Université Mohammed Seddik BENYAHIA – JIJEL
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département d'Electronique

A.N : 2018 / 2019

Master Electronique des Systèmes Embarqués (ESE)

Traitement avancé du signal (ESE03)

TD N° 1 : Rappels sur les signaux discrets

Exercice # 01 :

- Calculer l'énergie totale et la puissance totale pour chacun des signaux discrets suivants :

a) $x_1(n)=(1/2)^n u(n+3)$;

b) $x_2(n)=e^{j\left(\frac{\pi}{2}n-\frac{\pi}{8}\right)}$;

c) $x_3(n)=\begin{cases}(1/2)^n, & n=0,2,4,6,\ldots\\ 0, & \text{sinon}\end{cases}$;

d) $x_4(n)=(\alpha)^n \sin(n\omega_0)u(n)$;

Exercice # 02

1- Soit $x(n)=\begin{cases}1/2, & -2\le n\le 1\\ 0, & \text{ailleurs}\end{cases}$ et $h(-1)=2;\ h(0)=3;\ h(1)=1;\ h(n)=0$ si non. Calculer graphiquement la convolution $y(n)=x(n)*h(n)$.

2- Soit $x(n)=\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}u(n)$ et $h(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u(n-3)$, calculer directement la convolution suivante : $y(n)=x(n)*h(n)$.

Exercice # 03 :

Considérant la séquence discrète suivante : $x(n)=\left(\frac{5}{2}\right)^n u(-n)$

a) Trouver la valeur numérique de : $A=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)$

b) Calculer la puissance de $x(n)$: $P=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x^2(n)$

c) Si $x(n)$ est l'entrée d'un système variant dans le temps définit par $y(n)=nx(n)$, trouver la puissance du signal de sortie c'est-à-dire évalué la somme : $P_y=\sum_{n=-\infty}^{\infty}y^2(n)$. On donne la somme suivante :

$$\sum_{n=0}^{\infty} n a^n=\frac{a}{(1-a)^2},\quad |a|<1$$

Série de TD n°01

Université Mohammed Seddik BENYAHIA – JIJEL
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département d'Electronique

A.N : 2018 / 2019

Master Electronique des Systèmes Embarqués (ESE)

Traitement avancé du signal (ESE03)

TD N° 2 : Analyse spectrale des signaux discrets (DTFT + TFD)

Exercice # 01 :

1) Calculer la transformée de Fourier (DTFT) du signal discret suivant : $x(n) = (1/4)^n u(n+2)$.

2) Trouver la DTFT inverse de : $X(\omega) = \cos^2(\omega)$.

Exercice # 02 :

1) La réponse en fréquence d'un système est : $H(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \le \omega_c \\ 0, & \omega_c < |\omega| \le \pi \end{cases}$; Trouver sa réponse discrète par la DTFT inverse.

2) Considérons un système linéaire invariant dans le temps, caractérisé par l'équation de récurrence suivante : $y(n) = 1.3433y(n-1) - 0.9025y(n-2) + x(n) - 1.4142x(n-1) + x(n-2)$.
Calculer sa réponse en fréquence : $H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)}$

Exercice # 03 :

1)- Calculer la TFD sur N points du signal discret suivant : $x(n) = \alpha^{n-2} u(n-2)$, $0 \le n < N$

2)- Si $X(k) = TFD(x(n))$, trouver la TFD sur N points du signal discret suivant : $y(n) = \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right) x(n)$.

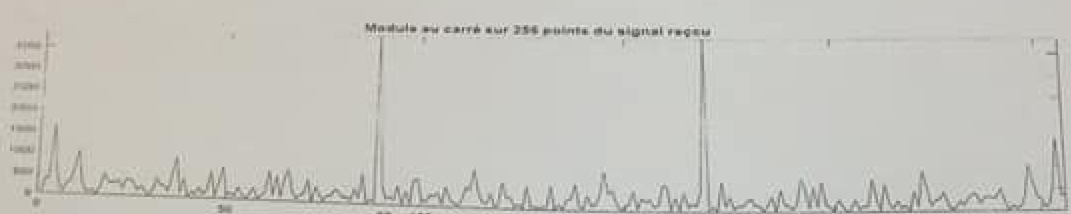
3)- Soit la séquence discrète suivante : $x(n) = 4 + 3\delta(n) - 5\delta(n-2)$

- Calculez la transformée de Fourier discrète (TFD) de $x(n)$ sur N = 10 points.
- Trouvez la séquence discrète $y(n)$ qui a une transformée de Fourier discrète : $Y(k) = e^{j2\pi\frac{2k}{10}} X(k)$, où $X(k)$ est la TFD sur 10 points de $x(n)$.

Exercice # 04 :

1)- Trouver la TFD inverse sur 10 points de : $X(k) = \begin{cases} 8 & k = 0 \\ 4 & k = 3 \text{ et } k = 7 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$.

2)- On reçoit 256 échantillons d'un signal dont on calcule le module carré de sa FFT (voir la figure ci-dessous). Sachant que la fréquence d'échantillonnage était de 64 kHz, déterminer les fréquences des deux pics du module carrée de la FFT. (Le premier pic correspond au point 88).



