EXAMEN – Commande des Systèmes Linéaires

Exercice1 :Soit un système de fonction de transferten boucle ouverte

$$H_{BO}(p) = \frac{10}{p(1+0.1p)^2}$$

Ce système est placé dans un asservissement à retour unitaire avec un correcteur proportionnel de gain K.

1. Calculer la valeur de K qui assure au système une marge de phase de 45°.
2. Calculer l'erreur en régime permanent pour une consigne échelon unitaire, et l'erreur si la consigne est une rampe de pente 1.

On désire avoir un asservissement dont les exigences du cahier de charges sont les suivantes :

-erreur statique nulle$\varepsilon_{01} = 0$

-erreur de vitesse $\varepsilon_{02} = 5\%$

On adjoint au correcteur proportionnel, un correcteur à retard de phase, justifier ce choix.

3. Calculer les paramètres du correcteur.

Exercice2:On considère le système décrit par la représentation d'état suivante :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -20 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 25 & \frac{-500}{19} & \frac{25}{19} \end{bmatrix} x$$

1. Nommer la forme de la représentation d'état ci-dessus?
2. Quel est l'ordre du système ?
3. Quels sont les pôles du système ?
4. Le système est-il stable en boucle ouverte ? pourquoi ?
5. Le système est-il commandable ? pourquoi ?
6. Calculer la fonction de transfert H(p)=Y(p)/U(p).
7. Déduire l'équation différentielle décrivant le système.

Exercice3:Le comportement d'un système est décrit par les équations différentielles suivantes :

$$\dot{x}_1 + 2x_1 - 4x_2 = 5u$$
$$\dot{x}_1 - \dot{x}_2 + 4x_1 + x_2 = 0$$
$$y = \dot{x}_1 - \dot{x}_2 \rightarrow -2x_1 + 4x_2 + 5u - 4x_1 - x_2 \ldots$$

$-8x_1 + 3x_2$

1. Présenter le système sous forme d'état.
2. Calculer la fonction de transfert correspondante$G(p) = \frac{Y(p)}{U(p)}$
3. Le système est-il stable ? Justifier ?
4. Vérifier la commandabilité et l'observabilité du système.

Exercice 4 :

On considère un système LTI régi par l'équation d'état :

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 6 & -5 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} x(t)$$

1. Calculer la matrice de transition en utilisant la méthode de Cayley-Hamilton.
2. Pour $x(0) = [1 \quad 1]^T$, calculer la réponse y(t), à une entrée nulle.
3. Pour u(t)=1, t≥0, Calculer la réponse y(t).

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 6 & -5 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} x(t)$$

1/ $\Phi(t)$ en utilisant Cayley-Hamilton.

$$\Phi(t) = e^{At} = \alpha_0(t) I + A \alpha_1(t)$$

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 4 & 3 \\ -6 & \lambda + 5 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 + \lambda - 2 = 0$$

$\lambda_1 = -2, \ \lambda_2 = 1$ 0,5

$$\begin{cases} e^{\lambda_1 t} = \alpha_0 + \lambda_1 \alpha_1 \\ e^{\lambda_2 t} = \alpha_0 + \lambda_2 \alpha_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^{-2t} = \alpha_0 - 2\alpha_1 \\ e^{t} = \alpha_0 + \alpha_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_0 = \dfrac{2e^t + e^{-2t}}{3} \\ \alpha_1 = \dfrac{e^t - e^{-2t}}{3} \end{cases}$$

0,5

$$e^{At} = \frac{2e^t + e^{-2t}}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{e^t - e^{-2t}}{3} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 6 & -5 \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 2e^t - e^{-2t} & e^{-2t} - e^t \\ 2e^t - 2e^{-2t} & 2e^{-2t} - e^t \end{bmatrix}$$ 0,5

2/ La réponse $y(t)$ pour $x(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T$

$$y(t) = C e^{At} x(0)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2e^t - e^{-2t} & e^{-2t} - e^t \\ 2e^t - 2e^{-2t} & 2e^{-2t} - e^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$ 0,5

$$y(t) = 0$$ 1

3/ $$y(t) = \int_0^t C e^{A(t-\tau)} B U(\tau) \, d\tau$$ avec $u(t) = 1$

$$= \int_0^t \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2e^{(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)} & e^{-2(t-\tau)} - e^{(t-\tau)} \\ 2e^{(t-\tau)} - 2e^{-2(t-\tau)} & 2e^{-2(t-\tau)} - e^{(t-\tau)} \end{bmatrix}$$

$$= -2 \int_0^t e^{-2(t-\tau)} \, d\tau$$ 0,5

$$\boxed{y(t) = e^{-2t} - 1}$$ 1

Examen - Commande des systèmes linéaires

Exercice 1 : 5pt5

$$H_{BO}(p) = \frac{10}{p(1+0,1p)^2}$$

1/ Marge de phase de 45°

FTBO : $T_{cBO}(p) = \dfrac{10K}{p(1+0,1p)^2}$

$M\varphi = 180 + \arg\left[T_{cBO}(j\omega_{co})\right]$

$= 180 - 90 - 2\operatorname{arctg}(0,1\omega_{co}) \Rightarrow \dfrac{\omega_{co}}{10} = tg\, 22,5$

