EXO1 : ① la définition : On dit que la fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est diff$^{ble}$ en $M_0$ s'il existe une application linéaire $l$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ et une fonction $\varepsilon$ tend vers $0$ en $(0,\dots,0)$ telle, pour tout $H \in \mathbb{R}^n$ telque $M_0+H \in \Omega$ et

$$f(M_0+H) = f(M_0) + l(H) + \|H\|\varepsilon(H).$$

1,5 pt

- L'application linéaire $l$ est appelée la diff$^{le}$ de $f$.

② On a : $\lim\limits_{H \to 0_{\mathbb{R}^n}} f(M_0+H) = \lim\limits_{H \to 0_{\mathbb{R}^n}} f(M_0) + l(H) + \|H\|\varepsilon(H)$

$= f(M_0)$

Car l'application linéaire $l$ est continue donc sa limite en $(0,\dots,0)$ est nulle et $\lim\limits_{H \to 0_{\mathbb{R}^n}} \varepsilon(H) = 0$

1,5 pt

$\Rightarrow$ la fonction $f$ est continue en $M_0$.

3) $f$ est dérivable en $x_0 \Rightarrow \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$

Pour $l(h) = f'(x_0).h$, on a :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - l(h)}{|h|} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0).h}{h}$$

$= 0$

1,5 pt

d'où $f$ est diff$^{ble}$ en $x_0$ et sa diff$^{le}$ est $df(h) = f'(x_0).h$.

**Exo2** On pose $f(x,y) = x e^{y} + e^{x} \sin(2y)$.

1) On note que $(0,0)$ est une solution de l'equation

$f(x,y) = 0$ i.e. $f(0,0) = 0$

et on a : $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^{y} + e^{x} \sin(2y)$ , $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1$

1,5 pt

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x e^{y} + 2 e^{x} \cos(2y)$ , $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 2$.

Puisque $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \neq 0$, alors il existe une et une seule fonction $y = \varphi(x)$ définie au voisinage de $0$ tq que : $f(x, \varphi(x)) = 0$.

2) On a : ⊛ $\varphi'(0) = - \dfrac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)} = -\frac{1}{2}$.

1,5 pt

⊛ L'equation de la tangente est :

$y = -\frac{1}{2} x$.

3) On a : $\lim\limits_{\substack{(x,y) \to (0,0) \\ f(x,y)=0}} \frac{y}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\varphi(x)}{x}$

$= \lim\limits_{x \to 0} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x - 0}$

1,5 pt

$= \varphi'(0)$

$= -\frac{1}{2}$.

EXO3

1) On a :

(*) $$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim_{k \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,k) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{k}.$$

or : $$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = 0$$

car $f(h,0) = f(0,0) = 0$,

et pour tout $k \neq 0$,

1,5 pt

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,k) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,k) - f(0,k)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{hk\frac{h^2-k^2}{h^2+k^2} - 0}{h}$$

$$= -k.$$

on obtient : $$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim_{k \to 0} \frac{-k}{k} = -1$$

1,5 pt (*) De même on montre que : $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1$.

2) Comme $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$, alors d'après le Théorème

1,5 pt de Schwarz l'une de deux fonctions $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ ou

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ n'est pas continue en $(0,0)$ et $\longrightarrow$

Puisque la fonction f possède la propriété :

$$f(x,y) = -f(y,x) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

On conclut que les deux dérivées partielles secondes $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ ne sont pas continues en $(0,0)$.

EX04 :

1) * $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{r\to 0} f(r\cos\theta, r\sin\theta) \quad \forall\theta.$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{\ln(1+r^2)}{r^2}$$

$$= 1.$$

1,5 pt

* Pour que f soit continue en $(0,0)$, il faut que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$, donc $\alpha_0 = 1$.

2) $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\ln(1+h^2)}{h^2} - \alpha}{h}$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{\ln(1+h^2)}{h^2} - \alpha\right)$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1-\alpha}{h}.$$

1,5 pt

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}$$

$$= \lim_{k\to 0} \frac{\frac{Ln(1+k^2)}{k^2}-\alpha}{k} = \ldots = \lim_{k\to 0} \frac{1-\alpha}{k}$$

- Les deux limites existent et sont finies

Ssi : $\alpha = 1$.

⊛ Si $\alpha = 1$, alors $\nabla f(0,0) = (0,0)^T$. ← 0,5 pt

3) Pour que f soit de classe $C^1$ en (0,0) il ne reste à vérifier que les $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues en (0,0), donc on a :

⊛ $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{r\to 0} \frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{2\cos\theta}{r}\left(\frac{1}{1+r^2} - \frac{Ln(1+r^2)}{r^2}\right)$$

$$= \ldots$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{r(r^2-1)}{r^2+1}\cos\theta$$

$$= 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$$

⊛ De même : $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \ldots = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

1,5 pt

d'où $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continue en $(0,0)$.

Comme $f$ est aussi continue en $(0,0)$,

on conclut que $f$ est $C^1$ en $(0,0)$.

et On en déduit que $f$ est

diff$^{ble}$ en $(0,0)$.

4) On a : $\varepsilon(h,k) = \dfrac{f(h,k) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)k}{\sqrt{h^2+k^2}}$

$$= \frac{\frac{\ln(1+h^2+k^2)}{h^2+k^2} - 1}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

1,5 pt

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon(h,k) = \lim_{\substack{r\to 0 \\ \forall \theta}} \varepsilon(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{\frac{\ln(1+r^2)}{r^2} - 1}{r}$$

$$= \lim_{r\to 0} \ldots\ldots$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{-r}{2}$$

$= 0$ donc $f$ est bien diff$^{ble}$ en $(0,0)$