Série de TD n°01 :

Exo1 :

Calcule de l'energie total et la puissance total :

a) $x_1(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n+3)$:

* $E_\infty = \lim\limits_{N\to+\infty} \sum\limits_{n=-N}^{+N} |x(n)|^2$

$$x_1(n) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^n & \text{pour } n \geq -3 \\ 0 & \text{pour } n < -3 \end{cases}$$

$$E_\infty = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left|\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n+3)\right|^2$$

$$= \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=-3}^{+\infty} \left|\left(\frac{1}{2}\right)^n\right|^2 = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=-3}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

$$\sum_{n=n_1}^{n_2} (a^n) = a^{n_1} \times \frac{1 - a^{n_2 - n_1 + 1}}{1 - a}$$

$$\Rightarrow \lim_{N\to+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{-3} \times \left(\frac{1 - \cancel{\left(\frac{1}{4}\right)^{N+4}}^{\to 0}}{1 - \frac{1}{4}}\right) = 4^3 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3} \cdot 4^3 = \frac{256}{3}$$

* $P_\infty = \lim\limits_{N\to+\infty} \frac{1}{2N+1} \sum\limits_{n=-N}^{+N} |x(n)|^2$

$$= \lim_{N\to+\infty} \cancel{\frac{1}{2N+1}}^{\to 0} \times \frac{256}{3} = 0$$

b) $x_2(n) = e^{j\left(\frac{\pi}{2}n - \frac{\pi}{2}\right)}$

$$e^{jx} = \cos x + j \sin x$$

$$|e^{jx}| = |\cos x + j \sin x| = \sqrt{\cos^2 x + \sin^2 x} = \sqrt{1} = 1$$

* $E_\infty = \lim\limits_{N\to+\infty} \sum\limits_{n=-N}^{+N} |x(n)|^2 = \lim\limits_{N\to+\infty} \sum\limits_{n=-N}^{+N} |1|^2 = N + (N+1) = 2N+1$

$$= \lim_{N\to\infty} 2N+1 = +\infty$$

* $P_\infty = \lim\limits_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum\limits_{n=-N}^{+N} |x(n)|^2 = \lim\limits_{N\to+\infty} \frac{1}{\cancel{2N+1}} \cdot \cancel{2N+1} = 1$

c) $x_3(n) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^n & , n = 0, 2, 4, 6, 8 \dots \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$\star \ E_\infty = \lim\limits_{N \to \infty} \sum\limits_{n=-N}^{+N} |x(n)|^2$

$= \lim\limits_{N \to \infty} \sum\limits_{n=0,2,4,6,8} \left|\left(\frac{1}{2}\right)^n\right|^2 = \lim\limits_{N \to +\infty} \sum\limits_{n=0,2,4,6,8} \left(\frac{1}{4}\right)^n$

on pose : $n = 2 \times n' \Rightarrow n' = \frac{n}{2}$

$E_\infty = \lim\limits_{N \to +\infty} \sum\limits_{n=0}^{N/2} \left(\frac{1}{4}\right)^{2n'} = \lim\limits_{N \to +\infty} \sum\limits_{n=0}^{N/2} \left(\frac{1}{16}\right)^{n'}$

$= \lim\limits_{N \to +\infty} \cancel{\left(\frac{1}{16}\right)^{0}}^{\to 1} \left(\frac{1 - \cancel{\left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{N}{2} - 0 + 1}}^{\to 0}}{1 - \frac{1}{16}} \right)$

$= \frac{1}{1 - \frac{1}{16}} = \frac{15}{16}$

$\star \ P_\infty = \lim\limits_{N \to +\infty} \frac{1}{2N+1} \sum\limits_{n=-N}^{+N} |x(n)|^2$

$= \lim\limits_{N \to +\infty} \cancel{\frac{1}{2N+1}}^{\to 0} \cdot \frac{15}{16} = 0$

d) $x_4(n) = (\alpha)^n \cdot \sin(n\omega_0) \cdot U(n)$:

$= \begin{cases} \alpha^n \sin(n\omega_0) & \text{pour } n \geqslant 0 \\ 0 & \text{pour } n < 0 \end{cases}$

$= \begin{cases} \alpha^n \cdot \dfrac{e^{jn\omega_0} - e^{-jn\omega_0}}{2j} & \text{pour } n \geqslant 0 \\ 0 & \text{pour } n < 0 \end{cases}$

$\star \ E_\infty = \lim\limits_{N \to +\infty} \sum\limits_{n=-N}^{N} |x(n)|^2$

Exo 2:

$$x(n) = \begin{cases} \frac{1}{2} & , -2 \leq n \leq 1 \\ 0 & \text{ailleur} \end{cases}$$

$h(-1) = 2$; $h(0) = 3$; $h(1) = 1$; $h(n) = 0$ sinon

1) Calcule de la convolution $y(n) = x(n) * h(n)$ graphiquement :

