Université de Saida Dr. Moulay Tahar.
Faculté des sciences-Département de mathématiques.
2 ème année Licence Mathématiques.

07/07/2019 — ***Epreuve finale de « Algèbre 4 »*** — *Durée : 2h*

<u>Questions de cours (5 pt)</u>

1- Soit E un K -espace vectoriel, $f \in S(E)$,

. Rappeler la définition du $\ker f$.

. Rappeler la définition du cône isotrope $I(f)$.

. Monter que $\ker f \subset I(f)$.

2- Soit $(E,<,>)$ un espace euclidien, f un endomorphisme symétrique de E , λ_1, λ_2 deux valeurs propres distincts de f . *Montrer que les sous espaces propres $E_{\lambda_1}, E_{\lambda_2}$ sont orthogonaux.*

3-Soit $P \in L(E) / PoP = P$, quelles sont les valeurs propres possibles de P .

<u>Exercice 1(4 pt)</u>

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$, on considère les cinq formes linéaires $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$ et ψ définies par :

$$\phi_1(P) = P(0), \phi_2(P) = P'(0), \phi_3(P) = P(1), \phi_4(P) = P'(1), \psi(P) = \int_0^1 P(t)dt.$$

1/ Prouver que $(\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4)$ est une base de E^*.

2/ Déterminer la base préduale (H_1, H_2, H_3, H_4) de E.

3/ Déterminer (a,b,c,d) de $\mathbb{R}^4$ tel que : $\psi = a\phi_1 + b\phi_2 + c\phi_3 + d\phi_4$.

<u>Exercice 2(6.5pt)</u>

Soit $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$q(x) = 5x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_2x_3$$

1/ Montrer que q est une forme quadratique et déterminer sa forme polaire.

2/ Déterminer la matrice associé à q dans la base canonique.

3/Déterminer les vecteurs isotropes $I(q)$ de q.

4/Déterminer la réduction en sommes des carrées de q .

5/Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ orthogonale pour q.

6/Déterminer la signature et le rang de q, q est elle dégénérée ?

7/Déterminer la matrice associé à q dans la base $B = (e_1 + e_2 + e_3, -e_1 + e_2 + e_3, e_1 + e_2 - e_3)$.

<u>Exercice 3(4.5pt)</u>

On munit $\mathbb{R}^3$ de la forme bilinéaire f définie dans la base canonique par:

$$f(x,y) = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 5x_3y_3 + x_1y_2 + x_2y_1 - 2x_2y_3 - 2x_3y_2$$

1/ Montrer que f définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$.

2/ Ecrire la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

3/ Déterminer le noyau et le rang de f .

4/ Soit F le sous espace de $\mathbb{R}^3$ défini par $F = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\right\}$

Déterminer $F^{\perp}$: L'orthogonal de F relativement à f .

<u>Bon Courage</u>

Corrigé type d'examen finale d' algèbre 4

Question de cours

1- Soit E *un* K *-espace vectoriel,* $f \in S(E)$

.Définition du $\ker f$ ***……..(0.5pt)***

$\ker f = \{x \in E \,/\, f(x,y) = 0, \forall y \in E\} = E^{\perp}$

.Définition du cône isotrope $I(f)$ ***…..(0.5)***

$I(f) = \{x \in E \,/\, f(x,x) = 0\}$

.Montrons que $\ker f \subset I(f)$ ***……..(1pt)***

Soit $x \in \ker f \Rightarrow \forall y \in E, f(x,y) = 0$

En particulier :

$y = x \Rightarrow f(x,x) = 0$

Alors $\ker f \subset I(f)$

2- Soit $(E, <,>)$ *un espace euclidien, et soit* u un endomorphisme symétrique de E*, alors toutes les valeurs propres de* u *sont réelles.*

Soient λ_1, λ_2 *deux valeurs propres de* $u, (\lambda_1 \neq \lambda_2)$ *et soient* $x \in E_{\lambda_1}, y \in E_{\lambda_2}$ *alors*

$u(x) = \lambda_1 x$ *et* $u(y) = \lambda_2 y$

Comme u *est symétrique*

$\Rightarrow < u(x), y > = < x, u(y) >$

$\Rightarrow < \lambda_1 x, y > = < x, \lambda_2 y >$

$\Rightarrow \lambda_1 < x, y > = \lambda_2 < x, y >$

$\Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2) < x, y > = 0$

$\Rightarrow < x, y > = 0, \forall x \in E_{\lambda_1}, \forall y \in E_{\lambda_2}$ *car* $\lambda_1 \neq \lambda_2$

