

Université Mohammed V .  
Faculté Des Sciences  
Département De Mathématiques  
Avenue Ibn Batouta, B.P 1014, Rabat, Maroc

Année 2014-2015.

**Filière :**

Sciences Mathématiques Informatique et Applications (SMIA)  
Module Algèbre III  
Cours Algèbre III

**ALAMI IDRISI ALI**  
**BENLARBI-DELAÏ M' HAMMED**  
**JABBOURI ELMOSTAFA**

## Table des matières

### Chapitre 1 : Systèmes linéaires-Méthode du pivot

#### Introduction

1. Systèmes linéaires
2. Systèmes linéaires homogènes

### Chapitre 2 : Espaces vectoriels

1. I.Généralités
  - (a) Structure d'espace vectoriel
  - (b) Sous-espaces vectoriels
  - (c) Sous-espace vectoriel engendré par une partie
  - (d) Partie libre et partie liée.Base.
  - (e) Somme de sous espaces vectoriels.
2. II.Applications linéaires
  - (a) Généralités.
  - (b) Structure des endomorphismes.

### Chapitre 3 : Espaces vectoriels de dimension finie

1. Généralités
  - (a) Lemme fondamental
  - (b) Existence d'une base-dimension d'un espace vectoriel
  - (c) Théorème de la base incomplète
  - (d) Dimension d'un sous-espace vectoriel
  - (e) Rang d'un système de vecteurs
2. Somme de sous-espaces vectoriels
  - (a) Somme directe de deux sous-espaces
  - (b) Sous-espaces supplémentaires
  - (c) Cas de la dimension finie
3. Applications linéaires
  - (a) Généralités
  - (b) Applications linéaires
  - (c) Image et noyau d'une application linéaire
  - (d) Théorème de la dimension
  - (e) Structure d'espace vectoriel de  $\mathcal{L}(E, F)$
  - (f) Algèbre  $\mathcal{L}(E)$
  - (g) Les projecteurs

### Chapitre 4 : Matrices

1. Matrices associées aux applications linéaires

2. Matrice colonne associé à un vecteur
3. Matrice de l'inverse d'une application linéaire
4. Changement de bases
5. Rang d'une matrice
6. Matrices remarquables

# Chapitre 1

## SYSTEMES LINEAIRES-METHODE DU PIVOT

### INTRODUCTION

De nombreux problèmes mathématiques peuvent être traduits par des équations algébriques et notamment par des systèmes linéaires. L'objet du chapitre est la présentation de la méthode du pivot dans un corps commutatif  $\mathbb{K}$ , appelée aussi méthode d'élimination de Gauss, et qui permet la résolution de tels systèmes. Dans ce chapitre, le corps  $\mathbb{K}$  désigne  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$ , ou  $\mathbb{C}$ .

## 1. Systèmes linéaires

### 1.1. Définition

#### Définition 1

Un système linéaire est la donnée d'un nombre fini d'équations linéaires telles que :

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{lcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \quad (\leftarrow \text{équation 1}) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \quad (\leftarrow \text{équation 2}) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + \cdots + a_{in}x_n & = & b_i \quad (\leftarrow \text{équation } i) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + a_{p3}x_3 + \cdots + a_{pn}x_n & = & b_p \quad (\leftarrow \text{équation } p) \end{array} \right.$$

Les éléments  $x_1, x_2, \dots, x_n$  sont les inconnues du système (1).

Les termes  $a_{ij}, b_i$  pour  $1 \leq i \leq p$  et  $1 \leq j \leq n$  sont donnés dans le corps  $IK$  et s'appellent respectivement les coefficients et les seconds membres du système (1).

Résoudre le système (1), c'est déterminer l'ensemble  $S$  de toutes les solutions. Nous allons montrer que si  $S$  n'est pas vide, il est soit réduit à un singleton, soit c'est un ensemble infini.

## 1.2. Exemples

### Exemple 1

En se plaçant dans  $\mathbb{R}$ , nous cherchons à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 2x & -y & +4z & = & -4 & (L_1) \\ 3x & 2y & -3z & = & 17 & (L_2) \\ 5x & -3y & +8z & = & -10 & (L_3) \end{cases}$$

Notons  $L_1, L_2, L_3$  les trois lignes de ce système. Remplaçons la ligne  $L_2$  par  $L'_2 = 2L_2 - 3L_1$  puis  $L_3$  par  $L'_3 = 2L_3 - 5L_1$ , nous obtenons le système :

$$\begin{cases} 2x & -y & +4z & = & -4 & (L_1) \\ & 7y & -18z & = & 46 & (L'_2) \\ & -y & -4z & = & 0 & (L'_3) \end{cases}$$

Remplaçons la nouvelle ligne  $L'_3$  par  $L''_3 = 7L'_3 + L'_2$ , on a alors :

$$\begin{cases} 2x & -y & +4z & = & -4 & (L_1) \\ & 7y & -18z & = & 46 & (L'_2) \\ & & -46z & = & 46 & (L''_3) \end{cases}$$

Nous obtenons la solution du système en remontant les lignes :  $z = -1, y = 4, x = 2$  et  $S = \{(2, 4, -1)\}$

### Exemple 2

Soit le système :

$$\begin{cases} 2x & -y & +z & = & 4 & (L_1) \\ 3x & 2y & -2z & = & 5 & (L_2) \\ -x & +y & -z & = & 2 & (L_3) \end{cases}$$

Notons  $L_1, L_2, L_3$  les trois lignes de ce système. Remplaçons la ligne  $L_2$  par  $L'_2 = 2L_2 - 3L_1$  puis  $L_3$  par  $L'_3 = 2L_3 + L_1$ , nous obtenons le système :

$$\begin{cases} 2x & -y & +z & = & 4 & (L_1) \\ & 7y & -7z & = & -2 & (L'_2) \\ & +y & -z & = & 8 & (L'_3) \end{cases}$$

Remplaçons la nouvelle ligne  $L'_3$  par  $L''_3 = 7L'_3 + L'_2$ , on a alors :

$$\begin{cases} 2x & -y & +z & = & 4 & (L_1) \\ & 7y & -7z & = & -2 & (L'_2) \\ & & 0 & = & 58 & (L''_3) \end{cases}$$

ce qui est impossible. Par conséquent le système proposé n'a pas de solution soit  $S = \emptyset$ .

**Exemple 3**

Déterminons toutes les solutions du système à quatre inconnues et à trois équations :

$$\begin{cases} x & -y & +z & +t & = & 2 & (L_1) \\ 2x & -y & +2z & -t & = & 3 & (L_2) \\ 3x & +y & +z & -2t & = & 5 & (L_3) \end{cases}$$

En procédant de façon analogue aux exemples 1 et 2 , nous pouvons "éliminer" les coefficients de la variable  $x$  des lignes  $L_2$  et  $L_3$  , ce qui donne le système :

$$\begin{cases} x & -y & +z & +t & = & 2 & (L_1) \\ & y & & -3t & = & -1 & (L'_2) \\ & +4y & -2z & -5t & = & -1 & (L'_3) \end{cases}$$

Ensuite nous remplaçons la ligne  $L'_3$  par  $L''_3 = L'_3 - 4L'_2$  , d'où le système final :

$$\begin{cases} x & -y & +z & +t & = & 2 & (L_1) \\ & y & & -3t & = & -1 & (L'_2) \\ & & -2z & +7t & = & 3 & (L''_3) \end{cases}$$

Ainsi le système admet une infinité de solutions ( une droite affine dans  $\mathbb{R}^3$ ) qui s'écrivent sous forme paramétrique , le paramètre étant la variable libre  $t$  :

$$\begin{cases} x = & -\frac{3}{2}t + \frac{5}{2} \\ y = & 3t - 1 \\ z = & \frac{7}{2}t + \frac{5}{2} \end{cases}$$

d'où  $S = \{(-\frac{3}{2}t + \frac{5}{2}, 3t - 1, \frac{7}{2}t + \frac{5}{2}) / t \in \mathbb{R}\}$ .

A travers les exemples traités, il apparaît que la méthode du pivot est basée sur les propriétés des systèmes linéaires , elle permet à la fois d'assurer l'existence des solutions mais aussi leur détermination :

**Opérations élémentaires** : L'ensemble des solutions d'un système linéaire reste inchangé si l'on procède aux opérations suivantes :

- La modification de l'ordre des équations ;
- La multiplication d'une ligne par une constante non nulle du corps  $\mathbb{K}$  ;
- L'addition à une ligne donnée d'une combinaison linéaire des autres lignes.

**1.3. Méthode du pivot**

Considérons le système linéaire :

$$(1) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 & (\leftarrow \text{équation 1}) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 & (\leftarrow \text{équation 2}) \\ \vdots & \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + \dots + a_{in}x_n = b_i & (\leftarrow \text{équation } i) \\ \vdots & \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + a_{p3}x_3 + \dots + a_{pn}x_n = b_p & (\leftarrow \text{équation } p) \end{cases}$$

On commence par modifier l'ordre des équations ( si c'est nécessaire ) pour que le pivot du système (à savoir le coefficient  $a_{11}$ ), soit non nul. Ensuite, la première étape consiste à "éliminer" les coefficients  $a_{21}, \dots, a_{p1}$ . Pour cela, nous remplaçons les lignes  $L_2, \dots, L_p$  par les lignes  $L'_2 = a_{11}L_2 - a_{21}L_1, \dots, L'_p = a_{11}L_p - a_{p1}L_1$ . Nous obtenons un système ayant le même ensemble de solutions, il est donné par :

$$(2) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ 0x_1 + a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \dots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \vdots & \\ 0x_1 + a'_{i2}x_2 + a'_{i3}x_3 + \dots + a'_{in}x_n = b'_i \\ \vdots & \\ 0x_1 + a'_{p2}x_2 + a'_{p3}x_3 + \dots + a'_{pn}x_n = b'_p \end{cases}$$

Nous appliquons la méthode d'élimination explicitée ci-dessus au sous système de (2) représenté par les lignes  $L'_2, \dots, L'_p$ . Et ainsi de suite, l'opération donne à la fin un système équivalent de la forme suivante :

$$(s) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ 0x_1 + a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \dots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \vdots & \\ \vdots & \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + \dots + a^{(s-1)}_{ps}x_s + \dots + a^{(s-1)}_{pn}x_n = b^{(s-1)}_p \end{cases}$$

où tous les coefficients  $a_{11}, a'_{22}, \dots, a^{(s-1)}_{ps}$  sont non nuls, ce sont les pivots successifs.

### Remarque 1

Si en appliquant la méthode du pivot, nous obtenons une équation de la forme  $0 = b$ , avec  $b$  non nul, nous pouvons affirmer que le système (1) n'a pas de solution.

L'étude du système (s) donne lieu à deux possibilités :

– 1<sup>er</sup> cas :  $p = s = n$

Le système (s) devient triangulaire :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ 0x_1 + a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \dots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \vdots & \\ \vdots & \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + \dots + a^{(s-1)}_{pn}x_n = b^{(s-1)}_p \end{cases}$$

La dernière équation permet de calculer l'inconnue  $x_n$ . Et de proche en proche en remontant les équations nous pouvons calculer successivement les variables  $x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_1$  (voir l'exemple 1). Le système admet une solution et une seule.

– 2<sup>ème</sup> cas :  $p = s < n$

Les inconnues  $x_1, x_2, \dots, x_p$  dites principales, s'expriment en fonction des inconnues restantes  $x_{p+1}, x_{p+2}, \dots, x_n$  appelées variables libres. Nous obtenons une infinité de solutions dans ce cas.

## 2. Systèmes linéaires homogènes

### Définition 2

Un système linéaire est dit homogène si les seconds membres de (1) sont nuls, c'est à dire :

$$(1') \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = 0 & (\leftarrow \text{équation 1}) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = 0 & (\leftarrow \text{équation 2}) \\ \vdots & \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + \dots + a_{in}x_n = 0 & (\leftarrow \text{équation } i) \\ \vdots & \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + a_{p3}x_3 + \dots + a_{pn}x_n = 0 & (\leftarrow \text{équation } p) \end{cases}$$

### Remarque 2

- Le  $n$ -uplet  $(0, \dots, 0)$  est toujours une solution de (1').
- La solution générale  $(x_1, \dots, x_n)$  du système (1), est la somme d'une solution particulière  $(y_1, \dots, y_n)$  du système (1) et de la solution générale  $(z_1, \dots, z_n)$  du système (1').
- Un système linéaire homogène avec plus d'inconnues que d'équations ( $n > p$ ) admet une infinité de solutions non nulles.



# Chapitre 2

## ESPACES VECTORIELS

La notion d'espace vectoriel est une structure fondamentale des mathématiques modernes. Il s'agit de dégager les propriétés communes que partagent des ensembles pourtant très différents. Par exemple, on peut additionner deux vecteurs du plan, et aussi multiplier un vecteur par un réel (pour l'agrandir ou le rétrécir). Mais on peut aussi additionner deux fonctions, ou multiplier une fonction par un réel. Même chose avec les polynômes, les matrices,... Le but est d'obtenir des théorèmes généraux qui s'appliqueront aussi bien aux vecteurs du plan, de l'espace, aux espaces de fonctions, aux polynômes, aux matrices,...

Dans ce chapitre et dans les suivants,  $\mathbb{K}$  désignera un corps commutatif quelconque (le plus souvent  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ).

### 1. Généralités

#### 1.1. Structure d'espace vectoriel

##### Définition 3

On appelle espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$  ou encore  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, tout ensemble  $E$  muni de deux lois :

1. Une loi interne appelée addition, notée  $+$  telle que  $(E, +)$  soit un groupe abélien.
2. Une loi externe qui à tout couple  $(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E$  fait correspondre un élément de  $E$  noté  $\lambda.x$ , cette loi vérifiant les quatre propriétés suivantes :
  - (a)  $\forall x \in E \quad 1.x = x$
  - (b)  $\forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \forall x, y \in E \quad \lambda.(x + y) = \lambda.x + \lambda.y$
  - (c)  $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} \quad \forall x \in E \quad (\lambda + \mu).x = \lambda.x + \mu.x$
  - (d)  $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} \quad \forall x \in E \quad (\lambda\mu).x = \lambda.(\mu.x)$

Les éléments de  $E$  s'appellent vecteurs, ceux de  $\mathbb{K}$  scalaires.