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m) \cdot h(n-m)$$

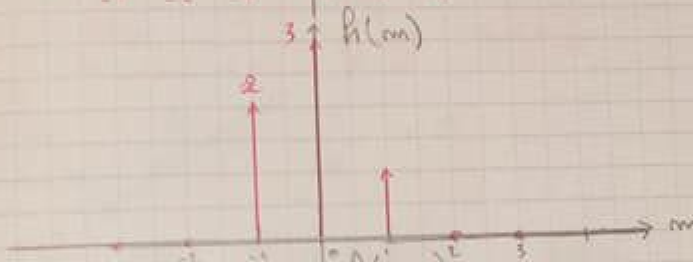
$$h(n) = 2\delta(n+1) + 3\delta(n) + \delta(n-1)$$

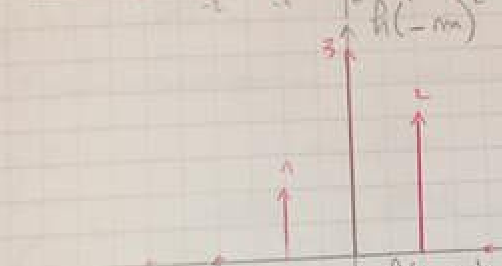
n	-3	-2	-1	0	1	2
y(n)	1	$\frac{5}{2}$	3	3	2	$\frac{1}{2}$

$x(n) \neq 0$ pour $n \in [-2, 1]$

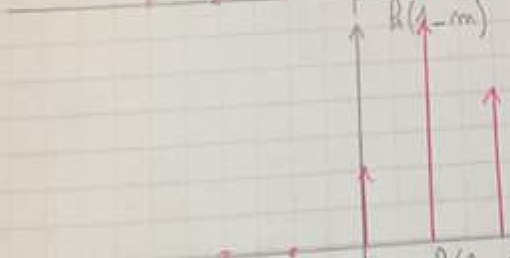
$h(n) \neq 0$ pour $n \in [-1, 1]$

$y(n) \neq 0$ pour $n \in [-3, 2]$

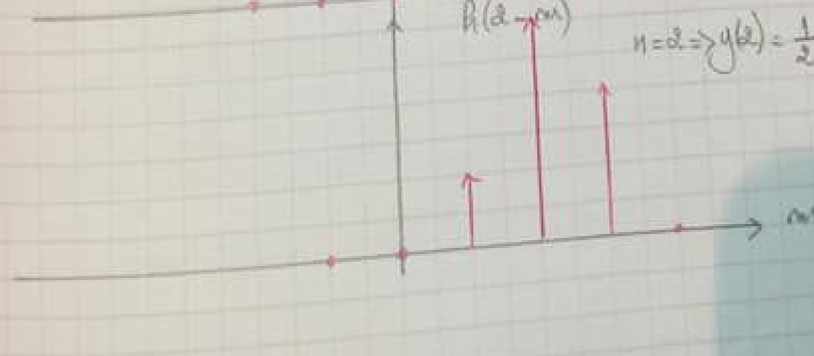




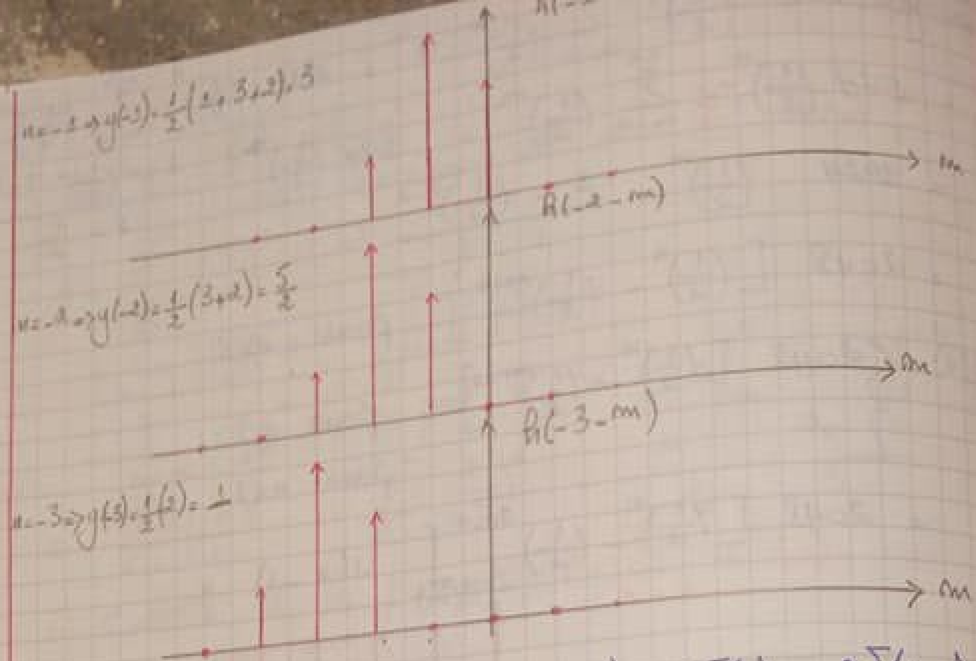
$n = 0 \Rightarrow y(0) = \frac{1}{2}(1 + 3 + 2) = 3$