Donc $E_{\lambda_1}, E_{\lambda_2}$ *sont orthogonaux* ***………(1pt).***

3-Soit $P \in L(E) \,/\, PoP = P$

Soit λ *une valeur propre de* P*,*

$\exists V \neq 0_E \,/\, P(V) = \lambda V$

$\Rightarrow P(P(V)) = P(\lambda V)$

$\Rightarrow P(P(V)) = \lambda P(V)$ *Car* $PoP = P$

$\Rightarrow \lambda V = \lambda^2 V \Rightarrow (\lambda^2 - \lambda) V = 0_E$

$\Rightarrow \lambda^2 - \lambda = 0$ *Car* $V \neq 0_E$

$\Rightarrow \lambda = 0 \vee \lambda = 1$

Les valeurs propres possibles de P *sont 1 et 0……………….**(2pt)**.*

Exercice 1(4 pt)

1- Puisque $\dim E^* = \dim E = 4$ *il suffit de montrer* $(\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4)$ *forme une famille libre ,*

soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ *tels que* $\sum_{i=1}^{4} \lambda_i \phi_i = 0$*, c'est-à-dire* $\sum_{i=1}^{4} \lambda_i \phi_i(P) = 0$ *pour tout*

$P \in \mathbb{R}_3[X]$

On a donc

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{4} \lambda_i \phi_i(1) = 0 \\ \sum_{i=1}^{4} \lambda_i \phi_i(X) = 0 \\ \sum_{i=1}^{4} \lambda_i \phi_i(X^2) = 0 \\ \sum_{i=1}^{4} \lambda_i \phi_i(X^3) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_3 + 2\lambda_4 = 0 \\ \lambda_3 + 3\lambda_4 = 0 \end{cases}$$

Ce qui implique que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$*, Ainsi* $(\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4)$ *Forme une base de* E^* *...**(1pt)***

2-Base préduale**.............**(2pt)

Pour déterminer la base préduale de $(\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4)$ *on doit résoudre*

$\phi_i(H_j) = \delta_{ij}, 1 \le i, j \le 4.$

$i = 1$ *On pose* $H_1 = aX^3 + bX^2 + CX + d$ *ou* $a, b, c, d \in \mathbb{R}$*, on a*

$$\begin{cases} \phi_1(H_1) = 1 \\ \phi_2(H_1) = 0 \\ \phi_3(H_1) = 0 \\ \phi_4(H_1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = 1 \\ c = 0 \\ a + b + c + d = 0 \\ 3a + 2b + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -3 \\ c = 0 \\ d = 1 \end{cases}$$

Alors $H_1 = 2X^3 - 3X^2 + 1$

$i = 2$ *On pose* $H_2 = aX^3 + bX^2 + CX + d$ *ou* $a, b, c, d \in \mathbb{R}$*, on a*

$$\begin{cases} \phi_1(H_2) = 0 \\ \phi_2(H_2) = 1 \\ \phi_3(H_2) = 0 \\ \phi_4(H_2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = 0 \\ c = 1 \\ a + b + c + d = 0 \\ 3a + 2b + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 1 \\ d = 0 \end{cases}$$

Alors $H_2 = X^3 - 2X^2 + X$

$i = 3$ *On pose* $H_3 = aX^3 + bX^2 + CX + d$ *ou* $a, b, c, d \in \mathbb{R}$*, on a*

$$\begin{cases}\phi_1(H_3)=0\\ \phi_2(H_3)=0\\ \phi_3(H_3)=1\\ \phi_4(H_3)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}d=0\\ c=0\\ a+b+c+d=1\\ 3a+2b+c=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-2\\ b=3\\ c=0\\ d=0\end{cases}$$

Alors $H_3=-2X^3+3X^2$

$i=4$ *On pose* $H_4=aX^3+bX^2+CX+d$ *ou* $a,b,c,d\in\mathbb{R}$*, on a*

$$\begin{cases}\phi_1(H_4)=0\\ \phi_2(H_4)=0\\ \phi_3(H_4)=0\\ \phi_4(H_4)=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}d=0\\ c=0\\ a+b+c+d=0\\ 3a+2b+c=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\ b=-1\\ c=0\\ d=0\end{cases}$$

Alors $H_4=X^3-X^2$

3-Déterminons $(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4 / \Psi=a\phi_1+b\phi_2+c\phi_3+d\phi_4$ *.......**(1pt)***