##### Exemple 4

1. Soit  $\mathbb{K}^n$  l'ensemble des  $n$ -uplets  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  d'éléments de  $\mathbb{K}$ . Munissons  $\mathbb{K}^n$  des lois suivantes :

- Une addition définie par  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) + (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \dots, \alpha_n + \beta_n)$
- Une loi externe définie par  $\lambda.(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \dots, \lambda\alpha_n)$

Il est facile de vérifier que  $(\mathbb{K}^n, +, \cdot)$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$ .

2. L'ensemble  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  des matrices carrées d'ordre  $n$  à coefficients dans  $\mathbb{K}$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Les lois sont définies par :

$$(a_{i,j}) + (b_{i,j}) = (a_{i,j} + b_{i,j}) \text{ et } \lambda.(a_{i,j}) = (\lambda a_{i,j})$$

3. Si  $E$  et  $F$  sont des espaces vectoriels sur  $\mathbb{K}$ , on peut munir  $E \times F$  d'une structure naturelle de  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, en définissant ainsi les opérations :

$$\forall (x, y), (x', y') \in E \times F \quad (x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$$

$$\forall (x, y) \in E \times F \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \lambda.(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$$

L'ensemble  $E \times F$  muni de ces deux lois s'appelle l'espace vectoriel produit de  $E$  par  $F$ .

4. L'ensemble  $\mathbb{K}[X]$  des polynômes à coefficients dans  $\mathbb{K}$  muni des lois classiques :  $(P, Q) \rightarrow P + Q$  et  $(\lambda, P) \rightarrow \lambda P$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$ .

5. Soit  $D$  un ensemble quelconque, et  $\mathcal{A}(D, \mathbb{K})$  l'ensemble des applications de  $D$  dans  $\mathbb{K}$ . Munissons  $\mathcal{A}(D, \mathbb{K})$  des lois suivantes : Pour tout  $f, g \in \mathcal{A}(D, \mathbb{K})$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$

$$f + g : x \rightarrow f(x) + g(x), \quad \lambda.f : x \rightarrow \lambda f(x)$$

Il n'est pas difficile de vérifier que  $\mathcal{A}(D, \mathbb{K})$  muni de ces deux lois  $\mathcal{A}(D, \mathbb{K})$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$  (appelé espace des applications de  $D$  dans  $\mathbb{K}$ ).

On peut noter les cas particuliers suivants :

(a)  $D = \mathbb{N}, \mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathcal{A}(D, \mathbb{K})$  est l'espace vectoriel réel des suites réelles.

(b)  $D = \mathbb{N}, \mathbb{K} = \mathbb{C}, \mathcal{A}(D, \mathbb{K})$  est l'espace vectoriel complexe des suites complexes.

(c)  $D \subset \mathbb{R}, \mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathcal{A}(D, \mathbb{K})$  est l'espace vectoriel réel des fonctions numériques, de variable réelle, définies sur le domaine  $D$ .

## Calcul dans un espace vectoriel

La proposition suivante montre qu'il n'y a absolument aucune surprise et que l'on calcule en fait comme dans toute structure algébrique classique.

### **Proposition 1**

1.  $\forall x, y \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda.(x - y) = \lambda.x - \lambda.y.$
2.  $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda.0 = 0.$
3.  $\forall y \in E, \lambda \in \mathbb{K}, \lambda.(-y) = -\lambda.y.$
4.  $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall x \in E, (\lambda - \mu).x = \lambda.x - \mu.x.$
5.  $\forall \mu \in \mathbb{K}, \forall x \in E, (-\mu).x = -\mu.x.$

$$6. \forall x \in E, 0.x = 0.$$

$$7. \forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda.x = 0 \iff \lambda = 0 \text{ ou } x = 0.$$

### Démonstration

1). On a  $\lambda(x - y) + \lambda y = \lambda((x - y) + y) = \lambda x$ . 2) On fait  $x = y$  dans (1). 3) On fait  $x = 0$  dans (1). 4) On a  $(\lambda - \mu)x + \mu x = ((\lambda - \mu) + \mu)x = \lambda x$ . 5) On fait  $\lambda = 0$  dans (4). 6) On fait  $\lambda = \mu$  dans (4). 7) En effet, supposons que  $\lambda x = 0$ . Si  $\lambda = 0$ , on a gagné. Sinon  $\lambda$  est inversible dans le corps  $\mathbb{K}$  et on a par multiplication par  $\lambda^{-1}$  :  $\lambda^{-1}(\lambda x) = \lambda^{-1}0 = 0$ , d'où  $1.x = 0$ , i.e  $x = 0$ .

## Exercices

1. Justifier si les objets suivants sont des espaces vectoriels.

- L'ensemble des fonctions réelles sur  $[0, 1]$ , continues, positives ou nulles, pour l'addition et le produit par un réel.
- L'ensemble des fonctions réelles sur  $\mathbb{R}$  vérifiant  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$  pour les mêmes opérations.
- L'ensemble des fonctions sur  $\mathbb{R}$  telles que  $f(3) = 7$ .
- L'ensemble  $\mathbb{R}_+^*$  pour les opérations  $x \oplus y = xy$  et  $\lambda \cdot x = x^\lambda$  ( $\lambda \in \mathbb{R}$ ).
- L'ensemble des points  $(x, y)$  de  $\mathbb{R}^2$  vérifiant  $\sin(x + y) = 0$ .
- L'ensemble des vecteurs  $(x, y, z)$  de  $\mathbb{R}^3$  orthogonaux au vecteur  $(-1, 3, -2)$ .
- L'ensemble des fonctions de classe  $\mathcal{C}^2$  vérifiant  $f'' + f = 0$ .
- L'ensemble des fonctions continues sur  $[0, 1]$  vérifiant  $\int_0^1 f(x) \sin x \, dx = 0$ .
- L'ensemble des matrices  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$  vérifiant  $a + d = 0$ .

## 1.2. Sous-espaces vectoriels

### Définition 4

Soit  $(E, +, \cdot)$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$  et  $F$  une partie non vide de  $E$ . On dira que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  (en abrégé s.e.v) si :

- $F$  est stable pour les deux lois  $+$  et  $\cdot$ .
- $F$  muni des deux lois induites  $+$  et  $\cdot$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Le théorème suivant donne une caractérisation des sous-espaces vectoriels. Dans la pratique, pour montrer qu'une partie  $F$  d'un espace vectoriel de référence  $E$ , est un espace vectoriel il suffit de montrer que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

### Théorème 1

Soit  $F$  une partie non vide d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ . Les propositions suivantes sont équivalentes :

- $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

$$2. \forall x, y \in E, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \lambda.x + \mu.y \in F.$$

### Démonstration

Il est clair que  $1) \implies 2)$ . Inversement, supposons qu'on ait 2). Prenons  $\lambda = 1$  et  $\mu = -1$ . alors  $x \in F$  et  $y \in F$  entraînent que  $x - y \in F$ . Donc  $F$  est un sous-groupe additif de  $E$ . Prenons ensuite  $\mu = 0$ . Alors  $\lambda \in \mathbb{K}$  et  $x \in F$  entraînent  $\lambda x \in F$ .

### Exemple 5

1. Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Les parties  $\{0\}$  et  $E$  sont des sous-espaces vectoriels de  $E$  appelés sous-espaces triviaux.
2. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . L'ensemble  $\mathbb{K}_n[X]$  des polynômes à coefficients dans  $\mathbb{K}$  de degré inférieur ou égal à  $n$  est un s.e.v de  $\mathbb{K}[X]$ .
3. L'intersection quelconque d'une famille de s.e.v d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  est un s.e.v de  $E$ .
4. L'analyse fournit de nombreux exemples de s.e.v de  $\mathcal{A}(I, \mathbb{R})$ , où  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ . Entre autres :
  - (a) L'ensemble  $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$  des applications continues sur  $I$ .
  - (b) L'ensemble  $\mathcal{D}(I, \mathbb{R})$  des applications dérivables sur  $I$ .
  - (c) Pour tout  $n \geq 1$ , l'ensemble  $\mathcal{D}_n(I, \mathbb{R})$  des applications  $n$  fois dérivables sur  $I$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{A}(I, \mathbb{R})$ . L'intersection de tous ces sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel noté  $\mathcal{D}^\infty(I, \mathbb{R})$ , espace vectoriel des fonctions indéfiniment dérivables sur  $I$ .
  - (d) Pour tout  $n \geq 1$ , l'ensemble  $\mathcal{C}_n(I, \mathbb{R})$  des applications  $\mathcal{C}_n$  sur  $I$ .
5. Il y a évidemment des parties de  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels qui ne sont pas des sous-espaces vectoriels. Notons en particulier :
  - (a) L'ensemble des polynômes de degré exactement  $n$  n'est pas un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{K}[X]$ .
  - (b) L'ensemble des fonctions positives ou nulles (resp. négatives ou nulles) définies sur une partie  $D$  de  $\mathbb{R}$ , n'est pas un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{A}(D, \mathbb{R})$ .

### Exercices

Parmi les ensembles suivants, reconnaître ceux qui sont des sous-espaces vectoriels :

1.  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0\}$
2.  $\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = t \text{ et } y = z\}$
3.  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 1\}$
4.  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + xy \geq 0\}$
5.  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \geq 1\}$
6.  $\{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(0) = 1\}$

7.  $\{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(1) = 0\}$
8.  $\{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f \text{ est croissante} \}$
9.  $\{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid (u_n) \text{ tend vers } 0\}$

### 1.3. Sous-espace engendré par une partie

#### Définition 5

Soit  $(x_1, \dots, x_n)$  un système fini de vecteurs d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ . Un vecteur  $x \in E$  est dit combinaison linéaire des vecteurs  $x_1, \dots, x_n$  si l'on peut trouver un système  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  de scalaires, tel que

$$x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n.$$

Les scalaires  $\lambda_i$  sont nommés coefficients de la combinaison linéaire  $x$ .

#### Exemple 6

1. Le vecteur 0 est combinaison linéaire de toute famille finie de vecteurs, les coefficients étant nuls.
2. Tout vecteur  $x$  est combinaison linéaire de tout système de vecteurs contenant  $x$ , le coefficient de  $x$  étant 1, tous les autres égaux à 0.
3. Dans l'espace vectoriel  $\mathbb{K}^3$  sur le corps  $\mathbb{K}$ , soit le triplet  $(e_1, e_2, e_3)$  où  $e_1 = (1, 0, 0)$ ,  $e_2 = (0, 1, 0)$ ,  $e_3 = (0, 0, 1)$ . Tout vecteur  $(a, b, c)$  de  $\mathbb{K}^3$  est combinaison linéaire des vecteurs  $e_1, e_2, e_3$  car :  $(a, b, c) = a e_1 + b e_2 + c e_3$

#### Théorème 2

Soit  $(x_1, \dots, x_n)$  un système fini de vecteurs d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ . L'ensemble  $F$  des combinaisons linéaires des vecteurs  $x_1, \dots, x_n$  est un s.e.v de  $E$ ; c'est le plus petit s.e.v (pour l'inclusion) de  $E$  contenant les vecteurs  $x_1, \dots, x_n$ .  $F$  est dit sous-espace engendré par les vecteurs  $x_1, \dots, x_n$  et il est noté :

$$F = Vect(x_1, \dots, x_n) = \{\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n \mid \lambda_1 \dots \lambda_n \in \mathbb{K}\}$$

#### Démonstration

Partons de deux éléments de  $F$  :

$$x = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n, \quad y = \beta_1 x_1 + \dots + \beta_n x_n$$

Quels que soient les scalaires  $\alpha$  et  $\beta$ , on a :

$$\alpha x + \beta y = (\alpha \alpha_1 + \beta \beta_1) x_1 + \dots + (\alpha \alpha_n + \beta \beta_n) x_n$$

On obtient une combinaison linéaire du système proposé, donc un élément de  $F$  qui est, par conséquent, sous-espace vectoriel de  $E$ .

$F$  contient évidemment chacun des  $x_i$  du système  $(x_1, \dots, x_n)$ . D'autre part, tout sous-espace,

contenant les vecteurs  $x_1, \dots, x_n$ , doit contenir aussi la somme  $\lambda_1.x_1 + \dots \lambda_n.x_n$  pour tout  $n$ -uplets de scalaires  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ . Un tel sous-espace contient donc  $F$  qui est, par conséquent, le plus petit sous-espace contenant les vecteurs  $x_1, \dots, x_n$ .

### Définition 6

Un système fini  $(x_1, \dots, x_n)$  de vecteurs d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  est dit générateur de  $E$  (ou aussi engendre  $E$ ) si  $E = Vect(x_1, \dots, x_n)$ . En d'autres termes :

$$\forall x \in E, \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}, / x = \lambda_1.x_1 + \dots + \lambda_n.x_n.$$

### Exemple 7

1.  $\mathbb{K}^n$  est engendré par les  $n$ -uplets  $(1, 0, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, 0, 0, \dots, 1)$ .
2. Soit  $n$  un entier. Dans  $\mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  les fonctions  $1, x, x^2, \dots, x^n$  engendrent le sous-espace vectoriel des fonctions polynômiales de degré inférieur ou égal à  $n$ .

### Théorème 3

Soit  $A$  une partie d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ . L'ensemble  $H$  des combinaisons linéaires finies d'éléments de  $A$  est un s.e.v de  $E$  ; c'est le plus petit s.e.v (pour l'inclusion) de  $E$  contenant  $A$ .  $H$  est dit sous-espace engendré par la partie  $A$ , il est noté :

$$Vect(A) = \{\lambda_1.x_1 + \dots + \lambda_n.x_n : x_1 \dots x_n \in A \quad n \geq 1\}$$

### Exemple 8

1.  $\mathbb{K}[X]$  est engendré par la partie  $\{1, X, \dots, X^n, \dots\}$ .
2. Soient  $(E_n)$  une suite croissante de s.e.v d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ . Si  $G_n$  est un système générateur de  $E_n$ , alors  $E = \cup_n E_n$  est un s.e.v de  $E$  admettant  $\cup_n G_n$  comme partie génératrice.

## Exercices

1. Montrer que le système  $(u, v, w)$  est un système générateur de  $\mathbb{R}^3$  avec  $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
2. Peut-on trouver  $t \in \mathbb{R}$  tel que le vecteur  $\begin{pmatrix} 1 \\ 3t \\ t \end{pmatrix}$  soit une combinaison linéaire de  $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  ?

