Université Ibn Khaldoun de Tiaret
Faculté des Sciences Appliquées
Département de Sciences et de Technologie

Examen final : Electricité et Magnétisme (PHY 2)	**1ère ST**	**A.U : 2017/2018**

Questions de cours (4 pts):

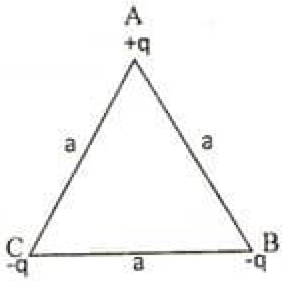
- On considère un conducteur creux (ayant une cavité vide). Pourquoi le potentiel électrostatique V en tout point de la cavité est constant ?
- Un conducteur de forme cylindrique, de longueur l, de rayon r et de résistivité ρ, donner sa résistance.
- Donner l'expression du moment électrique dipolaire.
- Déterminer la capacité d'un condensateur plan de surface S dont les armatures séparées d'une distance d en présence d'un isolant (diélectrique) de permittivité $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$

Exercice 1 (4 pts):

Trois charges ponctuelles +q, -q et -q sont placées aux sommets d'un triangle équilatéral de côté a.

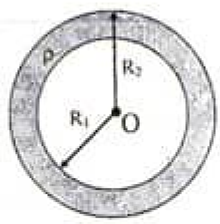
Déterminer la force exercée sur chacune des charges. Représenter ces forces sur le schéma.

Indication : prendre un repère orthonormé dont l'axe (x'x) passe par deux sommets, l'axe (y'y) passe par le troisième sommet.



Exercice 2 (6 pts):

On considère deux sphères concentriques de rayon R_1 et R_2 (avec $R_1 < R_2$) l'espace entre les deux sphères est chargé avec une densité de charges volumique $\rho > 0$.



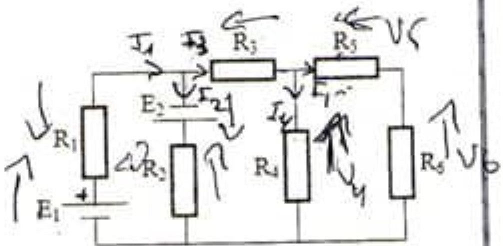
1) Déterminer le champ électrostatique dans les cas suivants:
   a) $r < R_1$
   b) $R_1 < r < R_2$
   c) $r > R_2$
2) Déduire l'expression du potentiel électrostatique.

Exercice 3 (6 pts) :

Soit le montage de la figure ci-contre, on donne :

$E_1 = 25$ V, $E_2 = 18$ V, $R_1 = 20\ \Omega$, $R_2 = 30\ \Omega$, $R_3 = 7.2\ \Omega$,

$R_4 = 64\ \Omega$, $R_5 = 8.8\ \Omega$, $R_6 = 10\ \Omega$



1) Calculer la résistance équivalente de l'association des résistances R_3, R_4, R_5 et R_6
2) Calculer les intensités des courants électriques circulants dans ce circuit.
3) Déduire la tension aux bornes de chaque résistance.
4) Calculer la puissance dissipée par effet Joule dans ce circuit.

A.U: 2017/2018 **Corrigé type de l'examen P2**

Questions de cours : (4 pts) :

1) En appliquant le Th de Gauss à l'intérieur de la cavité :

$$\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{\sum Q_{int}}{\varepsilon_0}$$ (1)

or à l'intérieur de S : $\sum Q_{int} = 0$, donc : $E = 0$

et comme $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\,V = -\frac{\partial V}{\partial r}\vec{u_r} = \vec{0} \Rightarrow V = \text{Const.}$

2) $R = \frac{\rho l}{S} = \frac{\rho l}{\frac{\pi D^2}{4}} = \frac{\rho l}{\pi r^2}$ (1)

3) Le moment dipolaire :

$\vec{P} = q\cdot\vec{a}$ (1)

4) La capacité d'un condensateur plan :

$E_1 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$, $E_2 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$

$E = E_1 + E_2 = \frac{\cancel{2}\sigma}{\cancel{2}\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$

$\int_A^B dV = -\int_A^B E\,dx \Rightarrow V_B - V_A = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\cdot d$ (1)

donc : $U = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} d$

$C = \frac{Q}{U} = \frac{\sigma S}{U} = \frac{\cancel{\sigma} S}{\frac{\cancel{\sigma}}{\varepsilon_0} d} \Rightarrow \boxed{C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}}$

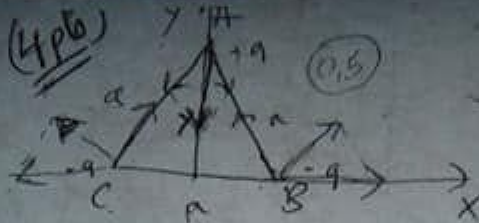
P2

de

: E = 0

Const.