Or $\Psi=\sum_{i=1}^{4}\Psi(H_i)\phi_i$ *alors*

$\Psi(H_1)=a\phi_1(H_1)+b\phi_2(H_1)+c\phi_3(H_1)+d\phi_4(H_1)$ *,alors*

$$\Psi(H_1)=a\Rightarrow a=\int_0^1 H_1(t)dt$$

$$\Rightarrow a=\int_0^1 2t^3-3t^2+1dt\Rightarrow a=\frac{1}{2}$$

$\Psi(H_2)=a\phi_1(H_2)+b\phi_2(H_2)+c\phi_3(H_2)+d\phi_4(H_2)$ *,alors*

$$\Psi(H_2)=b\Rightarrow b=\int_0^1 H_2(t)dt$$

$$\Rightarrow b=\int_0^1 t^3-2t^2+tdt\Rightarrow b=\frac{1}{12}$$

$\Psi(H_3)=a\phi_1(H_3)+b\phi_2(H_3)+c\phi_3(H_3)+d\phi_4(H_3)$ *alors*

$$\Psi(H_3)=c\Rightarrow c=\int_0^1 H_3(t)dt$$

$$\Rightarrow c=\int_0^1 -2t^3+3t^2dt\Rightarrow c=\frac{1}{2}$$

$\Psi(H_4)=a\phi_1(H_4)+b\phi_2(H_4)+c\phi_3(H_4)+d\phi_4(H_4)$ *alors*

$$\Psi(H_4)=d \Rightarrow d=\int_0^1 H_4(t)dt$$

$$\Rightarrow d=\int_0^1 t^3-t^2dt \Rightarrow d=-\frac{1}{12}$$

<u>Exercice 2(6.5 pt)</u>

Soit $q:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *l'application définie par :*

$$q(x)=5x_1x_2+6x_1x_3+2x_2x_3$$

*1-** q *est un polynôme homogène de degré 2 alors* q *est une forme quadratique........**(0.25pt)**.*

<u>* détermination de la forme polaire</u> ....(0.75)

$$S(x,y)=\frac{1}{2}\left[q(x+y)-q(x)-q(y)\right]$$ *alors*

$$S(x,y)=\frac{5}{2}x_1y_2+\frac{5}{2}x_2y_1+3x_1y_3+3x_3y_1+x_2y_3+x_3y_2$$

<u>2-La matrice associée a</u> q *..........**(0.5pt)***

$$M(S)_{canonique}=\begin{pmatrix} 0 & \frac{5}{2} & 3 \\ \frac{5}{2} & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

<u>Les vecteurs isotropes</u> ....(1pt)

$$I(q)=\left\{X \in \mathbb{R}^3 / q(X)=0\right\}$$

$$q(X)=0 \Leftrightarrow 5x_1x_2+6x_1x_3+2x_2x_3=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_3=\dfrac{-5x_1x_2}{6x_1+2x_2} si, x_2 \neq -3x_1 \\ -15{x_1}^2=0 \Rightarrow x_1=0, x_2=0, si, x_2=-3x_1 \end{cases}$$

$$I(q)=\left\{X \in \mathbb{R}^3 / X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dfrac{-5x_1x_2}{6x_1+2x_2} \end{pmatrix}, x_2 \neq -3x_1\right\} \cup \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$$

<u>La réduction de Guass</u>..............(1pt)

$$q(x)=5x_1x_2+6x_1x_3+2x_2x_3$$

$$\frac{\partial q}{\partial x_1} = 5x_2 + 6x_3 = \varphi_1$$

$$\frac{\partial q}{\partial x_2} = 5x_1 + 2x_3 = \varphi_2$$

Alors

$$q(x) = \frac{1}{5}\varphi_1\varphi_2 + Tc$$

$$\Rightarrow Tc = q(x) - \frac{1}{5}\varphi_1\varphi_2$$

$$\Rightarrow Tc = -\frac{12}{5}x_3^2$$

Donc $q(x) = \frac{1}{5}(5x_2 + 6x_3)(5x_1 + 2x_3) - \frac{12}{5}{x_3}^2$

$$q(x) = \frac{1}{20}(5x_2 + 8x_3 + 5x_1)^2 - \frac{1}{20}(5x_2 - 5x_1 + 4x_3)^2 - \frac{12}{5}{x_3}^2$$

Base orthogonale pour q……….(1pt)

On *a*

$$q(x) = \frac{1}{20}(5x_2 + 8x_3 + 5x_1)^2 - \frac{1}{20}(5x_2 - 5x_1 + 4x_3)^2 - \frac{12}{5}{x_3}^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} {x_1}' = 5x_2 + 8x_3 + 5x_1 \\ {x_2}' = 5x_2 - 5x_1 + 4x_3 \\ {x_3}' = x_3 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 8 \\ -5 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 8 \\ -5 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Alors

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/10 & -1/10 & -2/5 \\ 1/10 & 1/10 & -6/5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{'} \\ x_2^{'} \\ x_3^{'} \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1/10 & -1/10 & -2/5 \\ 1/10 & 1/10 & -6/5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1/10 \\ 1/10 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -1/10 \\ 1/10 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -2/5 \\ -6/5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \{v_1, v_2, v_3\}$ *est une base orthogonale de* $\mathbb{R}^3$.

