Université de Saida Dr. Moulay Tahar	**Analyse I (S1)**
Faculté des sciences	**13 Janvier 2019**
Département de Mathématiques	**Durée 02 heures**
$1^{\text{ière}}$ **Année Licence M.I**	

◀ Examen Final ▶

Exercice-01 : On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et par la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{1}{6}u_n^2 + \frac{3}{2}$$

1. Montrer que pour tout $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n > 0$.
2. On suppose que la suite (u_n) converge vers l, déterminer l.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n < 3$.
4. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, que peut-on en conclure ?

Exercice-02 : Déterminer (s'ils existent) : les majorants, les minorants, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément et le plus petit élément des ensembles A et B suivants tout en justifiant les réponses.

$$A = [\sqrt{2}, \frac{5}{2}[\cap \mathbb{Q} \quad \text{et} \quad B = \{(-1)^n + \frac{1}{n^2}, n \in \mathbb{N}^*\}$$

Exercice-03 : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. Calculer $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$. Que peut-on en déduire ?

Exercice-04 : Les deux questions 1. et 2. de cet exercice sont indépendantes.

1. Soit x et y deux réels avec $0 < x < y$. Montrer que

$$x < \frac{y-x}{ln(y) - ln(x)} < y.$$

2. Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$.

   a. Montrer que pour tout $x > 0$, il existe $c \in]x, x+1[$ tel que

$$f(x) - f(x+1) = \frac{1}{c^2}e^{\frac{1}{c}}$$

   b. Déterminer

$$\lim_{x\to\infty} x^2(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}})$$

Bon Courage

Les responsables de la matière