Exo 1 : (4pts)



(0,5)

$y^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2$

$y^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = a^2\left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4}a^2$

$y = \frac{a}{2}\sqrt{3}$

$A\left(0, \frac{a}{2}\sqrt{3}\right), \ B\left(\frac{a}{2}, 0\right), C\left(-\frac{a}{2}, 0\right)$

$\vec{F}_A = \vec{F}_{CA} + \vec{F}_{BA}$ (0,25), avec $\vec{F}_{CA}$: force appliquée par C sur q, $\vec{F}_{BA}$: force appliquée par B sur A

$\vec{F}_A$: force totale appliquée sur A

(0,25)

selon la loi de Coulomb : $\vec{F} = K\frac{q_1 q_2}{r^2}\vec{u}$

donc, $\vec{F}_{CA} = K\frac{q_C q_A}{a^2}\vec{u}_{CA}$, avec $\vec{u}_{CA} = \frac{\vec{CA}}{CA} = \frac{\vec{CA}}{a}$

$= \frac{(x_A - x_C)\vec{i} + (y_A - y_C)\vec{j}}{a} = \frac{(0 - (-\frac{a}{2}))\vec{i} + (\frac{a}{2}\sqrt{3} - 0)\vec{j}}{a} = \frac{a}{2}\vec{i} + \frac{a}{2}\sqrt{3}\vec{j}$

donc, $\vec{F}_{CA} = \frac{K.(-q)(+q)}{a^3}\left[\frac{a}{2}\vec{i} + \frac{a}{2}\sqrt{3}\vec{j}\right] = -\frac{Kq^2}{a^3}\left[\frac{a}{2}\vec{i} + \frac{a}{2}\sqrt{3}\vec{j}\right]$

$= -\frac{Kq^2}{a^2}\left(\frac{1}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}\right)$

De la même manière, on trouve :

$\vec{F}_{BA} = -K\frac{q^2}{a^2}\left(-\frac{1}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}\right)$

$\vec{F}_A = \vec{F}_{CA} + \vec{F}_{BA} = -\frac{Kq^2}{a^2}\sqrt{3}\vec{j}$ (1)

De même on trouve : $\vec{F}_B = \vec{F}_{AB} + \vec{F}_{CB} = -K\frac{q^2}{a^2}\left(\frac{1}{2}\vec{i} - \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}\right) + \frac{Kq^2}{a^2}(\vec{i})$

$= K\frac{q^2}{a^2}\left(\frac{1}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}\right)$ (1)

$\vec{F}_C = \vec{F}_{AC} + \vec{F}_{BC} = -\frac{Kq^2}{a^2}\left(-\frac{1}{2}\vec{i} - \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}\right) + \frac{Kq^2}{a^2}(-\vec{i}) = \frac{Kq^2}{a^2}\left(-\frac{1}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}\right)$ (1)

c) $r > R_2$: $\frac{Q_{int}}{} = \rho V = \rho\left(\frac{4}{3}\pi R_2^3 - \frac{4}{3}\pi R_1^3\right)$

$I_1 = I_2 + I_3 = 0{,}767 + (-0{,}533) = 0{,}234\,A$ 0,25

$I_1 = 0{,}234\,A.$

$I_5 = I_3 - I_4 = -0{,}533 - 0{,}052 =$

$I_5 = -0{,}585\,A.$ 0,25

3) La tension aux bornes de chaque résistance :

$V_{R_1} = R_1 \cdot I_1 = 20.(0{,}234) = 4{,}68\,V$ 0,25

$V_{R_2} = R_2 \cdot I_2 = 30.(0{,}767) = 23{,}01\,V.$ 0,25

$V_{R_3} = R_3 I_3 = 7{,}2(-0{,}533) = -3{,}837\,V.$ 0,25

$V_{R_4} = R_4 I_4 = 64(0{,}052) = 3{,}328\,V.$ 0,25

$V_{R_5} = R_5 I_5 = 8{,}8(-0{,}585) = -5{,}148\,V.$ 0,25

$V_{R_6} = R_6 I_5 = 10(-0{,}585) = -5{,}85\,V.$ 0,25

4) Calcul de la puissance dissipée dans ce montage :