<u>Signature et le rang de q</u>……………(1pt)

On *a*

$$q(x) = \frac{1}{20}(5x_2 + 8x_3 + 5x_1)^2 - \frac{1}{20}(5x_2 - 5x_1 + 4x_3)^2 - \frac{12}{5}x_3^{\,2}$$

alors $sg(q) = (1,2)$ *et* $rg(q) = 3 = \dim \mathbb{R}^3 \Rightarrow \ker(q) = \{0\} \Rightarrow q$ *est non dégénérée*

<u>La matrice associé à q dans la base</u> $B = (e_1 + e_2 + e_3, -e_1 + e_2 + e_3, e_1 + e_2 - e_3)$ ***…..(1pt)***

$$M(S)_{baseB} = {}^tPM(S)_{basecanonique}P$$

$$M(S)_{baseB} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{5}{2} & 3 \\ \frac{5}{2} & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{11}{2} & \frac{11}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{7}{2} & \frac{-3}{2} & \frac{3}{2} \\ 4 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 13 & 2 & 5 \\ 2 & -9 & 6 \\ 5 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

Exercice 3(4.5pt)

On munit $\mathbb{R}^3$ *de la forme bilinéaire* f *définie dans la base canonique par:*

$$f(x,y)=x_1y_1+2x_2y_2+5x_3y_3+x_1y_2+x_2y_1-2x_2y_3-2x_3y_2$$

1-Montrons que f *définit un produit scalaire:..................**(1pt)***

$f(x,y)=\sum_{i=j=1}^{3}a_{ij}x_iy_j$ *et* $a_{ij}=a_{ji}, i\neq j$*, donc* f *est bilinéaire symétrique.*

On va utiliser la méthode de la réduction de Gauss pour savoir si f *est définie positive*

$$f(x,x)=x_1^2+2x_2^2+5x_3^2+2x_1x_2-4x_2x_3$$

$$f(x,x)=(x_1+x_2)^2-x_2{}^2+2x_2^2+5x_3^2-4x_2x_3$$

$$f(x,x)=(x_1+x_2)^2+x_2^2+5x_3^2-4x_2x_3$$

$$f(x,x)=(x_1+x_2)^2+(x_2-2x_3)^2+x_3^2\geq 0$$

Et

$$f(x,x)=0\Rightarrow\begin{cases}x_1+x_2=0\\ x_2-2x_3=0\\ x_3=0\end{cases}\Rightarrow x_1=x_2=x_3=0$$

Cl f *est un produit scalaire sur* $\mathbb{R}^3$*.*

2-La matrice associée a f *..............................**(0.5pt)***

$$M(f)_{canonique}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & -2\\ 0 & -2 & 5\end{pmatrix}=A$$

3-Noyau et le rang de f *...................................**(1pt)***

$$\ker f=\ker M(f)_{basecanonique}$$

$$X\in\ker M(f)\Leftrightarrow AX=0_{\mathbb{R}^3}.$$

Soit $X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3$ *alors*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ x+2y-2z=0 \\ -2y+5z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \ker f = \{0\} \Rightarrow f$ *est non dégénérée* $\Rightarrow rg(f)=3$

L'orthogonale de $F=\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 / x_1+2x_2-x_3=0\}$ ……………….***(2pt)***

-Déterminons une base de F

Soit $v \in F / v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$v \in F \Rightarrow x_1+2x_2-x_3=0 \Rightarrow x_1=-2x_2+x_3$$

$$\Rightarrow v = \begin{pmatrix} -2x_2+x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_2\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Alors $F = \left[\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$ *avec* $v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Soit $w = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$w \in F^\perp \Leftrightarrow w \perp \{v_1, v_2\} \Leftrightarrow \begin{cases} w \perp v_1 \\ w \perp v_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(w,v_1)=0 \\ f(w,v_2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} {}^t wAv_1 = 0 \\ {}^t wAv_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} {}^t w\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \\ {}^t w\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x-2z=0 \\ x-y+5z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2z \\ y=3z \end{cases}$$

$$\Rightarrow w = \begin{pmatrix} -2z \\ 3z \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow F^\perp = \left[\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$$