}$$ 0.5

Module de la vitesse :

$$\boxed{|\vec{a}| = a = 2\omega^2\rho = 2\omega^2 b e^{\omega t}}$$ 0.5

2°- $\vec{a}\cdot\vec{v} = a.v.\cos(\alpha) = 2\omega^2\rho.\sqrt{2}\omega\rho\cos(\alpha) = (2\omega^2\rho\vec{u}_\theta)\cdot\left(\omega\rho(\vec{u}_\rho + \vec{u}_\theta)\right) \Rightarrow \cos(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 0.

$$\boxed{\alpha = \pi/4}$$ 0.25

3°- Le rayon de courbure :

On a : $\mathcal{R} = v^2/a_N$ sachant que : $a_N = \sqrt{a^2 - a_T^2}$ et $a_T = \frac{dv}{dt}$

$a = 2\omega^2\rho = 2\omega^2 b e^{\omega t}$ et $v = \sqrt{2}\omega\rho = \sqrt{2}\omega b e^{\omega t}$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} a_T = \dfrac{d(\sqrt{2}\omega\rho)}{dt} = \sqrt{2}\omega\dot{\rho} = \sqrt{2}\omega^2 b e^{\omega t} \\ v^2 = 2\omega^2\rho^2 = 2\omega^2 b^2 e^{2\omega t} \end{cases}}$$ 0.75

Donc : $a_N = \sqrt{4\omega^4\rho^2 - 2\omega^4\rho^2} = \sqrt{2}\omega^2 b e^{\omega t}$ 0.75

Alors $\boxed{\mathcal{R} = \frac{2\omega^2\rho^2}{\sqrt{2}\omega^2\rho} = \sqrt{2}be^{\omega t}}$ 0.75

3°- L'abscisse « S » :

On a : $ds = vdt$ 0.5 $\Rightarrow \int_0^S ds = \int_0^t vdt = \int_0^t \sqrt{2}\omega b e^{\omega t}dt \Rightarrow S|_0^s = \sqrt{2}be^{\omega t}|_0^t$ 0.5

$$\boxed{s = \sqrt{2}b(e^{\omega t} - 1)}$$ 0.5

Exercice 02 (07pts)

$v_0 = v_C = \sqrt{2Rg}$ $\quad BC = R \quad$ $\mu = 0.5$

1°- Tronçon CB : Vitesse du point B :

Le système part du point **C** $(v_0 = v_C = \sqrt{2Rg})$ sur un plan rugueux $(\mu = 0.5)$

On applique le principe fondamental de la dynamique :(2nd loi de Newton).

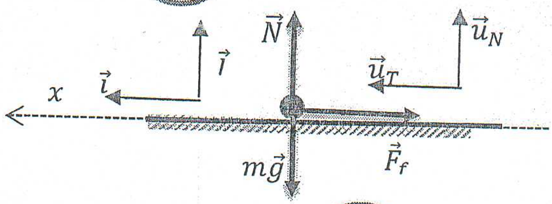
$\sum\vec{F}^{ex} = \frac{d\vec{P}}{dt} = m\vec{a}$ (Masse ponctuelle). $\Rightarrow$ $m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a}$ 0.25

La projection sur la base $(\vec{u}_T;\vec{u}_N)$:

$$\begin{cases} \vec{u}_T: \ -F_f = ma_T = m\dfrac{dv}{dt} & (1) \\ \vec{u}_N: \ N - mg = ma_N = \dfrac{mv^2}{\mathcal{R}} & (2) \end{cases}$$

(1) 0.25 (2) 0.25

et on a $F_f = \mu N$ (3) 0.25



0.25

Le mouvement se fait suivant « x », on va positionner C par x_C et B par x_B

Le mouvement est rectiligne. Le rayon de courbure est infini $\mathcal{R} \to \infty$ 0.25

L'équation (2) donne : $N - mg = ma_N = 0 \quad \Rightarrow N = mg$ 0.25

L'équation (3) donne : $F_f = \mu mg$ 0.25

L'équation (1) donne $-F_f = -\mu mg = m\frac{dv}{dt} \quad \Rightarrow \quad -\mu g = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}.\frac{dx}{dt} \quad \Rightarrow -\mu g dx = v.dv$ 0.25

$-\int_{x_C}^{x_B} \mu g dx = \int_{v_C}^{v_B} v.dv \quad \Rightarrow \quad -\mu g x|_{x_C}^{x_B} = \frac{1}{2}v^2\Big|_{v_C}^{v_B} \quad \Rightarrow \quad -\mu g(x_B - x_C) = \frac{1}{2}(v_B^2 - v_C^2)$ 0.25

$v_B^2 = v_C^2 - 2\mu g(x_B - x_C) = 2Rg - 2 * 0.5Rg \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_B = \sqrt{Rg}}$ 0.25

Une autre variante : On fait la projection sur la base $(\vec{\imath}; \vec{\jmath})$:

$$\begin{cases} \overrightarrow{ox}: -F_f = ma_x & (1) \quad 0.25 \\ \overrightarrow{oy}: N - mg = ma_y & (2) \quad 0.25 \end{cases}$$

Puisqu'il n'y a pas de mouvement sur $\overrightarrow{oy} \Rightarrow a_y = 0$ et $a_x = a$ 0.25

L'équation (2) donne : $N - mg = ma_y = 0 \quad \Rightarrow N = mg$ 0.25 ; $F_f = \mu N = \mu mg$ 0.25

L'équation (1) donne $-F_f = -\mu mg = ma \quad \Rightarrow \quad a = -\mu g$ 0.25

