Université de Saïda
Département de Mathématiques
$2^{\text{ème}}$ Année Licence Mathématiques

Analyse numérique (2)
S(4) : 2018-2019

# ❀ Corrigé de l'examen Final ❀

**Exercice 01 :** (**8 points**)

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ -x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases} \qquad (1)$$

1. La matrice de Jacobi associée :

$$\begin{pmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ x_3^{(k+1)} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 0 \end{pmatrix}}_{J} \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \\ 0.5 \end{pmatrix} \qquad (\textbf{1.5 point})$$

2. Calcul des valeurs propres de la matrice $J$ :

$$|J - \lambda I_3| = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = -\sqrt{0.5} \\ \lambda = +\sqrt{0.5} \end{cases} \qquad (\textbf{0.75 point})$$

Le processus de Jacobi converge si et seulement si $\rho(J) < 1$ tel que $\rho(J) = \max_i = |\lambda_i|$
On a bien $\rho(J) = \sqrt{0.5} = 0.70710 < 1$.
D'où la convergence de la méthode de Jacobi vers la solution du système (1). (**0.25 point**)

3. La matrice de Gauss-Seidel :

$$\begin{pmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ x_3^{(k+1)} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0.5 \\ 0 & 0.125 & 0.25 \end{pmatrix}}_{G} \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.25 \\ 0.625 \end{pmatrix} \qquad (\textbf{1.5 point})$$

4. Calcul des valeurs propres de la matrice $G$ :

$$|G - \lambda I_3| = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = 0.5 \end{cases} \qquad (\textbf{0.5 point})$$

On a $\rho(J) = 0.5 < 1$. D'où la convergence de la méthode de Gauss-Seidel vers la solution du système (1). (**0.25 point**)

5. Résolution du système par la méthode de Gauss-Seidel :

<u>Première itération :</u> $X^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.625 \\ 0.625 \\ 0.8125 \end{pmatrix}$ (**0.75 point**)

Deuxième itération : $X^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.8125 \\ 0.8125 \\ 0.90625 \end{pmatrix}$ **(0.75 point)**

Troisième itération : $X^{(3)} = \begin{pmatrix} 0.90625 \\ 0.90625 \\ 0.95312 \end{pmatrix}$ **(0.75 point)**

6. Calcul de la solution exacte par la méthode de Gauss et la comparer avec la solution obtenue par la méthode itérative de Gauss-Seidel :
   On $a_{11} = 2 \neq 0$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & : & 1 \\ -1 & 2 & -1 & : & 0 \\ 0 & -1 & 2 & : & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & : & 1 \\ 0 & 3/2 & -1 & : & 1/2 \\ 0 & -1 & 2 & : & 1 \end{pmatrix} 1/2L_1 + L_2 \quad \textbf{(0.25 point)}$$

$a_{22} = 3/2 \neq 0$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & : & 1 \\ 0 & 3/2 & -1 & : & 1/2 \\ 0 & 0 & 4/3 & : & 4/3 \end{pmatrix} 2/3L_2 + L_3 \quad \textbf{(0.25 point)}$$

La solution est donc : $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ **(0.25 point)**

Comparaison :

$$\begin{aligned} |x_{1exacte} - x_{1G-S}| &= 0.09375 \\ |x_{2exacte} - x_{2G-S}| &= 0.09375 \\ |x_{3exacte} - x_{3G-S}| &= 0.04688 \end{aligned} \quad \textbf{(0.25 point)}$$

**Exercice 02 :** (**8 points**)

$$\begin{cases} y' = -y + x + 1 \\ y(0) = 1 \end{cases} \tag{2}$$

1. Solution théorique :

   – Solution de l'équation homogène :

$$y = \lambda \mathrm{e}^{-x} \text{ où } \lambda = \pm C \qquad \textbf{(0.5 point)}$$

   – Solution Particulière
   On trouve d'abord $\lambda(x) = x\mathrm{e}^{x}$ **(0.25 point)**
   On déduit $y = x$ **(0.25 point)**.
   – Solution générale

$$y = x + \lambda \mathrm{e}^{-x}$$

$$y(0) = 1 \Rightarrow \lambda = 1$$

   – Donc la solution de (2) est

$$y = x + \mathrm{e}^{-x} \qquad \textbf{(0.5 point)}$$

   Au point $x = 1$, on a $y = 1.36788$ **(0.5 point)**.

2. Solution numérique : La méthode d'Euler

   On a $h = 0.1, f(x_i, y_i) = -y_i + x_i + 1$ et $n = 10$.

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$$

$$y_{i+1} = 0.9y_i + 0.1x_i + 0.1 \qquad \textbf{(2 points)}$$

   On en déduit :

   **(3.5 points)**

| | |
|---|---|
| $y_1$ | 1 |
| $y_2$ | 1.01 |
| $y_3$ | 1.029 |
| $y_4$ | 1.0561 |
| $y_5$ | 1.09049 |
| $y_6$ | 1.013144 |
| $y_7$ | 1.17830 |
| $y_8$ | 1.23047 |
| $y_9$ | 1.28742 |
| $y_{10}$ | 1.34868 |

   Donc la solution approchée par la méthode d'euler est 1.34868

3. Comparaison :

$$|y(1) - y_{10}| = 0.0192 = 0.192 \times 10^{-1} \qquad \textbf{(0.5 point)}$$

**Exercice 03 : (4 points)**
Soit $\lambda$ la valeur propre la plus petite en module de la matrice $A$ et soit $v$ le vecteur propre associé.

$$\begin{aligned} Av = \lambda v &\Leftrightarrow A^{-1}Av = A^{-1}\lambda v \text{ (car A matrice inversible)} \\ &\Leftrightarrow v = \lambda A^{-1}v \\ &\Leftrightarrow \tfrac{1}{\lambda}v = A^{-1}v. \end{aligned}$$

Donc $\frac{1}{\lambda}$ valeur propre de $A^{-1}$. Don si $\lambda$ est la valeur propre la plus petite en module de $A$, alors $\frac{1}{\lambda}$ est la valeur propre la plus grande en module de $A^{-1}$ et on applique la méthode des puissance itérées sur la matrice $A^{-1}$.