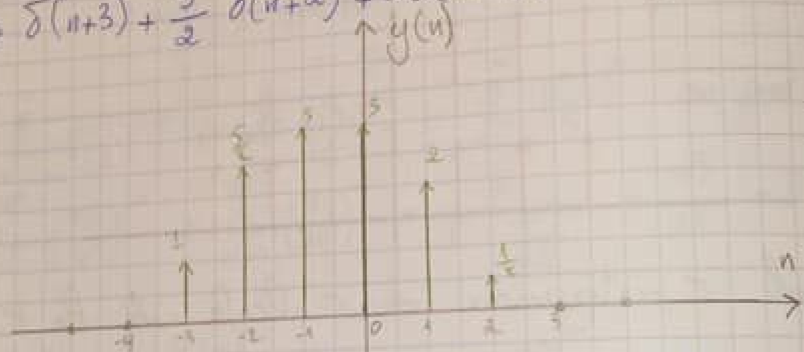
$n = 1 \Rightarrow y(1) = \frac{1}{2}(1 + 3) = 2$



$n = 2 \Rightarrow y(2) = \frac{1}{2}(1) = \frac{1}{2}$



$$y(n) = \delta(n+3) + \frac{5}{2}\,\delta(n+2) + 3\,\delta(n+1) + 3\,\delta(n) + 2\,\delta(n-1) + \frac{1}{2}\,\delta(n\ldots$$



2) Le calcule direct de la convolution $y(n) = x(n) * h(n)$

avec : $x(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-5} u(n)$ et $h(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n} u(n-3)$

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m)\; y(n-m)$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{(m-5)} u(m) \times \left(\frac{1}{2}\right)^{(n-m)} u(n-m-3)$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{(m-5)} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{(n-m)} \times u(m)\; u(n-m-3)$$

Si $n-3 < 0 \Rightarrow n < 3 \Rightarrow y(n) = 0$

Si $n-3 \geq 0 \Rightarrow n \geq 3 \Rightarrow y(n) = \sum_{m=0}^{n-3} \left(\frac{1}{4}\right)^{(m-5)} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-m}$

$$\Rightarrow y(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{-5} \sum_{m=0}^{n-3} \left(\frac{1}{4}\right)^{m} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-m} = 0$$

$$\Rightarrow y(n) = 4^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \sum_{m=0}^{n-3} \left(\frac{1}{4}\right)^m \cdot 2^m = 1024 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \sum_{m=0}^{n-3} \left(\frac{2}{4}\right)^m$$

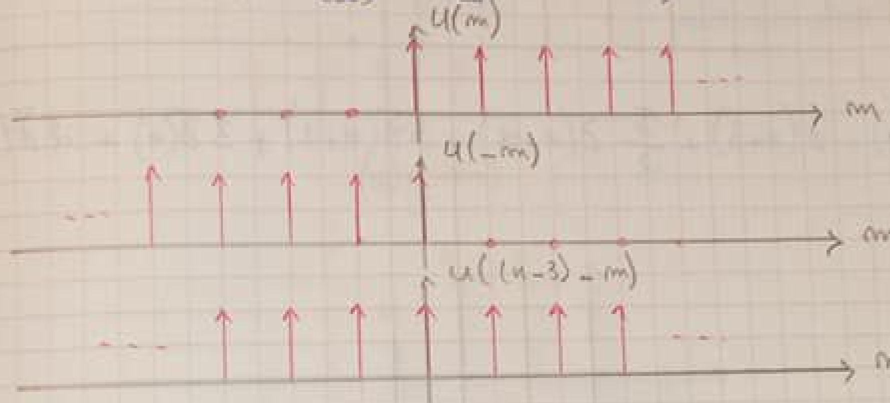
$$= 1024 \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \sum_{m=0}^{n-3} \left(\frac{1}{2}\right)^m = 1024 \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3+1}}{1-\frac{1}{2}}$$

$$= 1024 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}}{1-\frac{1}{2}}$$

$$= 2048 \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2}\right] \quad \text{pour } n \geqslant 3$$

$$y(n) = \begin{cases} 2048 \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2}\right] & \text{pour } n \geqslant 3 \\ 0 & \text{pour } n < 3 \end{cases}$$

$$= 2048 \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2}\right] \cdot u(n-3)$$



Méthode cartézienne de calcule de la convolution:

$x(n)$ \ $h(n)$	2	3	1
1/2	1	3/2	1/2
1/2	1	3/2	1/2
1/2	1	3/2	1/2
1/2	1	3/2	1/2

n	-3	-2	-1	0	1	2
$y(n)$	1	$\frac{5}{2}$	3	3	2	$\frac{1}{2}$

Exo3:1

$x(n) = \left(\frac{5}{2}\right)^n u(-n)$

a) Valeur numérique de : $A = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)$

$A = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{5}{2}\right)^n u(-n)$

$= \sum_{n=-\infty}^{0} \left(\frac{5}{2}\right)^n \times 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{5}{2}\right)^n \times 0$

