Correction de l'escamen

05 pts

Exercice n° 01 :

1°/ Montrons par récurrence :

On a : $u_1 = \frac{1}{2} u_0^2 + \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$ 0,5

On va montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$u_n > 0 \Rightarrow u_{n+1} > 0$.

1

On a : $u_{n+1} = \frac{1}{6} u_n^2 + \frac{1}{3} > \frac{1}{3} > 0$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $u_n > 0$.

2°/ Si la suite (u_n) converge vers ℓ alors :

$\ell = \frac{1}{6} \ell^2 + \frac{3}{2} \iff \ell^2 - 6\ell + 9 = 0$

0,5 $\iff \ell = 3$. 0,5

3°/ Par récurrence :

On a $u_0 = 0 < 3$. 0,5

et montrons que si

$u_n < 3 \Rightarrow u_{n+1} < 3$ 1

$u_{n+1} = \frac{1}{6} u_n^2 + \frac{3}{2} < \frac{1}{6} \times 9 + \frac{3}{2} = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 3$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n < 3$.

4°/ $\forall n \in \mathbb{N}$

$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{6} u_n^2 + \frac{3}{2} - u_n = \frac{1}{6}(u_n^2 - 6u_n + 9)$

$= \frac{1}{6}(u_n - 3)^2 > 0$.

1

La suite (u_n) est strictement croissante et bornée par 3 donc elle est convergente.

et d'après la question 2

0,5

$\lim_{n \to \infty} u_n = 3$.

Exercice n° 02 :

1/ On a : $A = [\sqrt{2}, \frac{5}{2}[\cap \mathbb{Q}$.

$A \neq \emptyset$ car $2 \in A$

les majorants de A est l'intervalle $[\frac{5}{2}, +\infty[$. 0,5

les minorants " " " " $]-\infty, \sqrt{2}]$. 0,5

$\sup A = \frac{5}{2}$ car $\frac{5}{2}$ est le plus petit des majorants, 0,5

et $\forall x \in A \quad x \leq \frac{5}{2}$.

Montrons que $\inf A = \sqrt{2}$. 0,5

$\sqrt{2}$ est un minorant de A, montrons que $\sqrt{2}$ est le plus grand des minorants c.à.d.

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x_0 \in A \quad \sqrt{2} \leq x_0 < \sqrt{2} + \varepsilon$ ... (1)

On sait que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

donc $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists r \in \mathbb{Q} \quad \sqrt{2} < r < \sqrt{2} + \varepsilon$ 0,5

on distingue deux cas.

→ si $0 < \varepsilon < \frac{5}{2} - \sqrt{2}$.

on remplace dans (1).

$$x_0 < \sqrt{2} + \varepsilon < \sqrt{2} + \frac{5}{2} - \sqrt{2} = \frac{5}{2}.$$

donc il suffit de prendre $x_0 = 2$

→ si $\varepsilon \geq \frac{5}{2} + \sqrt{2}$. et comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$

donc il suffit de prendre :

$x_0 = r \in \mathbb{Q} \cap]\sqrt{2}, \sqrt{2} + \varepsilon[$.

d'où $\sqrt{2}$ est le plus grand des minorants de A

et par suite $\inf A = \sqrt{2}$.

le $\sup A = \frac{5}{2} \notin A$ (car $\frac{5}{2} \notin [\sqrt{2}, \frac{5}{2}[$) 0,5

et $\inf A = \sqrt{2} \notin A$ (car $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$).

donc max A et min A n'existent pas.

$B \neq \emptyset$. car $0 \in B$. (pour $n=1$). 0,5

quelques éléments de B:

$B = \{0, \frac{5}{4}, \frac{-8}{9}, \frac{17}{16}, \frac{-24}{25}, \frac{37}{36}, -\frac{48}{49}, \ldots\ldots\}$.