## 1.4. Partie libre - Partie liée

### Définition 7

1. On dit qu'un système fini  $(x_1, \dots, x_n)$  de vecteurs d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  est libre si toute combinaison linéaire de  $x_1, \dots, x_n$  est triviale càd :

$$\text{Si } \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K} \text{ tels que } \lambda_1.x_1 + \dots + \lambda_n.x_n = 0, \text{ alors } \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0.$$

2. On dit qu'un système fini  $(x_1, \dots, x_n)$  de vecteurs d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  est lié s'il n'est pas libre. Ce qui revient à dire qu'il existe des scalaires  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  non tous nuls tels que :

$$\lambda_1.x_1 + \dots + \lambda_n.x_n = 0.$$

### Propriété 1

1. Tout vecteur non nul est libre.
2. Tout système contenu dans un système fini libre est libre.
3. Tout système contenant le vecteur nul est lié.
4. Tout système fini contenant un système lié est lié.

### Proposition 2

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Le système  $(x_1, \dots, x_n)$  est lié, si et seulement si, l'un au moins des vecteurs  $x_i$  s'exprime comme combinaison linéaire des autres vecteurs.

### Démonstration

Supposons que le système  $(x_1, \dots, x_n)$  est lié, il existe donc un système  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  de scalaires non tous nuls tel que  $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = 0$ . Soit alors  $\lambda_i \neq 0$ , il est inversible dans  $\mathbb{K}$  et on peut écrire :

$$x_i = \lambda_i^{-1} \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_i^{-1} \lambda_{i-1} x_{i-1} + \lambda_i^{-1} \lambda_{i+1} x_{i+1} + \dots + \lambda_i^{-1} \lambda_n x_n.$$

Inversement l'autre implication est évidente.

### Définition 8

1. On dit qu'une partie  $A$  d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  est libre si tout système fini d'éléments distincts de  $A$  est libre, c-à-d :

$\forall n \geq 1, \forall x_1, \dots, x_n \in A, \forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$  tels que  $\lambda_1.x_1 + \dots + \lambda_n.x_n = 0$ , on a :

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0.$$

2. On dit qu'une partie  $A$  de  $E$  est liée si elle n'est pas libre. Autrement dit, il existe un système fini de vecteurs de  $A$  qui soit lié.

### Exemple 9

1. La partie  $\{1, X, \dots, X^n, \dots\}$  est libre dans  $\mathbb{K}[X]$
2. La partie formée des applications  $f_n$  définies par  $f_n(x) = e^{nx}$  est libre dans  $\mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

## 1.5. Somme de sous-espaces vectoriels

Il est à noter que la réunion de deux s.e.v d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel n'est pas en général un s.e.v. Pour remédier à cet inconvénient nous allons remplacer l'union des s.e.v par une opération plus convenable qui est la somme des s.e.v.

### Définition 9

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, de dimension finie ou non,  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ . On appelle somme de  $F$  et  $G$  l'ensemble, noté  $F + G$ , défini par :

$$F + G = \{z \in E \mid \exists x \in F, y \in G, z = x + y\}.$$

### Proposition 3

La somme  $F + G$  de deux s.e.v d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  est un s.e.v de  $E$ . De plus c'est le plus petit s.e.v de  $E$  (au sens de l'inclusion) contenant  $F \cup G$ .

### Démonstration

Soient deux éléments  $x + y$  et  $x' + y' \in F + G$  avec  $x, x' \in F$  et  $y, y' \in G$  et soit  $\alpha$  et  $\beta$  deux scalaires, on a  $\alpha(x + y) + \beta(x' + y') = (\alpha x + \beta x') + (\alpha y + \beta y') \in F + G$ . Donc  $F + G$  est un s.e.v de  $E$ . Il est clair que  $F + G$  contient  $F$  et  $G$ , donc  $F \cup G$ . D'autre part, tout sous-espace, contenant  $F \cup G$ , doit contenir aussi la somme  $x + y$  avec  $x \in F$  et  $y \in G$ . Un tel sous-espace contient donc  $F + G$  qui est, par conséquent, le plus petit sous-espace contenant  $F \cup G$ .

### Définition 10

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $F, G$  deux s.e.v de  $E$ . On dit que la somme  $F + G$  est directe et on note  $F \oplus G$ , si tout élément de  $F + G$  s'écrit d'une manière unique sous la forme  $x + y$  avec  $x \in F$  et  $y \in G$ .

### Proposition 4

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $F, G$  deux s.e.v de  $E$ . Il y a équivalence entre :

1.  $F + G$  est directe.
2.  $F \cap G = \{0\}$ .
3.  $x + y = 0$  avec  $x \in F$  et  $y \in G \implies x = y = 0$ .

### Démonstration

- 1)  $\implies$  2) Si  $z \in F \cap G$ ,  $z$  peut s'écrire  $z = z + 0 = 0 + z$ . La décomposition étant unique,  $z = 0$ .
- 2)  $\implies$  3) Si  $x + y = 0$  avec  $x \in F$  et  $y \in G$ , alors  $x = -y \in F \cap G = \{0\}$ . 3)  $\implies$  1) Si  $x + y = x' + y'$  avec  $x, x' \in F$  et  $y, y' \in G$ , alors on a  $(x - x') + (y - y') = 0$  avec  $x - x' \in F$  et  $y - y' \in G$ ; donc  $x = x'$  et  $y = y'$ .



**Définition 11**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $F, G$  deux s.e.v de  $E$ . On dit  $F$  et  $G$  sont supplémentaires, et on note  $E = F \oplus G$ , si tout élément de  $E$  s'écrit d'une manière unique sous la forme  $x + y$  avec  $x \in F$  et  $y \in G$ .

En d'autre termes,  $E = F \oplus G$  si les deux conditions suivantes sont réalisées :

1.  $E = F + G$ .
2. La somme  $F + G$  est directe (i.e  $F \cap G = \{0\}$ ).

**Exemple 10**

- Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel muni d'une base finie  $(e_1, \dots, e_n)$ . Alors  $E = F \oplus G$  avec  $F = \text{vect}(e_1, \dots, e_i)$  et  $G = \text{vect}(e_{i+1}, \dots, e_n)$ ,  $i \in \{1, \dots, n-1\}$ .
- On a  $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = F \oplus G$ , avec  $F$  ( respectivement  $G$  ) l'espace des applications paires (respectivement impaires ).

**Définition 12**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et soit  $F$  un s.e.v de  $E$ . On appelle supplémentaire de  $F$  (sous-entendu dans  $E$ ) tout s.e.v  $G$  de  $E$  vérifiant  $E = F \oplus G$ .

## 2. Les Applications Linéaires.

### 2.1. Généralités

**Définition 13**

Soient  $E$  et  $E'$  deux espaces vectoriels sur  $\mathbb{K}$  et  $f$  une application de  $E$  dans  $E'$ . On dit que  $f$  est linéaire, si :

1.  $f(v + w) = f(v) + f(w)$ ,  $\forall v, w \in E$ .
2.  $f(\lambda v) = \lambda f(v)$ ,  $\forall v \in E$ ,  $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ .

Si de plus  $f$  est bijective,  $f$  est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

L'ensemble des applications linéaires de  $E$  dans  $E'$  est noté  $\mathcal{L}(E, E')$ . Une application linéaire de  $E$  dans  $E$  est appelé endomorphisme de  $E$ . L'ensemble des endomorphismes de  $E$  est noté  $\mathcal{L}(E)$ .

**Remarque 3**

Pour toute application linéaire  $f$ , on a  $f(0) = 0$  puisque  $f$  est un homomorphisme de groupes. (On a :  $f(x) = f(x + 0) = f(x) + f(0)$  ).

**Exemple 11**

1. L'application  $f : E \rightarrow E'$  qui associe à un élément  $v \in E$ , le vecteur nul est linéaire ; elle est dite l'application nulle.
2. L'application  $id_E : E \rightarrow E$  qui associe à un élément  $v \in E$ , le vecteur  $v$  lui même, est linéaire ; elle est dite l'application identité de  $E$ .
3. L'application  $h_\lambda : E \rightarrow E$  qui associe à un élément  $v \in E$ , le vecteur  $\lambda v$  ( $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ ) est linéaire ; elle est appelée l'homothétie de rapport  $\lambda$ .
4. L'application dérivation  $D : \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{K}[X]$  qui associe à un polynôme  $P$  sa dérivée  $P'$ , est linéaire.
5. Soit  $E = E_1 \oplus E_2$ . L'application  $P_1 : E \rightarrow E$  qui associe à vecteur  $x = x_1 + x_2$ , le vecteur  $x_1$  ( $x_1 \in E_1, x_2 \in E_2$ ), est linéaire ; elle est appelée la projection de  $E$  sur  $E_1$  parallèlement à  $E_2$ .
6. Soit  $v_0 \neq 0$  un vecteur de  $E$ . La translation  $\tau : E \rightarrow E$  qui associe à tout vecteur  $v$ , le vecteur  $v + v_0$ , est non linéaire, car  $\tau(0) = v_0 \neq 0$ .

## Image et noyau d'une application linéaire

**Proposition 5**

Soit  $f \in \mathcal{L}(E, E')$  et  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . Alors  $f(F)$  est un sous-espace vectoriel de  $E'$ . En particulier  $f(E)$  est un sous espace vectoriel de  $E'$  appelé image de  $f$  et noté  $Im f$ .

**Démonstration**

On sait que  $f(F)$  est un sous groupe de  $E'$ , il suffit donc de vérifier la stabilité pour l'opération externe. Soit  $\lambda \in \mathbb{K}$  et  $f(v) \in f(F)$ , on a  $\lambda f(v) = f(\lambda v) \in f(F)$ .

**Remarque 4**

On peut montrer que l'image réciproque d'un s.e.v  $F'$  de  $E'$  est un s.e.v de  $E$ .

**Proposition 6**

Soit  $f \in \mathcal{L}(E, E')$ ,  $Ker f = \{x \in E : f(x) = 0\}$  est un sous espace vectoriel de  $E$ , appelé noyau de  $f$ .

**Démonstration**

Il suffit de vérifier la stabilité pour l'opération externe. Si  $\lambda \in \mathbb{K}$  et  $x \in E$ , on a  $f(\lambda x) = \lambda f(x) = \lambda 0 = 0$  et par suite  $\lambda x \in Ker f$ .

**Proposition 7**

$f$  est injective si et seulement si  $\text{Ker} f = \{0\}$

**Exemple 12**

1. Soit  $E = E_1 \oplus E_2$ . On a  $\text{Im} P_1 = E_1$  et  $\text{Ker} P_1 = E_2$ .
2. Soit  $D : \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{K}[X]$  l'application dérivation. On a  $\text{Ker} D = \mathbb{K}$  et  $\text{Im} D = \mathbb{K}[X]$
3. Soit  $f : \mathbb{K}^3 \rightarrow \mathbb{K}^2$  l'application définie par  $f(x, y, z) = (2x + y, y - z)$ . On a :  
 $\text{Ker} f = \{(x, y, z) \in \mathbb{K}^3 : y = -2x \text{ et } z = y\} = \{(x, -2x, -2x) : x \in \mathbb{K}\}$ .  $\text{Ker} f$  est la droite vectorielle engendré par  $(1, -2, -2)$ .  
 $\text{Im} f = \{(x', y') \in \mathbb{K}^2 : \exists (x, y, z) \in \mathbb{K}^3 : x' = 2x + y, \text{ et } y' = y - z\}$ . Soit  $(x', y') \in \mathbb{K}^2$ . En posant  $x = \frac{x' - y'}{2}, y = y', z = 0$ , on vérifie que  $f(x, y, z) = (x', y')$ , donc  $f$  est surjective, d'où  $\text{Im} f = \mathbb{K}^2$ .

**Proposition 8**

Soit  $f \in \mathcal{L}(E, E')$  et  $(v_1, \dots, v_n)$  un système de vecteurs de  $E$ .

1. Si  $f$  est injective et le système  $(v_1, \dots, v_n)$  est libre dans  $E$ , alors le système  $(f(v_1), \dots, f(v_n))$  est libre dans  $E'$ . Si  $f$  est injective et  $A$  une partie libre de  $E$ , alors  $f(A)$  est libre dans  $E'$ .
2. Si  $f$  est surjective et le système  $(v_1, \dots, v_n)$  est générateur de  $E$ , alors le système  $(f(v_1), \dots, f(v_n))$  est générateur de  $E'$ . Plus généralement, si  $f$  est surjective et  $A$  une partie génératrice de  $E$ , alors  $f(A)$  engendre  $E'$ .

En particulier si  $f$  est bijective, l'image d'une base de  $E$  est une base de  $E'$ .

**Démonstration**

1) Supposons que  $\sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i f(v_i) = 0$  avec  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ . Comme  $f$  est linéaire,  $f(\sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i v_i) = 0$ , d'où

$\sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i v_i = 0$  compte tenu de l'injection de  $f$ . L'indépendance du système  $(v_1, \dots, v_n)$  entraîne  $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ . Soit  $A$  une partie libre de  $E$ , alors d'après ce qui précède l'image par  $f$  de toute partie finie de  $A$  est libre dans  $E'$ , par suite  $f(A)$  est libre.

2) Soit  $y \in E'$ , il existe donc  $x \in E$  tel que  $f(x) = y$ . Or on peut écrire  $x = \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i v_i$  où les  $\lambda_i \in \mathbb{K}$ .

Il s'en suit que  $y = f(x) = f(\sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i v_i) = \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i f(v_i)$ .

## 2.2. Structure des endomorphismes

$E, E', E''$  sont des espaces vectoriels sur  $\mathbb{K}$ .

**Proposition 9**

1.  $\mathcal{L}(E, E')$  muni des lois  $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$  et  $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$ ,  $(f, g \in \mathcal{L}(E, E'), \lambda \in \mathbb{K}, x \in E)$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$
2. Si  $f \in \mathcal{L}(E, E')$ ,  $g \in \mathcal{L}(E', E'')$ , alors  $g \circ f \in \mathcal{L}(E, E'')$
3. Pour tout  $f, h \in \mathcal{L}(E, E')$ ,  $g, k \in \mathcal{L}(E', E'')$ ,  $\lambda \in \mathbb{K}$  :
  - (a)  $g \circ (f + h) = g \circ f + g \circ h$ .
  - (b)  $(g + k) \circ f = g \circ f + k \circ f$ .
  - (c)  $g \circ (\lambda f) = \lambda g \circ f$ .
4. Si  $f$  est bijective, alors  $f^{-1}$  est linéaire.