$= \sum_{n=-\infty}^{0} \left(\frac{5}{2}\right)^n$; on pose $n' = -n$; $n /_{-\infty}^{0} \Rightarrow n' /_{0}^{+\infty}$

$A = \sum_{n'=0}^{+\infty} \left(\frac{5}{2}\right)^{-n'} = \sum_{n'=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^{n'} = \frac{1}{1 - \frac{2}{5}} = \frac{5}{3}$

b) Calcule de la puissance $P = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^2(n)$

On a : $x(n) = \left(\frac{5}{2}\right)^n u(-n)$

$= \begin{cases} \left(\frac{5}{2}\right)^n & ; n \leq 0 \\ 0 & ; n > 0 \end{cases}$

$P = \sum_{n=-\infty}^{0} \left(\left(\frac{5}{2}\right)^n\right)^2 = \sum_{n=-\infty}^{0} \left(\frac{5}{2}\right)^{2n} = \sum_{n=-\infty}^{0} \left(\frac{25}{4}\right)^n$ on pose $n' = -n$

$P = \sum_{n'=0}^{+\infty} \left(\frac{25}{4}\right)^{-n'} = \sum_{n'=0}^{+\infty} \left(\frac{4}{25}\right)^{n'} = \frac{1}{1 - \frac{4}{25}} = \frac{25}{21} = P$

c) $y(n) = n \cdot x(n)$

$P_y = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y^2(n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^2 x^2(n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^2 \left(\left(\frac{5}{2}\right)^n u(-n)\right)^2$

$= \sum_{n=-\infty}^{0} n^2 \left(\frac{5}{2}\right)^{2n} = \sum_{n=-\infty}^{0} n^2 \left(\frac{25}{4}\right)^n$

on pose $n = -n' \Rightarrow n /_{-\infty}^{0} \Rightarrow n' /_{0}^{+\infty}$

Donc : $P_y = \sum_{n=0}^{+\infty} (-n')^2 \left(\frac{25}{4}\right)^{-n'}$

$P_y = \sum_{n'=0}^{+\infty} n'^2 \cdot \left(\frac{4}{25}\right)^{n'}$

On a : $\sum_{n=0}^{+\infty} n \cdot a^n = \frac{a}{(1-a)^2}$; $|a| < 1$

$$\frac{d\left(\sum_{n=0}^{+\infty} n a^n\right)}{da} = \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 a^{n-1} = \frac{(1-a)^2 - a.2.(-1)(1-a)}{(1-a)^4}$$

$$= \frac{1+a}{(1-a)^3}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 a^{n-1} = \frac{1+a}{(1-a)^3}$$

$$a^{-1} \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 a^n = \frac{1+a}{(1-a)^3} \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 . a^n = \frac{a(1+a)}{(1-a)^3}$$

$$P_y = \sum_{n'=0}^{+\infty} n'^2 \left(\frac{4}{25}\right)^{n'} = \frac{\frac{4}{25}\left(1+\frac{4}{25}\right)}{\left(1-\frac{4}{25}\right)} = \frac{\frac{4}{25}\left(\frac{29}{25}\right)}{\left(\frac{21}{25}\right)^3} = \frac{4 \times 29 \times 25}{21} = 138,9$$

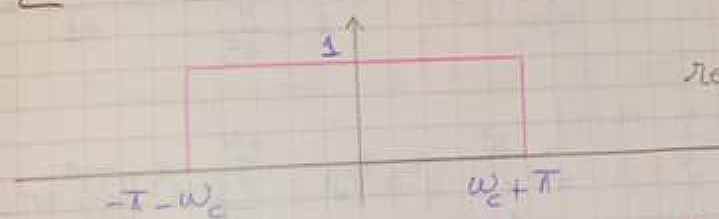
Série de TD n°=02:

Exo1 : Cours

Exo2 :

1) $h(n) = ?$

$$H(\omega) = \begin{cases} 1 & , |\omega| \leq \omega_c \\ 0 & , \omega_c < |\omega| \leq \pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 & , \omega \in [-\omega_c, \omega_c] \\ 0 & , \omega \in [-\pi, -\omega_c] \cup [\omega_c, \pi] \end{cases}$$



$\text{rect} \xrightarrow{DTFT^{-1}} \text{Sinc}$

$$h(n) = DTFT^{-1}(H(\omega)) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H(\omega)\, e^{j\omega n}\, d\omega$$

$$h(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} 1 \; e^{j\omega n}\, d\omega = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{jn}\left[e^{j\omega n}\right]_{-\omega_c}^{\omega_c}$$

$$h(n) = \frac{1}{2\pi j n}\left[e^{jn\omega_c} - e^{-jn\omega_c}\right]$$

$$h(n) = \frac{1}{n\pi}\left[\frac{e^{jn\omega_c} - e^{-jn\omega_c}}{2j}\right] = \frac{1}{n\pi}\sin(n\omega_c)$$

$$= \frac{\omega_c}{\omega_c . n . \pi}\sin(n\omega_c) = \frac{\omega_c}{\pi}\,\text{Sinc}(n\omega_c)$$

$$h(n) = \frac{2\pi f_c}{\pi} \,\mathrm{Sinc}\,(n\omega_c) = 2 f_c \,\mathrm{Sinc}\,(2\pi n f_c)$$

$$h(n) = 2 f_c \,\mathrm{Sinc}\,(2\pi n f_c)$$

2) $y(n) = 1{,}3433\, y(n-1) - 0{,}9025\, y(n-2) + x(n) - 1{,}4142\, x(n-1) + x(n-2)$