$P = P_{R_1} + P_{R_2} + P_{R_3} + P_{R_4} + P_{R_5} + P_{R_5}$

$P = R_1 I_2^2 + R_2 I_2^2 + R_3 I_3^2 + R_4 I_4^2 + R_5 I_5^2 + R_6 I_5^2$

$P = 20.(0{,}234)^2 + 30(0{,}767)^2 + 7{,}2(0{,}533)^2 + 64(0{,}052)^2 + 8{,}8(0{,}585)^2 + 10(0{,}585)^2$

$P = 1{,}095 + 17{,}648 + 2{,}045 + 0{,}173 + 3{,}011 + 3{,}422$

$\boxed{P = 27{,}394\,W}$ 0,5

Exo2: (6pts):

Calcul de $\vec{E}$:

- Le système présente une symétrie sphérique.
- La distribution de charge est uniforme
- Le champ est de la forme : $\vec{E} = E.\vec{u_r}$

Théorème de Gauss :

$$\phi_E = \oint\!\!\oint_S \vec{E}.d\vec{s} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \quad 0{,}5$$

Surface de Gauss choisie une sphère de centre O et de rayon r

$$\oint\!\!\oint \vec{E}.d\vec{s} = E.S = E.4\pi r^2 \longrightarrow (1) \quad 0{,}5$$

$\frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = ?$ discussion :

a) $r < R_1$: $\frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = 0 \longrightarrow (2)$

$(1) = (2) \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \vec{0}}$ 1

b) $R_1 < r < R_2$: $\frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{\rho V}{\varepsilon_0} = \frac{\rho\left(\frac{4}{3}\pi r^3 - \frac{4}{3}\pi R_1^3\right)}{\varepsilon_0}$

$$\Rightarrow \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{\rho\frac{4}{3}\pi\left(r^3 - R_1^3\right)}{\varepsilon_0} \longrightarrow (2)'$$

$(1) = (2)' \Rightarrow$ $E = \frac{\rho \cancel{\frac{4}{3}\pi}\left(r^3 - R_1^3\right)}{\cancel{4\pi} r^2} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(r - \frac{R_1^3}{r^2}\right)$

Donc :

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(r - \frac{R_1^3}{r^2}\right)\vec{u_r}} \quad 1$$

Exo3 : (6pts)

1) Calcul de

$F_C = F_{AC} + F_{BC} = \frac{kq}{a^2}\left(\frac{1}{2}\vec{i} - \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}\right) + \frac{kq}{a^2}(-\vec{i}) = \frac{kq}{a^2}\left(-\frac{1}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}\right)$ (1)

c) $r > R_2$: $\frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{\rho V}{\varepsilon_0} = \frac{\rho\left(\frac{4}{3}\pi R_2^3 - \frac{4}{3}\pi R_1^3\right)}{\varepsilon_0}$

$$\frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{\rho\frac{4}{3}\pi\left(R_2^3 - R_1^3\right)}{\varepsilon_0} \longrightarrow (2)''$$

$(1) = (2)'' \Rightarrow \quad E = \frac{\rho\frac{4}{3}\pi\left(R_2^3 - R_1^3\right)}{4\pi r^2}$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r^2}\left(R_2^3 - R_1^3\right)\vec{u_r}} \quad (1)$$

Sous forme compact:

$$\vec{E} = \begin{cases} 0\,\vec{u_r} \ ; & r < R_1 \\ \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(r - \frac{R_1^3}{r^2}\right)\vec{u_r} \ ; & R_1 < r < R_2 \\ \frac{\rho}{3\varepsilon_0 r^2}\left(R_2^3 - R_1^3\right)\vec{u_r} \ ; & r > R_2 . \end{cases}$$

2) Calcul de V :

$$\vec{E} = -\vec{grad}\,V = -\left[\frac{\partial V}{\partial r}\vec{u_r} + \cancel{\frac{\partial V}{r\,\partial\theta}\vec{u_\theta}} + \cancel{\frac{\partial V}{r\sin\theta\,\partial\varphi}\vec{u_\varphi}}\right]$$

$0 \qquad 0$

(0,5)

$$\vec{E} = -\frac{dV}{dr}\vec{u_r} \Rightarrow \int dV = \int -E\,dr$$

$$\Rightarrow V = -\int E\,dr$$

(0,5)