**Démonstration**

$\mathcal{L}(E, E')$  est un espace vectoriel, voir exemple 3 du par.1 chap 2. On a  $g \circ f(\lambda x + \mu y) = g[f(\lambda x + \mu y)] = g[\lambda f(x) + \mu f(y)] = \lambda g(f(x)) + \mu g(f(y)) = \lambda(g \circ f)(x) + \mu(g \circ f)(y)$ . Il suffit de vérifier que  $f^{-1}(\lambda y) = \lambda f^{-1}(y)$  puisqu'on a déjà vérifié que  $f^{-1}$  est un homomorphisme de groupes. Posons  $y = f(x)$ , alors  $f^{-1}(\lambda f(x)) = f^{-1}(f(\lambda x)) = \lambda x = \lambda f^{-1}(y)$

## Anneau $\mathcal{L}(E)$ - Groupe $Gl(E)$ .

**Théorème 4**

L'ensemble  $\mathcal{L}(E)$  des endomorphismes de  $E$  muni des opérations  $(f, g) \rightarrow f + g$  et  $(f, g) \rightarrow f \circ g$  a une structure d'anneau unitaire.

**Démonstration**

D'après ce qui précède,  $(\mathcal{L}(E), +)$  est un groupe commutatif et la composition des endomorphismes est associative et distributive par rapport à l'addition.

**Théorème 5**

L'ensemble des automorphismes d'un espace vectoriel  $E$  est pour la composition des applications un groupe, appelé groupe linéaire de  $E$  et noté  $Gl(E)$ .

## Algèbre $\mathcal{L}(E)$ - Application : Les projecteurs

**Théorème 6**

L'ensemble  $\mathcal{L}(E)$  muni des opérations

- 1  $(f, g) \rightarrow f + g$ ,
- 2  $(\lambda, f) \rightarrow \lambda f$ ,
- 3  $(f, g) \rightarrow f \circ g$

a une structure d'espace vectoriel pour les lois 1 et 2 et de plus  $\lambda(f \circ g) = (\lambda f) \circ g = f \circ (\lambda g)$ , on dit que  $\mathcal{L}(E)$  a une structure d'algèbre sur  $\mathbb{K}$ .

Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$ ,  $E_1, E_2$  deux sous-espaces vectoriels tels que  $E = E_1 \oplus E_2$ . On définit l'application  $P_{E_1} : E \rightarrow E_1$  qui associe à  $x = x_1 + x_2$ , le vecteur  $x_1$  ( $x_1 \in E_1, x_2 \in E_2$ ).

On a les propriétés suivantes :

1.  $P_{E_1}$  est linéaire,  $\text{Ker} P_{E_1} = E_2$  et  $\text{Im} P_{E_1} = E_1$ .
2.  $(P_{E_1})^2 = P_{E_1}$ ,  $P_{E_1} + P_{E_2} = \text{Id}_E$ .
3.  $P_{E_2} \circ P_{E_1} = P_{E_1} \circ P_{E_2} = 0$  et
4.  $E = \text{Ker} P_{E_1} \oplus \text{Im} P_{E_1}$  et  $E = \text{Ker} P_{E_2} \oplus \text{Im} P_{E_2}$ .

#### Définition 14

Un endomorphisme  $p$  de  $E$  est appelé projecteur si  $p \circ p = p$ .

# Chapitre 3

## ESPACES VECTORIELS DE DIMENSION FINIE

### 1. Généralités

#### Définition 15

1. On appelle espace vectoriel de dimension finie tout espace vectoriel engendré par un système fini de vecteurs. Dans le cas contraire on dit que l'espace vectoriel est de dimension infinie.
2. Un système  $(u_1, \dots, u_n)$  de vecteurs d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  est dit base de  $E$  si  $(u_1, \dots, u_n)$  est libre et générateur  $E$ .

#### Exemple 13

1. Une base de  $\mathbb{K}^n$  est  $(1, 0, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, 0, 0, \dots, 1)$ ; elle est dite base canonique de  $\mathbb{K}^n$ .
2. Les polynômes  $1, X, X^2, \dots, X^n$  forment une base de l'espace vectoriel  $\mathbb{K}_n[X]$  des polynômes de degré inférieur ou égal à  $n$ .
3. Si  $E$  et  $F$  sont deux espaces vectoriels de bases respectives  $(e_1, \dots, e_n)$  et  $(f_1, \dots, f_m)$ , alors  $E \times F$  admet pour base  $(e_1, 0_F), \dots, (e_n, 0_F), (0_E, f_1), \dots, (0_E, f_m)$ .

#### Remarque 5

Il ne faudrait pas croire que tous les espaces vectoriels sur un corps  $\mathbb{K}$  soient de dimension finie. L'exemple le plus simple est  $\mathbb{K}[X]$ , en effet supposons que  $\mathbb{K}[X]$  est engendré par  $P_1, \dots, P_r$ . Si  $n$  est le plus haut degré des polynômes  $P_1, \dots, P_r$ , le polynôme  $X^{n+1}$  ne peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs  $P_1, \dots, P_r$ . Il s'en suit que  $\mathbb{K}[X]$  ne peut pas être engendré par un nombre fini de polynômes.

Le lemme suivant est fondamental. Il nous permettra de montrer que toutes les bases d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel sont constituées du même nombre de vecteurs. Ce nombre s'appellera dimension de l'espace.

**Lemme 1**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel engendré par le système  $(e_1, \dots, e_n)$  et soit  $(f_1, \dots, f_m)$  un système de vecteurs de  $E$ . Si  $m > n$ , alors  $(f_1, \dots, f_m)$  est lié.

**Démonstration**

La démonstration se fait par récurrence sur  $n$ . Soit  $m > n$ .

Cette propriété est vraie pour  $n = 1$ , car si  $(f_1, f_2)$  sont deux vecteurs d'un espace vectoriel engendré par  $e_1$ , il existe  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  tels que :

$$f_1 = \lambda_1 e_1 \text{ et } f_2 = \lambda_2 e_1.$$

Si les deux coefficients sont nuls, alors le système est lié. Sinon, on a  $\lambda_2 f_1 - \lambda_1 f_2 = 0$  et le système est lié.

On suppose la propriété vraie pour  $n - 1$  et on la montre pour  $n$ . Soit  $(f_1, \dots, f_m)$  un système de vecteurs d'un espace vectoriel engendré par  $(e_1, \dots, e_n)$ , avec  $m > n$ . On peut écrire

$$\forall i = 1, \dots, m \quad f_i = a_i e_1 + g_i, \text{ avec } a_i \in \mathbb{K} \text{ et } g_i \in \langle e_2, \dots, e_n \rangle.$$

Si tous les  $a_i$  sont nuls, alors les vecteurs  $f_i \in \langle e_2, \dots, e_n \rangle$  pour tout  $i = 1, \dots, m$ . D'après l'hypothèse de récurrence, le système  $(f_1, \dots, f_m)$  est lié.

Sinon, l'un des  $a_i$  est non nul, par exemple  $a_1$ . Dans ce cas on a :

$$a_1 f_2 - a_2 f_1 \in \langle e_2, \dots, e_n \rangle, \dots, a_1 f_m - a_m f_1 \in \langle e_2, \dots, e_n \rangle.$$

Or  $m - 1 > n - 1$  donc l'hypothèse de récurrence s'applique : ils sont liés. Par suite il existe des coefficients  $\lambda_i$  non tous nuls tels que :

$$\lambda_2(a_1 f_2 - a_2 f_1) + \dots + \lambda_m(a_1 f_m - a_m f_1) = 0.$$

Il s'ensuit que

$$-(\lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_m a_m) f_1 + \lambda_2 a_1 f_2 + \dots + \lambda_m a_1 f_m = 0.$$

Comme l'un des coefficients  $\lambda_i a_1 \neq 0$ , le système  $(f_1, \dots, f_m)$  est lié, ce qui achève la démonstration.

**Théorème 7**

1. Tout  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie admet au moins une base. Plus précisément, tout système générateur fini contient au moins une base.
2. Toutes les bases d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  ont le même nombre de vecteurs. Ce nombre s'appelle la dimension de  $E$  et se note  $\dim E$ .

**Démonstration**

- Existence d'une base. Si  $(e_1, \dots, e_n)$  engendrent  $E$  et si ce système est libre, il forme une base. S'il est lié, l'un des vecteurs, par exemple  $e_n$  est combinaison linéaire des autres vecteurs.

Il n'est pas difficile de voir que, dans ce cas, le système  $(e_1, \dots, e_{n-1})$  engendre  $E$ . On itère le procédé jusqu'à obtenir un système générateur libre. Cette méthode est constructive.

- Soient  $(e_1, \dots, e_n)$  et  $(f_1, \dots, f_m)$  deux bases de  $E$ . Alors on a d'après le lemme fondamental  $(e_1, \dots, e_n)$  est générateur de  $E$  et  $(f_1, \dots, f_m)$  est libre dans  $E$ , donc  $m \leq n$ ,  $(e_1, \dots, e_n)$  est libre et  $(f_1, \dots, f_m)$  est générateur, donc  $n \leq m$ .

### Théorème 8

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n$ .

1. Tout système libre de  $E$  ayant  $n$  vecteurs est une base.
2. Tout système générateur de  $E$  ayant  $n$  vecteurs est une base de  $E$ .
3. Soit  $F \subset E$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . Alors  $F$  est de dimension finie,  $\dim F \leq \dim E$  et il y a égalité si et seulement si  $F = E$

### Démonstration

- Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  un système libre de  $E$ , montrons qu'il est générateur de  $E$ . Soit  $x \in E$ , le système  $(x, e_1, \dots, e_n)$  est lié d'après le lemme fondamental. Il existe donc un système de scalaires non tous nuls  $(\lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$  tel que :

$$\lambda x + \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n = 0.$$

Le scalaire  $\lambda$  est forcément non nul, car sinon  $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$  compte tenu de la liberté du système  $(e_1, \dots, e_n)$ . Par suite on peut écrire :

$$x = -(\lambda^{-1} \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda^{-1} \lambda_n e_n).$$

Donc  $(e_1, \dots, e_n)$  engendre  $E$ .

- Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  un système générateur de  $E$ , montrons qu'il est libre dans  $E$ . Si le système  $(e_1, \dots, e_n)$  est lié, alors l'un des vecteurs est combinaison linéaire des autres vecteurs ; soit par exemple  $e_1$ . Dans ce cas le système  $(e_2, \dots, e_n)$  est générateur de  $E$ , ce qui est contradictoire en tenant compte du lemme fondamental, car une base de  $E$  qui contient forcément  $n$  éléments serait liée.
- Parmi tous les systèmes libres de  $F$ , on en choisit un maximal et on le note  $(f_1, \dots, f_m)$ . Le nombre des vecteurs de ce système est nécessairement inférieur à  $\dim E$ , d'après le lemme fondamental. Ce système est forcément générateur, car si  $x \in F$ , le système  $(x, f_1, \dots, f_m)$  est lié puisque  $(f_1, \dots, f_m)$  est libre maximal, et donc  $x$  peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs du système  $(f_1, \dots, f_m)$  comme dans 1).  
Si  $F$  est un sous-espace vérifiant  $\dim E = \dim F$ , alors  $F = E$ , puisqu'une base de  $F$  étant un système libre de  $E$ , possédant  $n$  vecteurs est aussi une base de  $E$  en vertu de 1).

Un autre moyen de former une base dans un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel est le suivant ; c'est le théorème de la base incomplète.



### Théorème 9

Soit  $E$  un espace vectoriel de base  $(e_1, \dots, e_n)$  et soit  $(f_1, \dots, f_m)$  un système libre. Alors il existe  $n - m$  vecteurs parmi les vecteurs  $e_1, \dots, e_n$  tels que le système constitué de ces  $n - m$  vecteurs et des vecteurs  $f_1, \dots, f_m$  forme une base de  $E$ .

### Démonstration

On voit que si  $m < n$ , alors il existe un des vecteurs  $e_i$  tel que  $(f_1, \dots, f_m, e_i)$  soit libre. Sinon, pour tout  $i = 1, \dots, n$ , tous les systèmes  $(f_1, \dots, f_m, e_i)$  seront liés et les vecteurs  $e_1, \dots, e_n$  seront combinaisons linéaires des vecteurs  $f_1, \dots, f_m$  et donc le système  $(f_1, \dots, f_m)$  sera générateur de  $E$ , ce qui est impossible. En posant  $f_{m+1} = e_i$ , on itère le procédé jusqu'à obtenir  $n$  vecteurs libres  $f_j$ . Ils forment alors une base. Cette méthode est constructive.

### Exemple 14

Dans  $\mathbb{R}^4$ , on prend la base canonique  $(e_1, e_2, e_3, e_4)$  et le système libre suivant :  $f_1 = e_1 + 2e_2$  et  $f_2 = -e_1 + e_2$ . Le compléter en une base de  $\mathbb{R}^4$ . On a :

- $(f_1, f_2, e_1)$  est lié
- $(f_1, f_2, e_2)$  est lié
- $(f_1, f_2, e_3)$  est libre
- $(f_1, f_2, e_3, e_4)$  est libre.

Ces quatre vecteurs forment une base de  $\mathbb{R}^4$ .

## 2. Rang d'un système fini de vecteurs

Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$ , de dimension  $n$  et, soit  $S = (u_1, \dots, u_p)$  un système de  $p$  vecteurs de  $E$  ( $p \leq n$ ).

### Définition 16

Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$ , de dimension  $n$  et, soit  $S = (u_1, \dots, u_p)$  un système de  $p$  vecteurs de  $E$  ( $p \leq n$ ). On appelle rang du système de vecteurs  $S = (u_1, \dots, u_p)$  et on note, par  $rg(S)$ , la dimension du sous-espace vectoriel engendré par ce système i.e  $rg(S) = rg(u_1, \dots, u_p) = \dim Vect(u_1, \dots, u_p)$ .

### Exemple 15

Dans  $\mathbb{K}^4$ , considérons le système des trois vecteurs :

$$u_1 = (1, 0, 0, 0), u_2 = (0, 1, 0, 0), x_3 = (1, 1, 0, 0).$$

Il est clair que le système  $(u_1, u_2)$  est libre dans  $\mathbb{K}^4$  et que  $x_3 = u_1 + u_2$ . Par conséquent, le sous-espace  $F$  engendré par  $(u_1, u_2, x_3)$  est aussi engendré par le système libre  $(u_1, u_2)$  et

par suite le rang de  $F$  est 2.

### Proposition 10

Le rang d'un système de vecteurs est le nombre maximum de vecteurs libres que l'on peut extraire de ce système.