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)}$$

$$\mathrm{DTFT}(y(n)) = \mathrm{DTFT}\left[1{,}3433\, y(n-1) - 0{,}9025\, y(n-2) + x(n) - 1{,}4142\, x(n-1) + x(n-2)\right]$$

$$f(n-m) \xrightarrow{\mathrm{DTFT}} e^{-jm\omega} F(\omega)$$

$$\Rightarrow Y(\omega) = 1{,}3433\, Y(\omega)\, e^{-j\omega n} - 0{,}9025\, Y(\omega)\, e^{-2j\omega n} + X(\omega) - 1{,}4142\, X(\omega)\, e^{-j\omega n} + X(\omega)\, e^{-2j\omega n}$$

$$\Rightarrow Y(\omega) - 1{,}3433\, e^{-j\omega n}\, Y(\omega) + 0{,}9025\, e^{-2j\omega n}\, Y(\omega) = X(\omega) - 1{,}4142\, X(\omega)\, e^{-j\omega n} + X(\omega)\, e^{-2j\omega n}$$

$$\Rightarrow Y(\omega)\left[1 - 1{,}3433\, e^{-j\omega n} + 0{,}9025\, e^{-j2\omega n}\right] = X(\omega)\left[1 - 1{,}4142\, e^{-j\omega n} + e^{-2j\omega n}\right]$$

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{1 - 1{,}4142\, e^{-j\omega n} + e^{-2j\omega n}}{1 - 1{,}3433\, e^{-jn\omega} + 0{,}9025\, e^{-j2\omega n}}$$

Exo3:

1) Calcule de la TFD sur N points

$$x(n) = a^{n-2}\, u(n-2) \quad ; 0 < n < N$$

$$x(n) = \begin{cases} a^{n-2} & ; 2 \le n < N \\ 0 & ; 0 \le n < 2 \end{cases}$$

$$X(K) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, e^{-j\frac{2\pi}{N} n.k}$$

$$X(K) = \sum_{n=2}^{N-1} a^{n-2} . e^{-j\frac{2\pi}{N} n.K}$$

$$= \sum_{n=2}^{N-1} a^{-2} a^{n}\, e^{-j\frac{2\pi}{N} K.n}$$

$$= a^{-2} \sum_{n=2}^{N-1} \left(a\, e^{-j\frac{2\pi}{N} K}\right)^n$$

$$\sum_{n=n_1}^{n_2} (\beta)^n = \beta^{n_1} \times \frac{1-(\beta)^{n_2-n_1+1}}{1-\beta}$$

$$X(k) = a^{-2} \cdot \left(a e^{-j\frac{2\pi}{N}k}\right)^2 \cdot \left(\frac{1-\left(a \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}\cdot k}\right)^{(N-2)}}{1-a \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}\cdot k}}\right)$$

$$= \cancel{a^{-2} \cdot a^{2}} \cdot e^{-j\frac{4\pi}{N}k} \left(\frac{1-\left(a \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}\cdot k}\right)^{(N-2)}}{1-a\, e^{-j\frac{2\pi}{N}\cdot k}}\right)$$

$$= e^{-4j\frac{\pi k}{N}} \left(\frac{1-a^{(N-2)} \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}k(N-2)}}{1-a \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}\cdot k}}\right)$$

$$= \frac{e^{-j\frac{4\pi k}{N}} - a^{(N-2)} \cdot e^{-j\frac{2\pi}{\cancel{N}}k(\cancel{N}\cancel{-2}+2)}}{1-a \cdot e^{-\frac{2\pi}{N}\cdot k}}$$

$$X(k) = \frac{e^{-j\frac{4\pi k}{N}} - a^{(N-2)}}{1-a e^{-j\frac{2\pi}{N}\cdot k}}$$; pour : $k = 0, 1, 2, \dots N-1$

2) $X(k) = TFD(x(n))$

$y(n) = \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right) x(n)$

on a :

$$\cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right) = \frac{e^{j\frac{2\pi n}{N}} + e^{-j\frac{2\pi n}{N}}}{2}$$

$$y(n) = \left(\frac{e^{j\frac{2\pi n}{N}} + e^{-j\frac{2\pi n}{N}}}{2}\right) x(n)$$

$$= \frac{1}{2} e^{j\frac{2\pi n}{N}} \cdot x(n) + \frac{1}{2} e^{-j\frac{2\pi n}{N}} x(n)$$

$$Y(k) = TFD(y(n)) = TFD\left[\frac{1}{2} e^{j\frac{2\pi n}{N}} x(n) + \frac{1}{2} e^{-j\frac{2\pi n}{N}} x(n)\right]$$

$$f(n) \cdot e^{j\frac{2\pi n}{N}k_0} \xrightarrow{TFD} F(k-k_0)$$

$$Y(k) = \frac{1}{2} X(k-1) + \frac{1}{2} X(k+1)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{e^{-j\frac{4\pi(k-1)}{N}} - a^{(N-2)}}{1-a e^{-j\frac{2\pi}{N}(k-1)}}\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{e^{-j\frac{4\pi(k+1)}{N}} - a^{(N-2)}}{1-a e^{-j\frac{2\pi}{N}(k+1)}}\right]$$

3) $x(n) = 4 + 3\delta(n) - 5\delta(n-2)$

* Calcule de la TFD de $x(n)$ sur $N = 10$ points.

