Master 1 : ESEM

Departement d'electro

le 19/01/2019

Correction du contrôle du module Systèmes Asservis numériques

Exercice 1 :

Fonction de transfert en Boucle ouverte

$$G(z) = \frac{K}{(z-0{,}4)(z-0{,}8)}$$

a) la Fonction de transfert du système en boucle fermée

$$H(z) = \frac{G(z)}{1+G(z)} =$$

$$H(z) = \frac{K}{(z-0{,}4)(z-0{,}8)+K}$$

b) le denominateur

$$D(z) = z^2 - 1{,}2z + 0{,}32 + K$$

Critère de Jury : le système est stable si et seulement si les conditions suivantes sont respectés

$$\begin{cases} D(1) > 0 \\ D(-1) < 0 \\ 1 > 0{,}32 + K \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0{,}12 + K > 0 \\ 2{,}52 + K > 0 \\ K < 0{,}68 \end{cases}$$

la condition de stabilité se resume donc à $\boxed{K < 0{,}6}$

c) pour calculer la suite d'echantillons de sortie, exprimons l'equation de recurrence du système à partir de la FT en BF

$$H(z) = \frac{S(z)}{E(z)} = \frac{K}{z^2 - 1{,}2z + 0{,}32 + K}$$

$$= \frac{Kz^{-2}}{1 - 1{,}2z^{-1} + (0{,}32+K)z^{-2}}$$

$\Rightarrow$

$$S(z) - 1{,}2z^{-1}S(z) + (0{,}32+K)z^{-2}S(z) = Kz^{-2}E(z)$$

$\Downarrow TZ^{-1}$

$$S_k = 1{,}2S_{k-1} - (0{,}32+K)S_{k-2} + Ke_{k-2}$$

pour $K = 0{,}3$. On a.

$= 1{,}2 S_{k-1} - 0{,}62 S_{k-2} + 0{,}3 e_{k-2}$

donc pour une entrée unité, on peut calculer les cinqs premiers echantillons de sortie

e_k	1	1	1	1	1
S_k	0	0	0,300	0,660	0,906

Exercice 2:

la Fonction de transfert en Z

$G(P) = A(P)B(P)$

$S^*(P) = G^*(P)\,\mathcal{E}^*(P)$

par l'application de la T en Z

$S(Z) = G(Z)\,\mathcal{E}(Z)$

$= TZ[A(P)B(P)]\,\mathcal{E}(Z)$

$M(P) = K(P)\,S^*(P)$

on a un echantillonneur virtuel sur le signal $m(t)$.

$M^*(P) = K^*(P)\,S^*(P)$

le signal d'ecart echantillonné $\mathcal{E}^*(P)$ s'exprime donc par.

$\mathcal{E}^*(P) = E^*(P) - M^*(P)$

$= E^*(P) - K^*(P)\,S^*(P)$

En Appliquant la T en Z, il vie[nt]

$\mathcal{E}(Z) = E(Z) - K(Z)\,G(Z)\,\mathcal{E}(Z)$

$= E(Z) - K(Z)\,TZ[A(P)B(P)]\,\mathcal{E}(Z)$

d'ou.

$$\frac{\mathcal{E}(Z)}{E(Z)} = \frac{1}{1 + K(Z)\,TZ[A(P)B(P)]}$$

donc la Fonction de transf[ert]

$$\boxed{\frac{S(Z)}{E(Z)} = \frac{TZ[A(P)B(P)]}{1 + K(Z)\,TZ[A(P)B(P)]}}$$

Exercice 3:

Soit un système regi par l'equation d'etat:

$x(K+1) = [A]\,x(K) + (B)\,e(K)$

$y(K) = (C)\,x(K)$

Avec $[A] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$, $(B) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$(C) = (1 \quad 2)$

a) la Fonction de transfert

$G(Z) = (C)(ZI - [A])^{-1}(B)$

$[ZI - A] = \begin{bmatrix} Z & 0 \\ 0 & Z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} Z & -1 \\ 2 & Z+3 \end{bmatrix}$

$$\det[zI-A]=\det\begin{bmatrix} z & -1 \\ 2 & z+3 \end{bmatrix}$$

$$= z(z+3)+2 = z^2+3z+2$$

$$= (z+1)(z+2)$$

$$(zI-A)^{-1} = \frac{1}{(z+1)(z+2)}\begin{bmatrix} z+3 & -2 \\ 1 & z \end{bmatrix}^T$$

$$= \frac{1}{(z+1)(z+2)}\begin{bmatrix} z+3 & 1 \\ -2 & z \end{bmatrix}$$

donc

$$G(z) = \frac{1}{(z+1)(z+2)}\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} z+3 & 1 \\ -2 & z \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{(z+1)(z+2)}\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z+4 \\ z-2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{(z+1)(z+2)}(z+4+2z-4)$$

don FT en z :

$$\boxed{G(z) = \frac{3z}{(z+1)(z+2)}}$$

b) la commandabilité

$$C = [B \quad AB] =$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

donc la matrice de commandabilité est :

$$C = [B \quad AB] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\det C = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$$

le système est commandable

la matrice d'observabilit

$$O = [C \quad CA]^T$$

$$CA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} = (-$$

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\det O = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -5 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

le système est donc observable.