## 2.1. Somme vectorielle

### Proposition 11

Soit  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie. Tout sous-espace vectoriel  $F$  de  $E$  admet au moins un supplémentaire  $G$  ; de plus tous les supplémentaires ont pour dimension  $\dim E - \dim F$ .

### Démonstration

Si  $(e_1, \dots, e_n)$  est une base de  $E$  et  $(f_1, \dots, f_m)$  une base de  $F$ , le théorème de la base incomplète nous permet de compléter la base de  $F$  par  $n - m$  vecteurs pour former une base de  $E$ . Ces  $n - m$  vecteurs engendrent un sous-espace vectoriel  $G$  qui sera supplémentaire de  $F$ .

### Proposition 12

Soient  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de dimension finie d'un espace vectoriel  $E$ . Alors  $F + G$  est de dimension finie et on a :

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G).$$

### Démonstration

Soit  $(e_1, \dots, e_p)$  une base de  $F \cap G$ , que l'on complète en une base  $(e_1, \dots, e_p, f_1, \dots, f_q)$  de  $F$  et  $(e_1, \dots, e_p, g_1, \dots, g_r)$  de  $G$ . On vérifiera alors que  $(e_1, \dots, e_p, f_1, \dots, f_q, g_1, \dots, g_r)$  est une base de  $F + G$ .

### Corollaire 1

Soient  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de dimension finie d'un espace vectoriel  $E$ . Alors  $E$  est somme directe de  $F$  et de  $G$  si et seulement si  $\dim F + \dim G = \dim E$  et  $F \cap G = \{0\}$ .

## 2.2. Applications linéaires en dimension finie.

### Proposition 13

Soit  $E, E'$  deux espaces vectoriels,  $E$  étant de dimension finie. Soit  $f$  une application

linéaire de  $E$  dans  $E'$ . Alors  $Im f$  est un sous-espace vectoriel de dimension finie de  $E'$ . Sa dimension est appelée le rang de  $f$  ( $rg(f) = \dim Im f$ ).

### Démonstration

Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ . Alors le système image  $(f(e_1), \dots, f(e_n))$  engendre  $Im f$ , qui est par conséquent de dimension finie avec  $\dim Im f \leq n$ .

### Théorème 10

Deux espaces vectoriels de dimension finie sont isomorphes si et seulement si, ils ont la même dimension.

### Démonstration

$\Rightarrow$  Si  $f : E \rightarrow E'$  est un isomorphisme, alors d'après la proposition précédente l'image d'une base de  $E$  est une base de  $E'$ , donc  $E$  et  $E'$  ont la même dimension.

$\Leftarrow$  Supposons que  $\dim E = \dim E'$  et soit  $(e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$  et  $(e'_1, \dots, e'_n)$  une base de  $E'$ . Soit  $f : E \rightarrow E'$  définie par  $f(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i e'_i$ . Il est facile de voir que  $f$  est linéaire bijective.

### Corollaire 2

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie sur  $\mathbb{K}$ , alors  $E$  est isomorphe à  $\mathbb{K}^n$  si et seulement si  $\dim E = n$ .

### Théorème 11

*Théorème de la dimension.* Soient  $E$  et  $E'$  deux espaces vectoriels de dimension finie et  $f \in \mathcal{L}(E, E')$ , alors  $\dim E = \dim(Ker f) + \dim(Im f)$ .

### Démonstration

Supposons que  $\dim E = n$ ,  $\dim(Ker f) = r$  et montrons que  $\dim(Im f) = n - r$ . Soit  $(w_1, \dots, w_r)$  une base de  $Ker f$  et complétons la pour obtenir une base de  $E$ , en l'occurrence  $(w_1, \dots, w_r, v_1, \dots, v_{n-r})$ . montrons que  $\mathcal{B} = (f(v_1), \dots, f(v_{n-r}))$  est une base de  $Im f$ .  $\mathcal{B}$

engendre  $Im f$  en effet  $f(x) = f(\alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_r w_r + \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{n-r} v_{n-r}) = \sum_{i=1}^{n-r} \lambda_i f(v_i)$ .  $\mathcal{B}$

est libre puisque si  $\sum_{i=1}^{n-r} \lambda_i f(v_i) = 0$ , alors  $f(\sum_{i=1}^{n-r} \lambda_i v_i) = 0$  et donc  $\sum_{i=1}^{n-r} \lambda_i v_i \in Ker f$ . Il s'en

suit que  $\sum_{i=1}^{n-r} \lambda_i v_i = \sum_{i=1}^r \lambda_i f(v_i)$

### Corollaire 3

$f \in \mathcal{L}(E, E')$ ,  $E$  et  $E'$  étant de même dimension, alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

1.  $f$  est injective.
2.  $f$  est surjective.
3.  $f$  est bijective.

### Démonstration

Il suffit de montrer que  $1) \iff 2)$ . De l'égalité  $\dim E = \dim(\text{Ker } f) + \dim(\text{Im } f)$ , résulte  $f$  injective  $\iff \text{Ker } f = \{0\} \iff \dim E = \dim(\text{Im } f) \iff \dim E' = \dim(\text{Im } f) \iff E' = \text{Im } f \iff f$  surjective

### Remarque 6

1. Ce résultat est faux en dimension infinie. L'application dérivation  $D : \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{K}[X]$  qui à un polynôme  $P$  fait correspondre  $P'$  est surjective mais non injective.
2. Une application linéaire  $f$  est parfaitement définie si l'on connaît l'image des vecteurs d'une base, car d'après la linéarité de  $f$  on a :  

$$f(x) = f(\sum_{i=1}^n x_i e_i) = \sum_{i=1}^n x_i f(e_i),$$
 donc si on connaît  $f(e_1), \dots, f(e_n)$ ,  $f$  est connue en tout vecteur de  $E$ .

### Théorème 12

Soient  $E$  et  $E'$  deux  $\mathbb{K}$ -espace vectoriels. Si  $\dim E = n$  et  $\dim E' = m$ , alors  $\dim \mathcal{L}(E, E') = nm$ .

### Démonstration

Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$  et  $(v_1, \dots, v_m)$  une base de  $E'$ . Soit  $u \in \mathcal{L}(E, E')$  et  $x \in E$ . Il existe un unique  $n$ -uplet  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$  tel que  $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ . Pour tout  $i = 1, \dots, n$ , on peut écrire  $u(e_i) = \sum_{j=1}^m \alpha_{ij} v_j$  avec  $\alpha_{ij} \in \mathbb{K}$ . Par suite on a :

$$u(x) = u\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n x_i u(e_i) = \sum_{i=1}^n x_i \left(\sum_{j=1}^m \alpha_{ij} v_j\right)$$

On pose  $u_{ij}(e_i) = v_j$  et  $u_{ij}(e_k) = 0$  pour  $k \neq i$ , les applications  $u_{ij}$  sont linéaires et on a :

$$u(x) = \sum_{i=1}^n x_i \left(\sum_{j=1}^m \alpha_{ij} u_{ij}(e_i)\right) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m \alpha_{ij} u_{ij}(x_i e_i)\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_{ij} u_{ij}(x_i e_i) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_{ij} u_{ij}(x).$$

Il s'en suit que  $u = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m \alpha_{ij} u_{ij}\right)$  et les  $u_{ij}$  engendrent  $\mathcal{L}(E, E')$ . Vérifions que les

$u_{ij}$  forment un système libre. Supposons que  $\sum_{i,j} \alpha_{ij} u_{ij} = 0$ . Pour  $k = 1, \dots, n$ , on a  $\sum_{i,j} \alpha_{ij} u_{ij}(e_k) = \sum_{j=1}^{j=m} \alpha_{kj} v_j = 0$ . Par suite  $\alpha_{kj} = 0$  pour tout  $j = 1, \dots, m$  et  $k = 1, \dots, n$ .

# Chapitre 4

## MATRICES

### 1. Généralités

#### Définition 17

Soient  $n, m \in \mathbb{N}$ . Une matrice  $A$ , à coefficients dans un corps commutatif  $\mathbb{K}$  est un tableau qui se présente sous la forme suivante :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & . & . & . & a_{1m} \\ a_{21} & . & . & . & a_{2m} \\ . & & & & \\ . & & & & \\ . & & & & \\ a_{n1} & . & . & . & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Il s'agit d'une matrice à  $m$  colonnes et à  $n$  lignes. Les coefficients  $a_{ij} \in \mathbb{K}$ ,  $i$  désigne la ligne,  $j$  celui de la colonne.

**Notation** : La matrice  $A$  se note  $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m}$ .

L'ensemble des matrices à  $m$  colonnes et à  $n$  lignes, à coefficients dans  $\mathbb{K}$ , est noté  $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ . Si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  (respectivement  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ), la matrice est dite réelle (respectivement complexe). Si  $n = m$ , la matrice  $A$  est dite carrée d'ordre  $n$ . Si  $m = 1$ ,  $A$  est dite matrice unicolonne.

#### Exemple 16

Si  $n = m$  et que  $a_{ii} = 1$ , pour tout  $i$ ,  $a_{ij} = 0$ , si  $i \neq j$ , la matrice  $A$  est appelée la matrice identité et se note  $I_n$ .

Si  $n = m$  et que  $a_{ii} = \lambda_i$ , pour tout  $i$ ,  $a_{ij} = 0$ , si  $i \neq j$ , la matrice est dite diagonale.

Si  $n = m$  et que  $a_{ij} = 0$  pour  $i < j$ , on dit que  $A$  est triangulaire inférieure.

### Opérations sur les matrices

## 1. L'addition :

Soient  $A, B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$  avec  $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m}$ ,  $B = (b_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m}$ . La matrice somme de  $A$  et  $B$ , notée  $A + B = C$ , est définie par :  $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ .

## 2. Produit externe :

Si  $\lambda \in \mathbb{K}$ , le produit  $\lambda.A$  est défini par :  $\lambda.(a_{ij}) = (\lambda a_{ij})$

## 3. Produit de matrices :

Soient  $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ ,  $B \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{K})$ . La matrice produit, notée  $A.B = C$ , est définie par :  $c_{ij} = \sum_{k=1}^m a_{ik} b_{kj}$ . On alors  $C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ .

**Remarque 7**

Le produit  $A.B$  est défini si le nombre de colonnes de  $A$  est égal au nombre de lignes de  $B$ .

## 4. Transposée d'une matrice :

Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ . La matrice transposée de  $A$ , notée  ${}^tA$ , appartenant à  $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ , est définie par :

${}^tA = (b_{ij})$  avec  $b_{ij} = a_{ji}$ . A titre d'exemple :

$${}^t \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 7 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 7 \\ -1 & 9 \end{pmatrix}$$

Nous avons les propriétés suivantes :

- ${}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB$ ;
- ${}^t(\lambda A) = \lambda {}^tA$  ;
- ${}^t(A.B) = {}^tB.{}^tA$  ( dans le cas où le produit est bien défini).

**Proposition 14**

L'espace  $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$  muni de l'addition et de la loi externe est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

$(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times, .)$  est une algèbre non commutative sur  $\mathbb{K}$ .

## 2. Applications linéaires et matrices

### 2.1. Matrices associées à une application linéaire

Soient  $E$  et  $E'$  deux espaces vectoriels sur  $\mathbb{K}$ , de dimension  $m$  et  $n$  respectivement, et  $f : E \rightarrow E'$  une application linéaire. Choisissons  $(e_1, \dots, e_m)$  une base de  $E$  et  $(e'_1, \dots, e'_n)$  une base de  $E'$ , les images par  $f$  des vecteurs  $e_1, \dots, e_m$  se décomposent sur la base  $(e'_1, \dots, e'_n)$  :

$$\begin{aligned} f(e_1) &= a_{11}e'_1 + a_{21}e'_2 + \dots + a_{n1}e'_n \\ f(e_2) &= a_{12}e'_1 + a_{22}e'_2 + \dots + a_{n2}e'_n \\ &\vdots \\ f(e_m) &= a_{1m}e'_1 + a_{2m}e'_2 + \dots + a_{nm}e'_n \end{aligned}$$

**Définition 18**

On appelle matrice de  $f$  dans les bases  $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_m), \mathcal{B}'=(e'_1,\dots,e'_n)$  la matrice notée  $M(f)_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$  appartenant à  $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$  dont les colonnes sont les composantes des vecteurs  $f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_m)$  dans la base  $(e'_1, \dots, e'_n)$  :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,j} & \dots & a_{2,p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \quad \text{ou} \quad (a_{i,j}).$$

Il est clair que la matrice associée à  $f$  dépend du choix des bases de  $E$  et de  $E'$ .

**Exemple 17**

1. Soit  $E$  de dimension finie et  $id_E : E \rightarrow E$  l'application qui à  $x$  associe  $x$ . On considère une base  $(e_i, i = 1, \dots, n)$  de  $E$ . On a

$$M(id_E)_{e_i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

matrice unité de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

2. Soit  $E = \mathbb{K}^2$  et  $P_1 : \mathbb{K}^2 \rightarrow \mathbb{K}^2$  l'application linéaire qui à  $(x, y)$  associe  $(x, 0)$ . Considérons la base canonique  $(e_1, e_2)$  de  $\mathbb{K}^2$ . On a  $P_1(e_1) = e_1$ ,  $P_1(e_2) = 0$  et  $M(P_1)_{e_i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
3. Soit  $(e_1, e_2, e_3)$  la base canonique de  $\mathbb{K}^3$  et  $(e'_1, e'_2)$  la base canonique de  $\mathbb{K}^2$ . Considérons l'application linéaire  $f : \mathbb{K}^3 \rightarrow \mathbb{K}^2$  qui à  $(x, y, z)$  associe  $(x - y, z - y)$ . On a :

$$M(f)_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Soit  $D : \mathbb{K}_4[X] \rightarrow \mathbb{K}_3[X]$  l'application linéaire qui à  $p(X)$  associe  $p'(X)$ . On a

$$M(D)_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

$(1, X, \dots, X^4)$  et  $(1, X, \dots, X^3)$  étant les bases canoniques respectivement de  $\mathbb{K}_4[X]$  et de  $\mathbb{K}_3[X]$ .



**Proposition 15**

Soient  $E$  et  $E'$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension  $m$  et  $n$  respectivement,  $(e_i, i = 1, \dots, m)$  et  $(e'_j, j = 1, \dots, n)$  des bases de  $E$  et  $E'$ . Alors l'application  $M : \mathcal{L}(E, E') \rightarrow \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$  qui à  $f$  associe  $M(f)_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}$  est un isomorphisme d'espaces vectoriels. En particulier  $\dim \mathcal{L}(E, E') = mn$ .