$X(k) = TFD(x(n)) = TFD[4 + 3\delta(n) - 5\delta(n-2)]$

$\delta(n) \xrightarrow{TFD} 1$

$\delta(n-2) \xrightarrow{TFD} 1 \; e^{-j\frac{4\pi}{N}k}$

$1 \xrightarrow{TFD} N\delta(k)$

$X(k) = 4 \cdot N \cdot \delta(k) + 3 - 5 \cdot e^{-j\frac{4\pi}{N}k}$

$N = 10 \Rightarrow X(k) = 40\delta(k) + 3 - 5 e^{-j\frac{2\pi}{5}k}$

*) $Y(k) = e^{j2k\frac{2\pi}{10}} X(k)$

$y(n) = ?$

$x(n+2) \xrightarrow{TFD} e^{j\frac{2\pi}{N}2k} \cdot X(k)$

$\Rightarrow y(n) = x(n+2)$

2ème Méthode.

$y(n) = TFD^{-1}(Y(k)) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} Y(k) \; e^{j\frac{2\pi}{N}\cdot n \cdot k}$

$= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}2k} X(k) \cdot e^{j\frac{2\pi}{N}\cdot n \cdot k}$

$= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k) \; e^{j\frac{2\pi}{N}k(2+n)}$

$= x(n+2)$

$\Rightarrow x(n) = 4 + 3\delta(n) - 5\delta(n-2)$

$y(n) = x(n+2) = 4 + 3\delta(n+2) - 5\delta(n)$

Exo 4:1

$$x(K) = \begin{cases} 8 & K=0 \\ 4 & K=3 \text{ et } K=7 \\ 1 & \text{Sinon} \end{cases}$$

1) Calcule de la TFD^{-1} sur 10 points

1ère Méthode : (Calcule direct).

$$x(n) = TFD^{-1}(X(K)) = \frac{1}{N}\sum_{K=0}^{N-1} X(K)\, e^{j\frac{2\pi}{N} n.K}$$

$n = 0, \dots N-1$

2ème Méthode : (Utilisation des propriétés de la TFD)

$$x(K) = \begin{cases} 8 & K=0 \\ 4 & K=3, K=7 \\ 0 & \text{Sinon} \end{cases}$$

$$x(K) = 8\,\delta(K) + 4\,\delta(K-3) + 4\,\delta(K-7)$$

$$x(K) = \begin{cases} 8 & K=0 \\ 4 & K=3, K=7 \\ h & \text{Sinon} \end{cases}$$

$$x(K) = (8-h)\,\delta(K) + (4-h)\,\delta(K-3) + (4-h)\,\delta(K-7) + h$$

, ona :

$$X(K) = \begin{cases} 8 & K=0 \\ 4 & K=3 \text{ et } K=7 \\ 1 & \text{Sinon} \end{cases} = fct(\delta(n \pm n_0))$$

$$X(K) = 1 + 7\,\delta(K) + 3\,\delta(K-3) + 3\,\delta(K-7)$$

$$\delta(n) \xrightarrow{TFD} 1$$

$$x(n) \xrightarrow{TFD} X(K)$$

$$\frac{1}{N} X(n) \xrightarrow{TFD} x(K)$$

$$\frac{1}{N} \xrightarrow{TFD} \delta(K)$$

$$\frac{1}{N} e^{j\frac{2\pi}{N} n.K_0} \xrightarrow{TFD} x(K-K_0)$$

$$\frac{1}{N} e^{j\frac{2\pi}{N}.3.n} \xrightarrow{TFD} \delta(K-3)$$

$$\frac{1}{N} e^{j\frac{2\pi}{N} n.7} \xrightarrow{TFD} \delta(K-7)$$

$x(n) = \delta(n) + \frac{7}{N} + \frac{3}{N} e^{j\frac{6\pi}{N} \cdot n} + \frac{3}{N} e^{j\frac{14}{N} \cdot n}$

Pour $N = 10$

$x(n) = \delta(n) + \frac{7}{10} + \frac{3}{10}\left(e^{j\frac{3\pi}{5} n} + e^{j\frac{7\pi}{5} n} \right)$

pour $n = 0, 1, \dots 9$

$\Omega = j\omega$

2) $x(n)$, $n = 0, \dots 255$; $f_e = 64\,KHz$

```
X = FFT(x, 256) ; n = 0:1:255 ;
DSP = abs(X).^2 ;
plot(n, DSP)
```