$\boxed{\omega_{co} = 4,14\ rd/s}$ 0,5

ω_{co} est la pulsation de passage par 0dB elle vérifie $|T_{cBO}(j\omega_{co})| = 1$

$$\frac{10K}{\omega_{co}\left(1+\frac{\omega_{co}^2}{100}\right)} = 1 \Rightarrow K = \frac{\omega_{co}\left(1+\frac{\omega_{co}^2}{100}\right)}{10}$$

A.N : $\boxed{K = 0,48}$ 0,5

2/ $\varepsilon_{01} = 0$ (système de classe 1) 0,5

$\varepsilon_{02} = \dfrac{1}{K_v}$ avec $K_v = \lim\limits_{p\to 0} p\, T_{cBO}(p) = 10K$

$\varepsilon_{02} = \dfrac{1}{10K}$; $\boxed{\varepsilon_{02} = 20\%}$ 0,5

3/ $C(p) = b\,\dfrac{1+\tau p}{1+b\tau p}$ avec $b > 1$

$$H_{BOC}(p) = K\cancel{K_c}\,\frac{10(1+\tau p)}{p(1+b\tau p)(1+0,1p)^2}$$ 0,5

Le correcteur retard de phase doit ajouter en basses fréquences le gain nécessaire pour avoir la précision désirée. 0,5

$\varepsilon_{02} = \dfrac{1}{K_v}$, avec $K_v = \lim\limits_{p\to 0} p\,H_{BOC}(p) = 10Kb$

$\varepsilon_{02} = \dfrac{1}{10Kb} = \dfrac{5}{100} \Rightarrow b = \dfrac{2}{K}$

$\boxed{K_c = b}$ 0,5 A.N $\boxed{b = 4,16}$ 0,5

Exercice 3 : (5 pts)

$$\dot{x}_1 + 2x_1 - 4x_2 = 5u \qquad \dot{x}_1 = -2x_1 + 4x_2 + 5u$$
$$\dot{x}_1 - \dot{x}_2 + 4x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow \dot{x}_2 = 2x_1 + 5x_2 + 5u$$
$$y = \dot{x}_1 - \dot{x}_2 \qquad y = -4x_1 - x_2$$

1/ La forme d'état :

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2 & 4\\ 2 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}5\\ 5\end{bmatrix}u \quad 0,5$$

$$y = \begin{bmatrix}-4 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} \quad 0,5$$

2/ $$G(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = C\left[pI - A\right]^{-1}B$$

$$\left[pI - A\right]^{-1} = \frac{1}{(p+3)(p-6)}\begin{bmatrix}p-5 & 4\\ 2 & p+2\end{bmatrix} \quad 0,5$$

$$G(p) = \frac{1}{(p+3)(p-6)}\begin{bmatrix}-4 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p-5 & 4\\ 2 & p+2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\ 5\end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{(p+3)(p-6)}\begin{bmatrix}-4p+18 & -p-18\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\ 5\end{bmatrix}$$

$$\boxed{G(p) = \frac{-25p}{(p+3)(p-6)}} \quad 0,5$$

3/ Le système est instable $p_1 = -3$ et $p_2 = 6$ (instable) 1

4/ $$Q_c = \begin{bmatrix}B & AB\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5 & 10\\ 5 & 35\end{bmatrix} \quad 0,5$$

$|Q_c| = 175 - 50 = 125 \Rightarrow$ Le système est complètement commandable 0,5

$$O = \begin{bmatrix}C\\ CA\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-4 & -1\\ 6 & -21\end{bmatrix} \quad 0,5$$

$|O| = 84 + 6 = 90 \Rightarrow$ Le système est complètement

Examen - Commande des systèmes linéaires

Exercice 2 : (5pts)

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -20 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 25 & \frac{-500}{19} & \frac{25}{19} \end{bmatrix} x$$

1. C'est la forme modale (0,5)
2. Le système est d'ordre 3 (0,5)
3. Les pôles du système sont $0, -1, -20$ (0,5) (1)
4. Le système est stable en BO car les pôles sont strictement négatifs
5. $H(p) = C\left[(pI-A)^{-1}B\right]$

$$(pI-A)^{-1} = \frac{1}{p(p+1)(p+20)} \begin{bmatrix} (p+1)(p+20) & 0 & 0 \\ 0 & p(p+20) & 0 \\ 0 & 0 & p(p+1) \end{bmatrix} \quad (0,5)$$

$$H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{500}{p^3 + 21p^2 + 20p} \quad (0,5)$$

6. $$\frac{d^3y(t)}{dt^3} + 21\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 20\frac{dy(t)}{dt} = 500\,u(t) \quad (0,5)$$

7. $Q_c = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -20 & 400 \end{bmatrix} \quad (0,5)$$

$rang(Q_c) = 3 \Rightarrow$ le système est commandable (0,5)