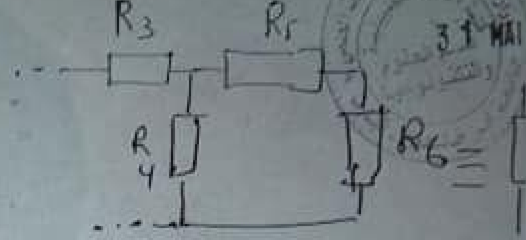
- $r < R_1$: $V = -\int 0\,dr = C_1$.
- $R_1 < r < R_2$: $V = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(\frac{r^2}{2} + \frac{R_1^3}{r}\right) + C_2$. (0,5)
- $r > R_2$: $V = \frac{\rho}{3\varepsilon_0 r}\left(R_2^3 - R_1^3\right) + C_3$. (0,5)

(4)

$(R_1 + R_2) I_2 + R_1 I_3 = E_1 + E_2 \longrightarrow (3)'$

EXO3 : (6 pts)

1) Calcul de $R_{éq}$:



$R_{56} = R_5 + R_6 = 8,8 + 10 = 18,8\,\Omega$

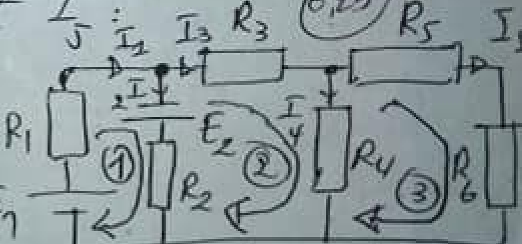
$\frac{1}{R_{56-4}} = \frac{1}{R_{56}} + \frac{1}{R_4} \Rightarrow R_{56-4} = \frac{R_{56} \cdot R_4}{R_{56} + R_4} = \frac{18,8 \cdot 64}{18,8 + 64} = \frac{1203,2}{82,8}$

$\Rightarrow R_{56-4} = 14,53\,\Omega$

$R_{éq} = R_3 + R_{56-4} = 7,2 + 14,53 = 21,73\,\Omega$. (0,5)

2) Calcul de : I_1, I_2, I_3, I_4 et I_5 : (0,25)

Loi de Kirchhoff :



Loi des noeuds :

N1 : $I_1 = I_2 + I_3 \longrightarrow (1)$ (0,25)

N2 : $I_3 = I_4 + I_5 \longrightarrow (2)$ (0,25) $\Rightarrow I_5 = I_3 - I_4 \longrightarrow (2)'$

Loi des mailles :

M1 : $-E_1 + R_1 I_1 + R_2 I_2 - E_2 = 0$ (0,5)

$\Rightarrow R_1 I_1 + R_2 I_2 = E_1 + E_2 \longrightarrow (3)$

M2 : $-R_2 I_2 + E_2 + R_3 I_3 + R_4 I_4 = 0$ (0,5)

$\Rightarrow -R_2 I_2 + R_3 I_3 + R_4 I_4 = -E_2 \longrightarrow (4)$

M3 : $-R_4 I_4 + (R_5 + R_6) I_5 = 0$ (0,5) $\longrightarrow (5)$

On remplace (1) dans (3) et (2)' dans (5), on obtient :

$$\begin{cases} (R_1+R_2)I_2 + R_1 I_3 = E_1 + E_2 \longrightarrow (3)' \\ -R_2 I_2 + R_3 I_3 + R_4 I_4 = -E_2 \longrightarrow (4) \\ (R_5+R_6) I_3 - (R_4+R_5+R_6) I_4 = 0 \longrightarrow (5)' \end{cases}$$

Sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} R_1+R_2 & R_2 & 0 \\ -R_2 & R_3 & R_4 \\ 0 & R_5+R_6 & -(R_4+R_5+R_6) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1+E_2 \\ -E_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Application numérique :

$$\begin{pmatrix} 50 & 20 & 0 \\ -30 & 7{,}2 & 64 \\ 0 & 18{,}8 & -82{,}8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 43 \\ -18 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Résolution de système d'équations par la méthode de Cramer :

$\Delta = -139648.$, $\Delta I_2 = -107180{,}48$, $\Delta I_3 = 74520$

$\Delta_{I_4} = -7332.$

Donc : $I_2 = \dfrac{\Delta I_2}{\Delta} = \dfrac{-107180{,}48}{139648} = 0{,}767\,A$ (0,25)

$I_3 = \dfrac{\Delta I_3}{\Delta} = \dfrac{74520}{-139648} = -0{,}533\,A.$ (0,25)

$I_4 = \dfrac{\Delta_{I_4}}{\Delta} = \dfrac{-7332}{-139648} = 0{,}052\,A.$ (0,25)