Corrigé type : Communications numériques avancées (M_2 : STLC) 2018/2019

Exo 1 : (8 points)

* Condition d'annulation d'IES :

$\frac{1+\alpha}{2T_s} \leq B \quad (T_s = nT_b)$

$\Rightarrow \frac{1+\alpha}{2 \times n T_b} \leq B$ (0,5)

$\Rightarrow n \geq \frac{(1+\alpha) D_b}{2B} = \frac{1,2 \times 600}{2 \times 300} = 1,2$ bit

$\Rightarrow \boxed{n \geq 2 \text{ bits}}$ (1)

* $M = 2^n$

$\Rightarrow M = 4, 8, 16$ (0,5) (0,5) (0,5)

($M = 2$ ne permet pas une transmission sans IES) (0,5)

* D'après la figure 1 :

pour $D_b = 6.10^6$ bit/s

$\Rightarrow \left(\frac{E_b}{N_0}\right)_{dB} = 12$ (0,5)

* D'après la figure 2 :

pour $\left(\frac{E_b}{N_0}\right)_{dB} = 12$ $\left(P_{eb} = \frac{P_{es}}{n}\right)$

$M = 4$: $P_{es} = 3.10^{-4} \Rightarrow P_{eb} = \frac{3.10^{-4}}{2} = 1,5.10^{-4}$ (1,5)

$M = 8$: $P_{es} = 3.10^{-2} \Rightarrow P_{eb} = \frac{3.10^{-2}}{3} = 10^{-2}$ (1)

$M = 16$: $P_{es} = 2.10^{-1} \Rightarrow P_{eb} = \frac{2.10^{-1}}{4} = 5.10^{-2}$ (1)

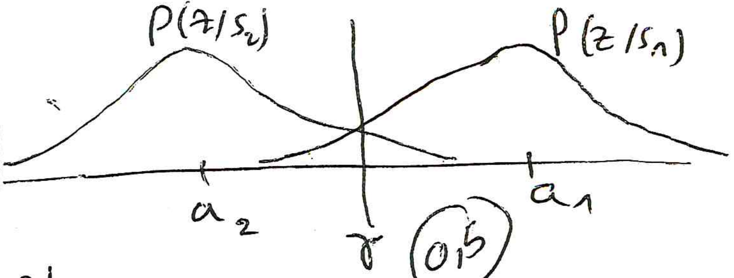
conclusion :

$M = 4$ permet une transmission sans IES avec une probabilité d'erreur minimale P_{eb}. (1)

Exo 2 :

1) $P(z/s_1) = \frac{1}{\sigma_0\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{z-a_1}{\sigma_0}\right)^2\right]$ (0,5)

$P(z/s_2) = \frac{1}{\sigma_0\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{z-a_2}{\sigma_0}\right)^2\right]$ (0,5)



(0,5)

2) a) MAP :

$P(s_1/z) > P(s_2/z)$ on décide H_1

$P(s_2/z) > P(s_1/z)$ on décide H_2

$\Rightarrow P(s_1/z) \underset{H_2}{\overset{H_1}{\gtrless}} P(s_2/z)$ (1)

b) bayes : $P(s_i/z) = \frac{P(z/s_i)P(s_i)}{P(z)}$

$\Rightarrow \frac{P(z/s_1)P(s_1)}{P(z)} \underset{H_2}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{P(z/s_2)P(s_2)}{P(z)}$

On a : $P(s_1) = P(s_2) = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \frac{P(z/s_1)}{P(z/s_2)} \underset{H_2}{\overset{H_1}{\gtrless}} 1$ (1)

c) remplaçant les PDFs :

$$\frac{\frac{1}{\sigma_0\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{z-a_1}{\sigma_0}\right)^2\right]}{\frac{1}{\sigma_0\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{z-a_1}{\sigma_0}\right)^2\right]} \underset{H_2}{\overset{H_1}{\gtrless}} 1$$

$$\Rightarrow \exp\left[\frac{z(a_1-a_2)}{\sigma_0^2} - \frac{a_1^2 - a_2^2}{2\sigma_0^2}\right] \underset{H_2}{\overset{H_1}{\gtrless}} 1$$

d) appliquant le log :

$$\boxed{z \underset{H_2}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{a_1+a_2}{2} = \gamma}$$ (1)

la règle de décision M

3) P_B :

$$P_B = P(e,s_1) + P(e,s_2)$$ 0,5
$$= P(e/s_1)P(s_1) + P(e/s_2)P(s_2)$$
$$= P(e/s_1) = P(e/s_2)$$

$$P_B = P(e/s_2) = P(H_1/s_2)$$ 0,5
$$= \int_{\gamma}^{+\infty} \frac{1}{\sigma_0\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{z-a_2}{\sigma_0}\right)^2\right] dz$$

On a : $Q(x) = \int_x^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du$ 1

On pose : $\frac{z-a_2}{\sigma_0} = u \Rightarrow dz = \sigma_0 du$

$z \to +\infty \Rightarrow u \to +\infty$

$z = \gamma = \frac{a_1+a_2}{2} \Rightarrow u = \frac{z-a_2}{\sigma_0} = \frac{a_1-a_2}{2\sigma_0}$

$$\Rightarrow P_B = \int_{\frac{a_1-a_2}{2\sigma_0}}^{+\infty} \frac{1}{\cancel{\sigma_0}\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) \cancel{\sigma_0}\, du$$

$$\boxed{P_B = Q\left(\frac{a_1-a_2}{2\sigma_0}\right)}$$ 0,5

* $d_{12} = a_1 - a_2$ et $\sigma_0^2 = \frac{N_0}{2} \Rightarrow \sigma_0 = \sqrt{\frac{N_0}{2}}$

$$\Rightarrow \boxed{P_B = Q\left(\sqrt{\frac{d_{12}^2}{2N_0}}\right)}$$ 0,5

* $E_d = (a_1-a_2)^2 \Rightarrow a_1 - a_2 = \sqrt{E_d}$ et $\sigma_0 = \sqrt{\frac{N_0}{2}}$

$$\Rightarrow \boxed{P_B = Q\left(\sqrt{\frac{E_d}{2N_0}}\right)}$$ 0,5

4) s_1 et s_2 sont antipodaux :

$$E_d = \int_0^T [s_1(t) - s_2(t)]^2 dt$$
$$= \int_0^T s_1^2(t)dt + \int_0^T s_2^2(t)dt - 2\int_0^T s_1(t)s_2(t)dt$$ 0,5

$$E_d = E_b + E_b - 2\int_0^T \sqrt{E_b}\psi(t) \cdot (-\sqrt{E_b})\psi(t)$$
$$= 2E_b + 2E_b = 4E_b.$$

$$\Rightarrow \boxed{P_B = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)}$$ 0,5

A.N : $P_B = Q\left(\sqrt{\frac{2\times 2^2}{2}}\right)$
$= Q(2)$

$$\boxed{P_B = 0,02275}$$ 0,5

5) s_1 et s_2 sont orthogonaux :

$$E_d = 2E_b - 2\cancel{\int \sqrt{E_b}\psi_1(t)\sqrt{E_b}\psi_2(t)}^{\,0}$$
$$= 2E_b$$

$$\Rightarrow \boxed{P_B = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)}$$ 0,5

A.N : $P_B = Q\left(\sqrt{\frac{2^2}{2}}\right)$
$= Q(\sqrt{2}) = Q(1,4)$

$$\boxed{P_B = 0,08076}$$ 0,5

6) les performances pour des signaux antipodaux sont meilleurs que les signaux orthogonaux. 0,5