**Démonstration**

Il est facile de vérifier la linéarité de  $M$ . Soit  $f \in \text{Ker } M$ , donc  $M(f)_{\mathcal{B}', \mathcal{B}} = 0$  et par suite  $f(e_1) = f(e_2) = \dots = f(e_m) = 0$  d'où  $f = 0$  et  $M$  est injective.

Elle est aussi surjective, car si

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,j} & \dots & a_{2,p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

on construit  $f$  en posant :

$$f(e_1) = a_{11}e'_1 + a_{21}e'_2 + \dots + a_{n1}e'_n$$

$$f(e_2) = a_{12}e'_1 + a_{22}e'_2 + \dots + a_{n2}e'_n.$$

.

.

$$f(e_m) = a_{1m}e'_1 + a_{2m}e'_2 + \dots + a_{nm}e'_n.$$

Pour  $x \in E$ ,  $x = x_1e_1 + \dots + x_ne_n$  avec  $x_i \in \mathbb{K}$ . On pose  $f(x) = x_1f(e_1) + \dots + x_nf(e_n)$ . On vérifie que  $f$  est linéaire et que  $M(f)_{\mathcal{B}', \mathcal{B}} = A$ .

Soient  $E, F, G$  trois  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels,  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ ,  $g \in \mathcal{L}(F, G)$ . Soient  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_m)$ ,  $\mathcal{C} = (e'_1, \dots, e'_n)$  et  $\mathcal{D} = (e''_1, \dots, e''_p)$  des bases respectives de  $E, F, G$ . Posons :

$M_{\mathcal{C}\mathcal{B}}(f) = (a_{kj})$  matrice de type  $(n, m)$

$M_{\mathcal{D}\mathcal{C}}(g) = (b_{ik})$  matrice de type  $(p, n)$

$M_{\mathcal{C}\mathcal{B}}(g \circ f) = (c_{ij})$  matrice de type  $(n, m)$

On a alors  $\forall j = 1, \dots, m$  :

$$\begin{aligned} g \circ f(e_j) &= g(f(e_j)) = g\left(\sum_{k=1}^{k=p} a_{kj}e'_k\right) = \sum_{k=1}^{k=p} a_{kj}g(e'_k) = \sum_{k=1}^{k=p} a_{kj}\left(\sum_{i=1}^{i=m} b_{ik}e''_i\right) = \\ &= \sum_{k=1}^{k=p} \sum_{i=1}^{i=m} a_{kj}b_{ik}e''_i = \sum_{i=1}^{i=m} \left(\sum_{k=1}^{k=p} b_{ik}a_{kj}\right)e''_i \end{aligned}$$

**Proposition 16**

Avec les notations précédentes on a :  $M_{\mathcal{D}\mathcal{B}}(g \circ f) = M_{\mathcal{D}\mathcal{C}}(g)M_{\mathcal{C}\mathcal{B}}(f)$ .

## Matrice de l'inverse d'une application linéaire

**Proposition 17**

Soient  $E$  et  $E'$  deux espaces vectoriels de même dimension et de bases respectives  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$ .  $f \in \mathcal{L}(E, E')$  est bijective si et seulement si  $M(f)_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$  est inversible. De plus  $M(f^{-1})_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = M(f)_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}^{-1}$ .

**Démonstration**

Comme  $f \circ f^{-1} = id_{E'}$  et  $f^{-1} \circ f = id_E$ ,  $M(f^{-1} \circ f)_{\mathcal{B}} = M(f \circ f^{-1})_{\mathcal{B}'} = M(id_E) = M(id_{E'})$  et par suite  $M(f^{-1})M(f) = M(f)M(f^{-1}) = I_n$  où  $n = \dim E$ , par suite  $M(f^{-1}) = M(f)^{-1}$ .

**matrice colonne**

Soit  $E$  un espace vectoriel,  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ . Chaque vecteur  $x \in E$  s'écrit  $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ . On peut ainsi associer à chaque vecteur  $x \in E$  une matrice du type  $(n, 1)$  suivante

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ . Une matrice de ce type s'appelle une matrice colonne. Une matrice colonne peut être

interprétée comme matrice de l'application linéaire  $\bar{X} : \mathbb{K} \rightarrow E$  qui à chaque  $\lambda \in \mathbb{K}$  associe  $\lambda x$ . On a  $X = M_{1,\mathcal{B}}(\bar{X})$  où  $(1)$  est la base canonique  $\mathbb{K}$ .

**Proposition 18**

Soient  $E, F$  deux espaces vectoriels munis respectivement des bases  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ ,  $\mathcal{C} = (e'_1, \dots, e'_p)$  et  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ . Soient  $Y$  la matrice colonne associée à  $f(x)$  dans la base  $\mathcal{C}$  et  $X$  la matrice colonne de  $x$  dans la base  $\mathcal{B}$ . On a  $Y = M_{\mathcal{B}\mathcal{C}}.X$

**Démonstration**

Nous pouvons utiliser la proposition précédente. On a :

$\forall \lambda \in \mathbb{K} . f \circ \bar{x}(\lambda) = f(\bar{X}(\lambda)) = f(\lambda x) = \lambda f(x) = \overline{f(x)}(\lambda)$  càd  $f \circ \bar{X} = \overline{f(X)}$  et par passage aux matrices on a  $Y = M_{\mathcal{B}\mathcal{C}}.X$

**2.2. Changement de bases**

Soient  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  et  $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$  deux bases d'un espace vectoriel  $E$ .

**Définition 19**

On appelle matrice de passage de la base  $\mathcal{B}$  à la base  $\mathcal{B}'$ , la matrice  $P$ , carrée d'ordre  $n$ , dont la  $j$ ème colonne est formée des coordonnées du vecteur  $e'_j$  dans la base  $\mathcal{B}$ . Autrement dit si  $e'_j = \sum_{i=1}^n p_{ij} e_i$  ( $j = 1, \dots, n$ ), alors :

$$P = (p_{ij}) = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

**Exemple 18**

Si  $E$  est un espace vectoriel de base  $(e_1, e_2)$  et  $(e'_1, e'_2)$  avec  $e'_1 = 3e_1 + e_2$  et  $e'_2 = -2e_1 + 5e_2$ , alors la matrice de passage de la base  $(e_1, e_2)$  à la base  $(e'_1, e'_2)$  est  $P = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

**Interprétation.** Pour tout indice  $j$ , la  $j$ ème colonne de  $P$  est l'expression du vecteur  $e'_j$

dans la base  $\mathcal{B}$ .  $P$  est donc la matrice de l'application identité de  $E$  dans  $E$  quand on munit au départ  $E$  de la base  $\mathcal{B}'$  et à l'arrivée de la base  $\mathcal{B}$ . Autrement dit  $P = M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(id_E)$ .

**Théorème 13**

Soient  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  deux bases de  $E$ ,  $P$  la matrice de passage de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{B}'$  et  $P'$  la matrice de passage de  $\mathcal{B}'$  à  $\mathcal{B}$ . Alors  $PP' = P'P = I$  et ainsi  $P'^{-1} = P$ .

**Démonstration**

Considérons le diagramme :  $(E, \mathcal{B}') \rightarrow (E, \mathcal{B}) \rightarrow (E, \mathcal{B}')$ . Comme  $id \circ id = id$ , en passant aux matrices on obtient  $M_{\mathcal{B}'}(id) = M_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}M_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$  càd  $I = PP' = P'P$ .

**Action sur les coordonnées****Proposition 19**

Soient  $x \in E$ ,  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  deux bases de  $E$  et  $P$  la matrice de passage de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{B}'$ . Soient  $X$  la matrice colonne de  $x$  dans  $\mathcal{B}$  et  $X'$  la matrice colonne de  $x$  dans la base  $\mathcal{B}'$ . On a  $X = PX'$  et ainsi  $X' = P^{-1}X$ .

**Démonstration**

Découle immédiatement de l'égalité  $id(x) = x$  où  $id : (E, \mathcal{B}') \rightarrow (E, \mathcal{B})$  et de la proposition précédente.

**Exemple 19**

Soit  $\mathbb{K}^2$  muni de deux bases, la base canonique  $(e_1, e_2)$  et la base  $(e'_1, e'_2)$  définie par  $e'_1 = 2e_1 + e_2$  et  $e'_2 = 3e_1 + 2e_2$ . Soit  $x = 2e_1 + 3e_2$ , calculons les composantes de  $x$  dans la base

$(e'_1, e'_2)$ . On a  $P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $X' = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix}$ , et ainsi  $x' = -5e'_1 + 4e'_2$ .

### Proposition 20

Soient  $E$  et  $E'$  deux espaces vectoriels de dimension finie et  $f \in \mathcal{L}(E, E')$ . Soient  $\mathcal{B}, \mathcal{C}$  deux bases de  $E$  et  $\mathcal{B}', \mathcal{C}'$  deux bases de  $E'$ . Notons  $A = M(f)_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}$ ,  $A' = M(f)_{\mathcal{C}', \mathcal{C}}$ ,  $P$  la matrice de passage de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{C}$  et  $Q$  la matrice de passage de  $\mathcal{B}'$  à  $\mathcal{C}'$ . On a alors  $A' = Q^{-1}AP$ .

### Démonstration

Considérons le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} (E, \mathcal{B}) & \xrightarrow{f} & (E', \mathcal{B}') \\ \downarrow & & \downarrow \\ (E, \mathcal{C}) & \xrightarrow{f} & (E', \mathcal{C}') \end{array}$$

On a  $f \circ id_E = id_{E'} \circ f$ , et donc  $M(f)_{\mathcal{C}', \mathcal{C}} M(id_E)_{\mathcal{C}, \mathcal{B}} = M(id_{E'})_{\mathcal{C}', \mathcal{B}'} M(f)_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}$  c'est-à-dire  $A'P^{-1} = Q^{-1}A$  ou encore  $A' = Q^{-1}AP$ .

### Corollaire 4

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  et  $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$  deux bases de  $E$ . Notons  $A = M(f)_{\mathcal{B}}$ ,  $A' = M(f)_{\mathcal{B}'}$  et  $P$  la matrice de passage de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{B}'$ . On a alors  $A' = P^{-1}AP$ .

### Définition 20

Deux matrices  $A, A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  sont dites semblables s'il existe une matrice  $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  inversible telle que  $P^{-1}AP = A'$ .

### Exemple 20

Soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{K}^2$  qui dans la base canonique  $(e_1, e_2)$  est représenté par la matrice  $A = M(f)_{e_i} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ . Déterminons la matrice  $A'$  qui représente  $f$  dans la base  $(e'_1, e'_2)$  avec  $e'_1 = (0, -1)$  et  $e'_2 = (1, 1)$ . On a  $A' = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ .

## 2.3. Rang d'une Matrice

### Définition 21

Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ ,  $A = [c_1, \dots, c_m]$  où l'on a noté  $c_j$  le vecteur colonne d'indice  $j$  ( $c_j \in \mathbb{K}^n$ ). On appelle rang de  $A$  le rang du système constitué des vecteurs colonnes de  $A$ .

**Lemme 2**

Soient  $E, F, G$  des espaces vectoriels de dimension finie,  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ ,  $g \in \mathcal{L}(G, E)$ . On a les résultats suivants

- Si  $g$  est surjective, alors  $\text{rang}(f) = \text{rang}(f \circ g)$ ,
- Si  $f$  est injective, alors  $\text{rang}(g) = \text{rang}(f \circ g)$ .

**Démonstration**

a)  $\text{rang}(f) = \dim f(E) = \dim f(g(G)) = \dim(f \circ g)(E) = \text{rang}(f \circ g)$ .

b) Soit  $(g(v_1), \dots, g(v_r))$  une base de  $\text{Im } g$ . Le système  $(f(g(v_1)), \dots, f(g(v_r)))$  est libre puisque  $f$  est injective et il est générateur de  $\text{Im}(f \circ g)$  car si  $y \in \text{Im}(f \circ g)$ , on peut écrire  $y = (f \circ g)(x) = f[g(x)] = f\left(\sum_{i=1}^r \alpha_i g(v_i)\right) = \sum_{i=1}^r \alpha_i f[g(v_i)]$ , donc  $(f(g(v_1)), \dots, f(g(v_r)))$  est une base de  $\text{Im}(f \circ g)$ , d'où  $\text{rang}(g) = \text{rang}(f \circ g)$ .

**Proposition 21**

Soit  $f \in \mathcal{L}(E, E')$ . Soient  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  deux bases quelconques de  $E$  et  $E'$  respectivement et  $A = M(f)_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}$ . On a alors  $\text{rang } f = \text{rang } A$ . Ainsi deux matrices qui représentent la même application linéaire en des bases différentes ont même rang, en particulier deux matrices semblables ont même rang.

**Démonstration**

On a :  $A = [f(e_1), \dots, f(e_n)]$ , où  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ . Par définition nous avons :  $\text{rang } A = \dim \text{vect}(f(e_1), \dots, f(e_n)) = \dim \text{Im } f = \text{rang } f$ .

**Définition 22**

Deux matrices  $A, B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$  sont dites équivalentes s'il existe  $P \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$  et  $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  inversibles telles que  $B = Q^{-1}AP$ . Il s'agit d'une relation d'équivalence sur  $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ .

**Lemme 3**

Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ . Alors  $A$  est de rang  $r \geq 1$  si et seulement si  $A$  est équivalente à la matrice  $J_r$  définie par blocs :

$$J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où  $I_r$  désigne la matrice identité d'ordre  $r$ .