$\longrightarrow$ figure

$f_{Hz} = (0:N-1) * \frac{f_e}{N}$

$\omega = 2\pi f$

Le première pic à l'indice $n = 88$

$\left.\begin{array}{l} f_e \longrightarrow 256 \text{ points} \\ f_{Hz} \longrightarrow n = 88 \end{array}\right\} \Rightarrow f_{Hz} = \frac{f_e \cdot n}{256} = \frac{64 \cdot 10^3 \times 88}{256}$

$f_{Hz} = 22000\,Hz = 22\,KHz$

A partir de la propriété de la Symetrie de la TFD, on:

$F(K) = F^*(N - K)$

$F(88) = F^*(256 - 88) = F^*(168) = F(168)$

$\left.\begin{array}{l} f_e \longrightarrow 256 \\ f_{2Hz} \longrightarrow 168 \end{array}\right\} \Rightarrow f_{2Hz} = \frac{168 \times f_e}{256} = \frac{168 \times 64000}{256}$

$f_{2Hz} = 42\,KHz$

permet de réduire le temps de calcule de 20%

Exo1: Série de TD n°-02:

1) Calcule de la DTFT du Signal:

$$x(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^n u(n+2) = \begin{cases} \left(\frac{1}{4}\right)^n & n \geqslant -2 \\ 0 & n < -2 \end{cases}$$

$$X(\omega) = DTFT(x(n)) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)\, e^{-j\omega n}$$

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n u(n+2)\, e^{-j\omega n}$$

$$= \sum_{n=-2}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n e^{-j\omega n} = \sum_{n=-2}^{+\infty} \left(\frac{1}{4} e^{-j\omega}\right)^n$$

$$= \left(\frac{1}{4} e^{-j\omega}\right)^{-2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4} e^{-j\omega}} = \frac{16\, e^{2j\omega}}{1 - \frac{1}{4} e^{-j\omega}}$$

$$X(\omega) = \frac{16\, e^{2j\omega}}{1 - \frac{1}{4} e^{-j\omega}}$$

a) La DTFT inverse de $X(\omega) = \cos^2(\omega)$

$$X(\omega) = \cos^2(\omega) = \left(\frac{e^{j\omega} + e^{-j\omega}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(e^{2j\omega} + 2 + e^{-2j\omega}\right)$$

$$X(\omega) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} e^{2j\omega} + \frac{1}{4} e^{-2j\omega}$$

$$x(n) = DTFT^{-1}\{X(\omega)\} = DTFT^{-1}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} e^{2j\omega} + \frac{1}{4} e^{-2j\omega}\right)$$

$$\delta(n) \xrightarrow{DTFT} 1$$

$$\frac{1}{2}\delta(n) \xrightarrow{DTFT} \frac{1}{2}$$

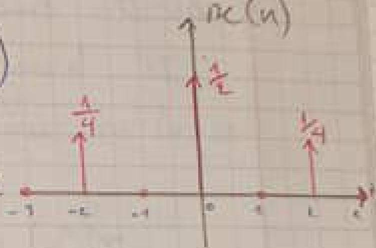
$$f(n - n_0) \xrightarrow{DTFT} F(\omega)\, e^{-j\omega n_0}$$

$$\frac{1}{4}\delta(n+2) \xrightarrow{DTFT} \frac{1}{4} e^{j2\omega}$$

$$\frac{1}{4}\delta(n-2) \longrightarrow \frac{1}{4} e^{-j2\omega}$$

$$x(n) = \frac{\delta(n)}{2} + \frac{1}{4}\left(\delta(n-2) + \delta(n+2)\right)$$

$$\Rightarrow x(n) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } n = 0 \\ \frac{1}{4} & \text{si } n = 2 \text{ ou } n = -2 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$



2ᵉ Méthode :

Applique la définition

$$x(n) = DTFT^{-1}(X(\omega)) = DTFT^{-1}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} e^{j2\omega} + \frac{1}{4} e^{-j2\omega}\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} e^{j2\omega} + \frac{1}{4} e^{-j2\omega}\right) \cdot e^{jn\omega}\, d\omega$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega n}\, d\omega + \frac{1}{8\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} e^{j\omega(n+2)}\, d\omega + \frac{1}{8\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega(n-2)}\, d\omega$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{j^n}\left[e^{j\omega n}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{8\pi} \times \frac{1}{j(n+2)}\left[e^{j\omega(n+2)}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{8\pi}\frac{1}{j(n-2)}\left[e^{j\omega(n-2)}\right]_{-\pi}^{\pi}$$

Pour $n \neq 0$, $n \neq -2$ et $n \neq 2$

$$\Rightarrow x(n) = \frac{1}{j4\pi n}\left[e^{j\pi n} - e^{-j\pi n}\right] + \frac{1}{j8\pi(n+2)}\left[e^{j(n-2)\pi}\ e^{-j\pi(n-2)}\right] +$$

a la fin on obtient :

$$x(n) = \frac{1}{2}\delta(n) + \frac{1}{4}\delta(n-2) + \frac{1}{4}\delta(n+2)$$