Les majorants de B sont $[\frac{5}{4}, +\infty[$. 0,5

Les minorants " " " $]-\infty, -1]$. 0,5

$\sup B = \frac{5}{4} = \max B$. 0,5

or, $-1 \notin B$. donc.

$\inf B = -1$ et $\min B$ n'existe pas. 0,5

Ex n° 03 : On a : $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

1/ La fonction $x \longmapsto e^{-\frac{1}{x^2}}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ (comme la composition de fonctions continues). 0,5

maintenant en $x = 0$.

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0 = f(0)$$ 1

donc f est continue sur $\mathbb{R}$.

2/ $\forall x \in \mathbb{R}^*$ $f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}$ 0,5

Pour $x = 0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}$$ forme indéterminée

Posons $\frac{1}{x} = t$ 1

$x \overset{>}{\to} 0 \Rightarrow t \to +\infty$.

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{e^{-1/x^2}}{x} = \lim_{t \to +\infty} t e^{-t^2} = \lim_{t \to +\infty} \frac{t}{e^{t^2}}$$ forme indéterminée

en utilisant la règle de l'Hopital on aura :

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{1}{2t e^{t^2}} = 0$$

$x \overset{<}{\to} 0 \Rightarrow t \to -\infty$.

$$\lim_{t \to -\infty} \frac{t}{e^{t^2}} = \lim_{t \to -\infty} \frac{1}{2t e^{t^2}} = 0.$$

et donc $f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3} e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

3/ la fonction f est de classe C^1 car

(où f' est continue sur $\mathbb{R}$) 1

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0} \frac{2}{x^3} e^{-1/x^2}$$

On pose $\frac{1}{x} = t$ $x \to 0 \Rightarrow t \to \infty$ 1

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{t\to\pm\infty} 2t^3 e^{-t^2} = \lim_{t\to\pm\infty} \frac{2t^3}{e^{t^2}} = 0$$

donc $f'(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Ex n° 04:

1) Soit la fonction $g : x \longmapsto \ln x$ définie sur $\mathbb{R}^*$.

g est continue sur $[x, y]$ 1

g est dérivable sur $]x, y[$.

d'après le T.A.F il existe $c \in]x, y[$ tq :

$$g(y) - g(x) = g'(c)\,(y - x).$$

$$\ln y - \ln x = \frac{1}{c}(y - x)$$

$$\frac{1}{\ln y - \ln x} = \frac{c}{y - x}.$$

$$\frac{y - x}{\ln y - \ln x} = c$$ 1

or $x < c < y$ donc :

$$x < \frac{y - x}{\ln y - \ln x} < y$$

2) $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto f(x) = e^{\frac{1}{x}}$.

a) f est continue sur $[x, x+1]$. 1,5

f " dérivable " $]x, x+1[$.

d'après le T.A.F

donc il existe $c \in]x, x+1[$ tq

$$f(x+1) - f(x) = f'(c)(x+1-x)$$

or $f'(c) = -\frac{1}{c^2} e^{\frac{1}{c}}$

donc $f(x) - f(x+1) = \frac{1}{c^2} e^{\frac{1}{c}}$.

b) $\lim\limits_{x \to \infty} x^2\left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}}\right)$. forme indéterminée.

or la fonction $x \longmapsto x^2 e^{\frac{1}{x}}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$. donc.

$$\frac{1}{(x+1)^2} e^{\frac{1}{x+1}} < \frac{1}{c^2} e^{\frac{1}{c}} < \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} < e^{\frac{1}{x}}$$

1,5

~~or~~ ~~li~~ puis les inégalités

$$\frac{x^2}{(x+1)^2} e^{\frac{1}{x+1}} < \frac{x^2}{c^2} e^{\frac{1}{c}} = x^2\left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}}\right) < e^{\frac{1}{x}}.$$

or: $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2}{x^2+1} e^{\frac{1}{x+1}} = 1 = \lim\limits_{x \to 1} e^{\frac{1}{x}}$.

donc $\lim x^2\left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}}\right) = 1$.