**Démonstration**

Soit  $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ , de rang  $r$ . Considérons l'application linéaire  $\phi : \mathbb{K}^m \rightarrow \mathbb{K}^n$  associée à la matrice  $A$  et définie par :  $\phi(e_i) = \sum_{j=1}^{j=n} a_{ji} e'_j$ ,  $1 \leq i \leq m$ , où  $(e_i)_{1 \leq i \leq m}$  (respectivement  $(e'_i)_{1 \leq i \leq n}$ ) est la base canonique de  $\mathbb{K}^m$  (respectivement de  $\mathbb{K}^n$ ). Comme  $A$  est de rang  $r$ , on peut supposer par exemple que le système  $(\phi(e_i))_{1 \leq i \leq r}$  forme une base de  $\text{Im } \phi$ . Écrivons alors :  $\phi(e_k) = \sum_{j=1}^{j=n} c_{kj} \phi(e_j)$ , pour  $k \in \{r+1, \dots, m\}$ . On définit une base nouvelle de  $\mathbb{K}^m$ , notée  $(f_k)$ , en posant :  $f_k = e_k$ , pour  $k \in \{1, \dots, r\}$  et  $f_k = e_k - \sum_{j=1}^{j=n} c_{kj} e_j$ , pour  $k \in \{r+1, \dots, m\}$ . On a alors :  $\phi(f_k) = 0$ , pour  $k \in \{r+1, \dots, m\}$ . Notons  $t_j = \phi(f_j)$ , pour  $j \in \{1, \dots, r\}$ . Le système  $(t_j)_{1 \leq j \leq r}$  étant libre, il peut être complété en une base de  $\mathbb{K}^n$ , notée aussi  $(t_j)_{1 \leq j \leq n}$ . Considérons la matrice de l'application dans les bases  $(f_k)_{1 \leq k \leq m}$  et  $(t_j)_{1 \leq j \leq n}$ , nous obtenons :

$$M(\phi)_{f_i, t_j} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & 1 & . & . & 0 \\ . & 0 & 1 & 0 & \\ . & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & . & . & 0 \end{pmatrix} = J_r$$

Les matrices  $A$  et  $J_r$  sont alors équivalentes car elles représentent l'application linéaire  $\phi$ .

**Théorème 14**

Soient  $A, B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ . Alors  $A$  et  $B$  sont équivalentes si et seulement si  $\text{rang } A = \text{rang } B$ .

**Démonstration**

Supposons que  $A$  et  $B$  soient équivalentes. Il existe alors des matrices inversibles  $P \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$  et  $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  telles que :  $B = Q^{-1}AP$ . Notons  $f, g$  et  $h$  les applications linéaires associées respectivement à  $A, P$  et  $Q$ . Grâce au lemme, on a :

$\text{rang}(h^{-1} \circ f \circ g) = \text{rang}(f)$ , d'où  $\text{rang } A = \text{rang } B$ . Réciproquement si  $\text{rang } A = \text{rang } B$ , le lemme précédent permet d'affirmer que les matrices  $A$  et  $B$  sont équivalentes à la matrice  $J_r$ , par conséquent elles sont équivalentes.

**Théorème 15**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Alors  $\text{rang } A = \text{rang } A^t$ . Cela signifie que le rang d'une matrice donnée est égal à la dimension du système formé des vecteurs lignes de la matrice.

**Démonstration**

supposons que  $\text{rang } A = r$ , donc  $A$  est équivalente à la matrice  $J_r$ , et par suite, il existe  $P \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$  et  $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  inversibles telles que  $A = Q^{-1}J_rP$ . Donc  $A^t = {}^tP {}^tJ_r {}^t(Q^{-1}) =$

$({}^tP^{-1})^{-1}J_r {}^t(Q^{-1})$ , car  $J_r$  est symétrique, d'où  ${}^tA$  est équivalente à  $A$  et donc  $\text{rang} {}^tA = \text{rang} A = r$ .

## 2.4. Détermination pratique du rang d'une matrice.

Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ .

i) On supprime toute ligne (ou colonne) qui est nulle ou qui est colinéaire à une autre.

ii) En permutant les lignes ou les colonnes, on obtient une matrice de la forme :

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & . & . & . & a_{1m} \\ a_{21} & . & . & . & a_{2m} \\ . & & & & \\ . & & & & \\ . & & & & \\ a_{n1} & . & . & . & a_{nm} \end{pmatrix}$$

avec  $a_{11}$  non nul et de préférence valant 1.

iii) Pour tout  $i \in [2, n]$ , on remplace la ligne  $L_i$  par  $L_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}}L_1$ , on se ramène à une matrice :

$$A'_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & . & . & . & a_{1m} \\ 0 & . & . & . & a'_{2m} \\ . & & & & \\ . & & & & \\ . & & & & \\ 0 & . & . & . & a'_{nm} \end{pmatrix}$$

soit  $A'_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & \\ 0 & B \end{pmatrix}$

où  $B$  est une matrice du type  $(n-1, m-1)$ .

iv) On applique les étapes i) à iii) à la matrice  $B$ . En répétant au besoin la méthode indiquée, nous obtenons une matrice échelonnée :

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & . & . & . & c_{1m} \\ 0 & c_{22} & . & . & a'_{2m} \\ . & & & & \\ . & & c_{rr} & & \\ . & & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & . & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où les coefficients  $c_{ii}$  sont non nuls, et le rang est celui du nombre des lignes non nulles.

v) En procédant de façon analogue sur les lignes et les colonnes, on obtient une matrice équivalente à  $A$ , de la forme :

$$J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

### Exemple 21

Déterminons le rang de la matrice :  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & -3 & -3 \\ 3 & 10 & -6 & -5 \end{pmatrix}$

Les opérations élémentaires donnent :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 4 & -6 & -2 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les deux vecteurs lignes de la matrice  $A_2$  étant linéairement indépendants, le rang de  $A$  est égal à 2.

### Calcul de l'inverse d'une matrice carrée par la méthode du pivot.

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On considère la matrice  $A_1 \in \mathcal{M}_{n,2n}(\mathbb{K})$ , définie par :

$$A_1 = \begin{pmatrix} A & I_n \end{pmatrix}$$

On effectue des opérations élémentaires uniquement sur les lignes (ou uniquement sur les colonnes) de  $B$ , de telle sorte que la matrice obtenue soit de la forme :

$$A_m = \begin{pmatrix} I_n & C \end{pmatrix}$$

La matrice  $C$  correspond à l'inverse de  $A$ .

#### **Exemple 22**

Soit à calculer l'inverse de la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

On pose  $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & . & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & . & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & . & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Nous obtenons :

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & . & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & . & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & . & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_2 \rightarrow L_2 - 2L_1, L_3 \rightarrow L_3 + L_1$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & . & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & . & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & . & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad L_3 \rightarrow L_3 + L_2$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & . & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & . & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & . & -1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \quad L_3 \rightarrow 1/3 L_3$$

$$A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & . & 2/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & -3 & 0 & . & -4/3 & 1/3 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 & . & -1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \quad L_2 \rightarrow L_2 - 2L_3, L_1 \rightarrow L_1 + L_3$$

$$A_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & . & 2/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & . & 4/9 & -1/9 & 2/9 \\ 0 & 0 & 1 & . & -1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \quad L_2 \rightarrow (-1/3)L_2$$

$$A_7 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & . & -2/9 & 5/9 & -1/9 \\ 0 & 1 & 0 & . & 4/9 & -1/9 & 2/9 \\ 0 & 0 & 1 & . & -1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \quad L_1 \rightarrow L_1 - 2L_2$$



$$\text{d'où } A^{-1} = \begin{pmatrix} -2/9 & 5/9 & -1/9 \\ 4/9 & -1/9 & 2/9 \\ -1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

# Chapitre 5

## DETERMINANTS ET APPLICATIONS

### 1. Définition des déterminants par récurrence

#### Définition 23

Soit  $n \geq 1$ . Pour toute matrice carrée  $A = (a_{ij})$ , d'ordre  $n$ , nous associons  $\det A \in \mathbb{K}$ , défini comme suit :

Si  $n = 1$ , on pose  $\det(a) = a$  (avec  $A = (a)$ ).

Si  $n > 1$ , en supprimant la première ligne et la  $j$ -ième colonne de  $A$ , nous obtenons une matrice carrée d'ordre  $n - 1$  notée  $A_{1j}$ . L'hypothèse de récurrence permet alors de poser :

$$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} a_{1j} \det A_{1j}$$

#### Remarque 8

la formule a été obtenue en développant le déterminant de  $A$  suivant la première ligne, on peut montrer que la quantité est indépendante du choix de la ligne ou de la colonne.

– Cas où  $n = 2$ .

Soit  $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ . En développant le déterminant de  $A$  suivant la première ligne ( ou colonne), nous obtenons :

$$\det A = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

– Cas où  $n = 3$ . Soit  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ . Développons le déterminant de  $A$ , suivant la première ligne :

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{31}a_{23} + a_{21}a_{13}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{aligned}$$

#### Règle de Sarrus :

Cette méthode propose de calculer les déterminants d'ordre 3 de la façon suivante :

Une fois le déterminant posé, nous plaçons à sa droite les 2 premières colonnes. Ensuite, nous calculons, en partant de gauche à droite, les trois premières diagonales puis nous soustrayons les trois diagonales en partant de droite à gauche. Nous obtenons :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 42 + 20 - 16 + 7 = 53$$

- Cas où la matrice  $A$  est triangulaire :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & . & . & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & . & 0 \\ . & & & & \\ . & & & & 0 \\ a_{n1} & & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Le calcul du déterminant de  $A$  se fait par récurrence sur  $n$ , nous obtenons :

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33}\dots a_{nn}$$

### Définition 24

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$  sur  $\mathbb{K}$ , et  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ . Soit  $(v_1, \dots, v_n)$  un système de  $n$  vecteurs de  $E$ . Ecrivons  $v_j = \sum_{i=1}^n a_{ij}e_i$ . On définit le déterminant du système  $(v_j)$ , en posant :

$$\det(v_1, \dots, v_n) = \det(a_{ij})$$

Nous verrons ultérieurement que cette quantité est indépendante de la base  $\mathcal{B}$ .

## 2. Propriétés des déterminants.

Grâce à la définition 24, nous pouvons exprimer le déterminant d'une matrice d'ordre  $n$  comme le déterminant des vecteurs colonnes composant la matrice, soit :

$\det A = \det(c_1, \dots, c_n)$ , où  $c_j$  désigne la  $j$ -ième colonne de  $A$ .

Le théorème suivant donne les premières propriétés des déterminants.

### Théorème 16

Avec les notations ci-dessus, nous avons :

- $\det(c_1, \dots, \lambda c_k, \dots, c_n) = \lambda \det(c_1, \dots, c_k, \dots, c_n)$ ,  $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ .
- $\det(c_1, \dots, c_k + c'_k, \dots, c_n) = \det(c_1, \dots, c_k, \dots, c_n) + \det(c_1, \dots, c'_k, \dots, c_n)$   
ce qui signifie que l'application  $c_k \rightarrow \det(c_1, \dots, c_k, \dots, c_n)$ , est linéaire, pour tout  $k \in \{1, \dots, n\}$ .
- Si deux colonnes sont égales (ou colinéaires), le déterminant est nul.

**Démonstration**

- Raisonons par récurrence sur  $n$ . Le résultat est évident pour  $n = 2$ .

$$\begin{vmatrix} \lambda a & c \\ \lambda b & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & \lambda c \\ b & \lambda d \end{vmatrix} = \lambda(ad - bc)$$

Supposons la propriété vraie pour tout déterminant d'ordre  $\leq n - 1$ .

Posons  $A = [c_1 \dots c_k \dots c_n] = (a_{ij})$ ,  $B = [c_1 \dots \lambda c_k \dots c_n] = (b_{ij})$ .

On a :  $b_{ij} = a_{ij}$  si  $j \neq k$ ,  $b_{ik} = \lambda a_{ik}$ .

$$\text{i) On a : } \det(c_1, \dots, \lambda c_k, \dots, c_n) = \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} b_{1j} \det B_{1j} = \sum_{j=1, j \neq k}^n (-1)^{1+j} a_{1j} \det B_{1j} + (-1)^{1+k} \lambda a_{1k} \det A_{1k}$$

La matrice  $B_{1j}$  étant d'ordre  $n - 1$ , l'hypothèse de récurrence donne alors :

$$\det B_{1j} = \lambda \det A_{1j} \text{ pour tout } j \neq k$$

par suite,

$$\det(c_1, \dots, \lambda c_k, \dots, c_n) = \lambda \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} a_{1j} \det A_{1j} = \lambda \det(c_1, \dots, c_n)$$

- De façon analogue, nous raisonnons par récurrence sur  $n$ . Le résultat est vraie pour  $n = 2$ . En effet :

$$\begin{vmatrix} a + a' & c \\ b + b' & d \end{vmatrix} = (a + a')d - (b + b')c = (ad - bc) + (a'd - b'c) = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & c \\ b' & d \end{vmatrix}$$

Supposons la propriété vraie pour tout déterminant d'ordre  $\leq n - 1$ .

Posons  $A = [c_1 \dots c_k \dots c_n] = (a_{ij})$ ,  $B = [c_1 \dots c'_k \dots c_n] = (b_{ij})$ ,  $D = [c_1 \dots c_k + c'_k \dots c_n] = (d_{ij})$

On a :  $b_{ij} = a_{ij}$  si  $j \neq k$ ,  $b_{ik} = a'_{ik}$  et  $d_{ij} = a_{ij}$  si  $j \neq k$ ,  $d_{ik} = a_{ik} + a'_{ik}$

$$\det(c_1, \dots, c_k + c'_k, \dots, c_n) = \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} d_{1j} \det D_{1j} = \sum_{j=1, j \neq k}^n (-1)^{1+j} a_{1j} \det D_{1j} + (-1)^{1+k} (a_{1k} + a'_{1k}) \det A_{1k}$$

La matrice  $D_{1j}$  étant d'ordre  $n - 1$ , l'hypothèse de récurrence donne alors :

$$\det D_{1j} = \det A_{1j} + \det B_{1j}$$

d'où :

$$\begin{aligned} \det(c_1, \dots, c_k + c'_k, \dots, c_n) &= \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} a_{1j} \det A_{1j} + \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} b_{1j} \det B_{1j} \\ &= \det(c_1, \dots, c_k, \dots, c_n) + \det(c_1, \dots, c'_k, \dots, c_n) \end{aligned}$$

- Raisonons par récurrence sur  $n$ . Le résultat est évident pour  $n = 2$ .

$$\begin{vmatrix} a & a \\ b & b \end{vmatrix} = ab - ab = 0$$

Supposons la propriété vraie pour tout déterminant d'ordre  $\leq n - 1$ .

Réolvons d'abord le cas où les deux colonnes sont adjacentes :

Soit  $A = [c_1 \dots c_k \dots c_n]$ . Supposons que les colonnes  $c_l$  et  $c_{l+1}$  sont égales. Par définition on a :

$$\det A = \sum_{j=1, j \neq l, j \neq l+1}^n (-1)^{1+j} a_{1j} \det A_{1j} + (-1)^{1+l} a_{1l} \det A_{1l} + (-1)^{1+l+1} a_{1l+1} \det A_{1l+1}$$

Pour tout  $j \neq l$ , et  $j \neq l + 1$ , la matrice  $A_{1j}$  est d'ordre  $n - 1$  et contient deux colonnes égales, donc d'après l'hypothèse de récurrence son déterminant est nul. D'autre part, on

a :  $a_{1l} = a_{1l+1}$  et  $A_{1l} = A_{1l+1}$ , ce assure que le déterminant de  $A$  est nul.