Utilisant l'équation de la cinématique du mouvement rectiligne uniformément varié indépendante du temps : $v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)$ 0.25

On a: $v_0 = v_C$; $v = v_B$; $a = -\mu g$; $x_0 = x_C$; $x = x_B \Rightarrow x - x_0 = R$

$v_B^2 = v_C^2 - 2\mu g(x_B - x_C) = 2Rg - 2 * 0.5Rg$ 0.25 $\quad \Rightarrow \quad \boxed{v_B = \sqrt{Rg}}$ 0.25

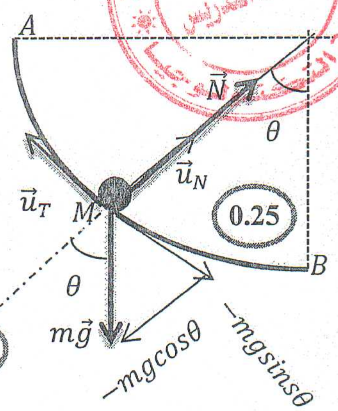
2°- Tronçon BA: Vitesse du point quelconque M:

On applique le principe fondamental de la dynamique :(2nd loi de Newton).

$\sum \vec{F}^{ex} = \frac{d\vec{P}}{dt} = m\vec{a}$ (Masse ponctuelle). $\Rightarrow \quad m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a}$

La projection sur la base intrinsèque $(\vec{u}_T; \vec{u}_N)$:

$$\begin{cases} \vec{u}_T: -mgsin(\theta) = ma_T = m\frac{dv}{dt} & (1) \quad 0.25 \\ \vec{u}_N: \; N - mgcos(\theta) = ma_N = \frac{mv^2}{\mathcal{R}} & (2) \quad 0.25 \end{cases}$$



L'équation (1) donne : $-gsin(\theta) = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{d\theta}.\frac{d\theta}{dt}$ 0.25

Or $\frac{d\theta}{dt} = \frac{v}{R}$

$\Rightarrow \quad -Rgsin(\theta)d\theta = vdv \quad \Rightarrow -\int_0^{\theta} Rg\, sin(\theta)d\theta = \int_{v_B}^{v_M} v.dv$ 0.25

$\Rightarrow \quad 2Rg\,(cos\theta - 1) = v_M^2 - v_B^2 \quad \Rightarrow \boxed{v_M = \sqrt{Rg(2cos\theta - 1)}}$

3°- Arrive-t-elle au point **A** ?

Au point **A** L'angle θ est : $\theta_A = \frac{\pi}{2}$ 0.25

$\Rightarrow v_A = \sqrt{Rg(2cos\theta_A - 1)}$ 0.25 $\quad \boxed{v_A = \sqrt{-Rg} = i\sqrt{Rg}}$

L'expression de la vitesse au point **A** est imaginaire $\Rightarrow$ Elle n'y arrive pas 0.25

La particule s'arrête au point ou l'angle θ est telle que $v_M = 0$

$v_M = \sqrt{Rg(2cos\theta - 1)} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2cos\theta - 1 = 0 \quad \Rightarrow \boxed{\theta = \frac{\pi}{3}}$ 0.25

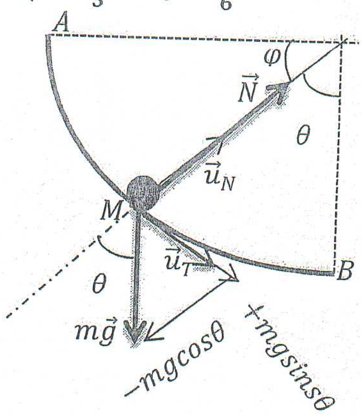
4°- En reprenant le mouvement la masse part de $\theta_0 = \frac{\pi}{3}$

- La vitesse au point B

- On applique le principe fondamental de la dynamique :(2nd loi de Newton).
- $\sum \vec{F}^{ex} = \frac{d\vec{P}}{dt} = m\vec{a}$ (masse ponctuelle). $\Rightarrow \quad m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a}$

$$\begin{cases} \vec{u}_T: \ mgcos(\varphi) = ma_T = m\frac{dv}{dt} & (1) \quad 0.25 \\ \vec{u}_N: \ N - mgsin(\varphi) = ma_N = \frac{mv^2}{\mathcal{R}} & (2) \quad 0.25 \end{cases}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \theta \quad \Rightarrow \begin{cases} \theta = 0 \rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} \\ \theta = \frac{\pi}{3} \rightarrow \varphi = \frac{\pi}{6} \end{cases} \quad 0.25$$



$Rgcos(\varphi)d\varphi = vdv \quad \Rightarrow \quad \int_0^{\frac{\pi}{3}} Rg\, cos(\varphi)d\varphi = \int_{v_B}^{v_M} v.dv$ 0.25

$\Rightarrow 2Rg\, sin(\varphi)|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = v_B^2 - v_0^2 \quad \Rightarrow \quad v_B^2 = 2Rg\left(1 - \frac{1}{2}\right) = Rg$

$$\boxed{v_B = \sqrt{Rg}} \quad 0.25$$

Ou bien : puisque le tronçon est lisse la vitesse v_B est la même que ce soit en montée ou en descente.

- La vitesse au point C :

Sur le tronçon BC rugueux

$-F_f = -\mu mg = m\frac{dv}{dt} \quad \Rightarrow \quad -\mu g = \frac{dv}{dt}$ 0.25

$v_C^2 = v_B^2 - 2\mu g(x_B - x_C) = Rg - 2 * 0.5Rg = 0$ 0.25

$$\boxed{v_C = 0}$$

La particule s'arrête au point C. 0.25