

Durée : Deux heures

Examen Final

N'oubliez surtout pas : de noter votre nom et votre groupe sur toutes les feuilles ; d'écrire lisiblement ; de justifier clairement tous vos raisonnements et calculs¹.

Exercice 1

On considère le système d'équations linéaires

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ -x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases} \quad (1)$$

On cherche à résoudre le système (1) par les méthodes indirectes de type

$$x_{k+1} = Mx_k + D$$

1. Donner la matrice J de *Jacobi* associée à la matrice du système (1).
2. Calculer les valeurs propres de J et déduire si la condition nécessaire et suffisante de la convergence de la méthode de *Jacobi*.
3. Donner la matrice G de *Gauss-Seidel* associée à la matrice du système (1).
4. calculer les valeurs propres de G et déduire si la condition nécessaire et suffisante de la convergence de la méthode de *Gauss-Seidel*.
5. Résoudre le système (1) par la méthode de *Gauss-Seidel*, en effectuant 3 itérations.
6. Comparer les résultats obtenus avec la solution exacte du système (1) en utilisant la méthode directe de *Gauss*.

Donner les résultats avec 5 décimales exactes.

Exercice 2 :

Soit le problème :

$$\begin{cases} y' = -y + x + 1 \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad (2)$$

1. Déterminer la solution du problème (2). En déduire la valeur de y au point $x = 1$.
2. Utiliser la méthode d'*Euler* pour trouver une valeur approchée de la solution de l'équation différentielle au point $x = 1$. Prendre un pas $h = 0.1$ et effectuer les calculs avec 5 décimales.
3. Comparer la solution au point $x = 1$ avec les deux méthodes.

Exercice 3 :

Soit A une matrice inversible, comment calculer la plus petite valeur propre en module par la méthode des puissances itérées ?

1. Une attention particulière sera accordée à la précision et à la clarté de votre rédaction.