Montrons le lemme suivant :

**Lemme 4**

Si dans un déterminant donné, on permute deux colonnes adjacentes, la valeur du déterminant est multipliée par -1.

**Démonstration**

D'après le résultat précédent on a :

$$\det(c_1, \dots, c_l + c'_{l+1}, c_l + c'_{l+1}, \dots, c_n) = 0$$

puisque deux colonnes adjacentes sont égales.

Ensuite, grâce à la linéarité du déterminant par rapport aux colonnes d'indices respectivement  $l$  et  $l+1$ , nous obtenons :

$$\begin{aligned} &\det(c_1, \dots, c_l, c_l, \dots, c_n) + \det(c_1, \dots, c'_{l+1}, c'_{l+1}, \dots, c_n) + \\ &\det(c_1, \dots, c_l, c'_{l+1}, \dots, c_n) + \det(c_1, \dots, c'_{l+1}, c_l, \dots, c_n) = 0 \end{aligned}$$

Les deux premiers termes de l'expression ci-dessus sont nuls, puisqu'il s'agit de déterminants contenant deux colonnes adjacentes égales, ce qui donne le résultat du lemme.

Suite de la preuve du théorème :

Soit un déterminant d'ordre  $n$ , comprenant deux colonnes  $c_k$  et  $c_l$  égales avec  $l > k+1$ . En échangeant les colonnes  $c_k$  et  $c_{k+1}$ , puis  $c_k$  et  $c_{k+2}$  et ainsi de suite nous obtenons grâce au lemme 4, un déterminant avec deux colonnes adjacentes :

$$\det(c_1, \dots, c_k, \dots, c_l, \dots, c_n) = (-1)^{l-k-1} \det(c_1, \dots, c_k, c_l, \dots, c_n) = 0.$$

Le lemme admet l'extension suivante :

**Corollaire 5**

Si dans un déterminant donné, on permute deux colonnes, la valeur du déterminant est multiplié par -1

**Démonstration**

reprenant les notations précédentes et en permutant la colonne  $c_l$  et les colonnes précédentes jusqu'à la colonne d'indice  $k$  nous obtenons :

$$\det(c_1, \dots, c_k, \dots, c_l, \dots, c_n) = (-1)^{2(l-k)-1} \det(c_1, \dots, c_l, \dots, c_k, \dots, c_n) = -\det(c_1, \dots, c_l, \dots, c_k, \dots, c_n)$$

**Exemple 23**

Soit à calculer le déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 9 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \end{vmatrix}$$

Après permutation des colonnes 2 et 3 puis 3 et 4 nous obtenons :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 9 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 9 & 0 \\ 1 & 5 & 7 & 3 \end{vmatrix} = 4 \times 9 \times 3 = 108$$

Le théorème suivant donne un critère pour vérifier qu'un système de vecteurs est libre.

### Théorème 17

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$  sur  $IK$  et  $(v_1, \dots, v_n)$  un système de vecteurs de  $E$ . Alors  $(v_1, \dots, v_n)$  est une base de  $E$  si et seulement si  $\det(v_1, \dots, v_n) \neq 0$ .

### Démonstration

Supposons que le système  $(v_1, \dots, v_n)$  ne soit pas une base de  $E$ , alors il est nécessairement lié. Supposons par exemple, que le vecteur  $v_1$  soit une combinaison linéaire des autres vecteurs, c'est à dire :

$$v_1 = \sum_{i=2}^n \alpha_i v_i$$

Nous avons alors :

$$\det(v_1, \dots, v_n) = \det\left(\sum_{i=2}^n \alpha_i v_i, \dots, v_n\right) = \sum_{i=2}^n \det(v_i, v_2, \dots, v_n) = 0$$

puisque tous les déterminants figurant dans cette expression sont nuls car contenant chacun deux colonnes égales.

Réciproquement supposons que le système  $(v_1, \dots, v_n)$  soit une base de  $E$ . Soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  la base canonique de  $E$ . Tout vecteur  $e_i$  s'exprime en fonction de la base  $(v_1, \dots, v_n)$ . Nous avons :

$e_i = \sum_{j=1}^n \beta_{ij} v_j$ . Le calcul du déterminant, grâce à la linéarité par rapport à la première colonne, donne :

$$\det(e_1, e_2, \dots, e_n) = \sum_{j_1=1}^n \beta_{1j_1} \det(v_{j_1}, e_2, \dots, e_n)$$

En procédant de même avec les vecteurs  $e_2, \dots$ , et  $e_n$ , et en simplifiant les déterminants contenant au moins 2 colonnes égales, on a :

$$\det(e_1, e_2, \dots, e_n) = \sum_{j_1, j_2, \dots, j_n=1}^n \sum_{l=1}^n \beta_{l j_l} \det(v_{j_1}, v_{j_2}, \dots, v_{j_n}) \text{ avec } j_k \neq j_l \text{ pour } k \neq l.$$

Tout  $n$ -uplet  $(j_1, j_2, \dots, j_n)$  avec  $j_k \neq j_l$  pour  $k \neq l$ , se déduit par permutation du  $n$ -uplet  $(1, 2, \dots, n)$ . Il existe alors un scalaire  $\lambda$  :

$$\det(e_1, e_2, \dots, e_n) = \lambda \det(v_1, \dots, v_n) = 1$$

Donc  $\det(v_1, \dots, v_n) \neq 0$ .

Le théorème suivant donne une formule explicite du déterminant d'une matrice, à l'aide des permutations du groupe symétrique :

### Théorème 18

Soit  $A = (a_{ij})$  une matrice carrée d'ordre  $n$ , on a :

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} \cdot a_{\sigma(2)2} \dots a_{\sigma(n)n}$$

où  $S_n$  désigne le groupe symétrique d'ordre  $n$  et  $\varepsilon(\sigma)$  la signature de la permutation  $\sigma$ .

### Exemple 24

– On prend  $n = 2$ . Le groupe symétrique  $S_2$  est constitué de deux éléments :

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

avec  $\varepsilon(\sigma_1) = 1, \varepsilon(\sigma_2) = -1$ .

L'application de la formule du théorème 2.5, donne :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

– On prend  $n = 3$ . Déterminer les éléments du groupe symétrique  $S_3$  ainsi que leurs signatures. En déduire l'expression du déterminant d'ordre 3.

### Théorème 19

Soit  $A = (a_{ij})$  une matrice carrée d'ordre  $n$ , on a :

$$\det({}^t A) = \det A$$

où  ${}^t A$  désigne la matrice transposée de  $A$ .

### Démonstration

Posons  ${}^t A = (b_{ij})$ . Par définition on a :  $b_{ij} = a_{ji}$ . La formule du théorème 18, appliquée à  $B$ , donne :

$$\det({}^t A) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) b_{\sigma(1)1} \cdot b_{\sigma(2)2} \cdots b_{\sigma(n)n} = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

Pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ , soit  $p_i$  tel que  $\sigma(p_i) = i$ . On a :  $a_{p_i\sigma(p_i)} = a_{\sigma^{-1}(i)i}$ , ce qui donne, grâce à la commutativité du produit des scalaires :

$$\det({}^t A) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma^{-1}(1)1} \cdot a_{\sigma^{-1}(2)2} \cdots a_{\sigma^{-1}(n)n}$$

Comme  $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\sigma^{-1})$ , et en posant  $\tau = \sigma^{-1}$ , nous obtenons :

$$\det({}^t A) = \sum_{\tau \in S_n} \varepsilon(\tau) a_{\tau(1)1} \cdot a_{\tau(2)2} \cdots a_{\tau(n)n} = \det A$$

Le théorème 19 permet d'étendre aux lignes les propriétés des colonnes. C'est l'objet du prochain corollaire :

### Corollaire 6

Soit  $A = (a_{ij})$  une matrice carrée d'ordre  $n$ .  $A$  s'écrit  $A = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix}$ .

On a les propriétés suivantes :

- Le déterminant est linéaire par rapport à chaque ligne.
- Si dans un déterminant donné on échange deux lignes, la valeur du déterminant change de signe.
- Si dans un déterminant donné deux lignes sont égales (ou colinéaires), le déterminant est nul.
- Plus généralement, le déterminant d'une matrice est non nul si et seulement si le système des vecteurs lignes  $(L_1, \dots, L_n)$  est une base de  $IK^n$ .

Le théorème suivant affirme que le déterminant du produit de deux matrices carrées est égal au produit des déterminants des matrices :

### **Théorème 20**

Soient  $A$  et  $B$  deux matrices carrées d'ordre  $n$ , on a le résultat :

$$\det(A.B) = \det A \cdot \det B$$

### **Corollaire 7**

Une matrice carrée d'ordre  $n$  est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.

### **Démonstration**

Soit  $A$  une matrice inversible. On a alors :  $A.A^{-1} = I_n$ . Par suite :

$$\det(A.A^{-1}) = \det A \cdot \det A^{-1} = \det I_n = 1,$$

donc  $\det A$  est non nul, et l'on a :

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

Réciproquement, supposons que  $\det A$  soit non nul et notons  $A = [c_1 \dots c_k \dots c_n]$ .

Comme  $\det(c_1, \dots, c_k, \dots, c_n) \neq 0$ , le système  $(c_1, \dots, c_k, \dots, c_n)$  est libre (th. 2.4).

Posons :  $f(x) = A.x$ ,  $x \in IK^n$ . On a :  $A.x = \sum_{i=1}^n x_i c_i$ . Alors  $x \in \ker f$  si et seulement si

$$\sum_{i=1}^n x_i c_i = 0. \text{ Ce qui implique que } x_i = 0, i = 1, \dots, n$$

puisque le système  $(c_1, \dots, c_k, \dots, c_n)$  est libre. Donc  $f$  est injective et par suite  $A$  est inversible.

### **Corollaire 8**

Si  $A$  et  $A'$  sont deux matrices semblables, alors  $\det A = \det A'$ .

### **Démonstration**

On a :  $A' = P^{-1}AP$ , d'où  $\det A' = \det P^{-1} \cdot \det A \cdot \det P = \det I_n \cdot \det A = \det A$ .



**Définition 25**

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie muni d'une base  $(e_i)$  et  $f$  un endomorphisme de  $E$ . On appelle déterminant de  $f$  le déterminant de la matrice de  $f$  dans la base  $(e_i)$  :  $\det f = \det M(f)_{e_i}$

**Exemple 25**

Soit  $\theta \in [0, \pi]$ , calculons le déterminant de l'endomorphisme  $f$  de  $\mathbb{R}^2$  associé à la rotation d'angle  $\theta$ . On a :

$$f(1, 0) = (\cos \theta, \sin \theta) : f(0, 1) = (-\sin \theta, \cos \theta)$$

donc :

$$M(f)_{e_i} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

d'où :

$$\det f = \begin{vmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix} = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

### 3. Applications des déterminants

#### 3.1. Calcul des déterminants par les cofacteurs

**Définition 26**

Soit  $A = (a_{ij})$  une matrice carrée d'ordre  $n$ , on appelle cofacteur de l'élément  $a_{ij}$  le scalaire défini par :

$$\text{cof}(a_{ij}) = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$$

où  $A_{ij}$  la matrice d'ordre  $n-1$ , obtenue en supprimant la  $j$ -ième colonne et la  $i$ -ième ligne.

Le théorème suivant donne le calcul du déterminant en développant suivant la  $j$ -ième colonne ou de  $i$ -ième ligne :

**Théorème 21**

Soit  $A = (a_{ij})$ , on a les formules :

$$\det A = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+j} a_{kj} \text{cof}(a_{kj})$$

$$\det A = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+i} a_{ik} \text{cof}(a_{ik})$$

**Exemple 26**

Soit à calculer le déterminant de la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 7 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & -4 & 0 \end{pmatrix}$

Développons suivant la dernière colonne :

$$\det A = 7 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -98 - 16 = -114$$

Le théorème suivant donne une formule permettant le calcul de l'inverse d'une matrice à l'aide des cofacteurs :

La proposition suivante permet d'effectuer des opérations élémentaires sur les déterminants :

### Proposition 22

Le déterminant d'une matrice reste inchangé si l'on ajoute à une colonne ( respectivement une ligne) donnée ,une combinaison linéaire des autres colonnes (respectivement des autres lignes).

### Démonstration

Le résultat découle des théorèmes 16 et 19

### Exemple 27

Soit à calculer  $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}$

Nous remplaçons les lignes  $L_3$  et  $L_4$  par  $L_3 + L_1$  et  $L_4 - 2L_1$ , nous obtenons :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

En développant par rapport à la première colonne, on a :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 2 \\ -3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Remplaçons  $L'_1$  par  $L'_1 + L'_3$ , on a :  $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 2 \\ -3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$  puis la colonne

$C''_2$  par la colonne  $C''_2 - 2C''_3$ , on a alors, en développant suivant la première ligne :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 8$$

Le théorème suivant donne l'expression de l'inverse d'une matrice à l'aide des cofacteurs :

### Théorème 22

Soit  $A = (a_{ij})$  une matrice carrée inversible, alors on a :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} {}^t \text{com}(A)$$

avec  $\text{com}(A) = (b_{ij})$  où  $b_{ij} = \text{cof}(a_{ij})$

**Exemple 28**

Soit à calculer l'inverse de la matrice carrée d'ordre 2,  $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ . On a grâce à la formule ci-dessus on a :

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$$

**3.2. Calcul du rang d'une matrice****Définition 27**

On appelle mineur d'ordre  $r$  d'une matrice  $A$  le déterminant  $\delta$  d'une matrice carrée d'ordre  $r$  extraite de  $A$ . On appelle bordant du mineur  $\delta$  tout déterminant d'ordre  $r+1$  contenant le déterminant  $\delta$ .

**Exemple 29**

Soit la matrice  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -2 \\ -1 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ -3 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ . Déterminer tous les bordants la sous matrice  $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

**Théorème 23**

Le rang d'une matrice  $A$  est  $r$  si et seulement si l'on peut en extraire un mineur  $\delta$  d'ordre  $r$  non nul et que les bordants de  $\delta$  soient nuls.

**Exemple 30**

Déterminer le rang de la matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 1 & 3 & 8 \\ 2 & 3 & 10 \\ -2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$