Corrigé de l'examen de récurépation
Licence LMD 2eme année
module : Géométrie, Juillet 2019

Exercise 1 ***7points***

1. Les fonctions x et y sont définies sur $\mathbb{R}$. Or $\sin t$ est de période 2π donc x est de période 2π et $\cos t$ est de période 2π, donc y est de période $2\pi/3$. Alors 2π est une période commune aux deux fonctions. On étudie la courbe sur un intervalle de longueur 2π. ***(1pts)***

-Réduction du domaine d'étude *: On prend l'intervalle $I_0 = [-\pi, \pi]$. On a $x(-t) = -x(t)$ et $y(-t) = y(t)$ .La courbe est symétrique par rapport à Oy et l'étude se fera sur $I_1 = [0, \pi]$. On a $x(\pi - t) = x(t)$ et $y(\pi - t) = -y(t)$. La courbe est symétrique par rapport à Ox. L' ´etude se fera sur $I_0 = [0, \frac{\pi}{2}]$.* ***(1pts)***

-Dérivées : *On obtient* $\begin{cases} x'(t) = 3\sin^2 t \cos t, \\ y'(t) = -3\sin 3t. \end{cases}$ ***(1pts)***

En zéro, on a

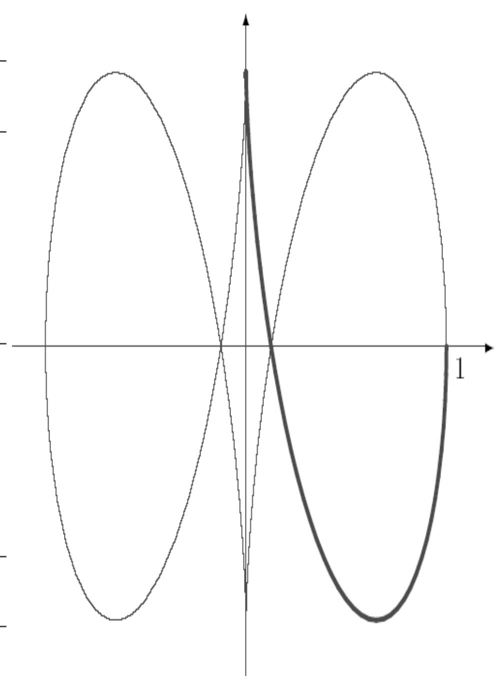
$$\frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{-3\sin 3t}{3\sin^2 t \cos t} \sim -\frac{3}{t},$$

et cette expression tend vers l'infini. On a donc une tangente verticale pour $t = 0$. ***(2pts)***

-Tableau de variation

t	0		$\pi/3$		$\pi/2$
x'	0		$+$		0
x	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{8}$	$\nearrow$	1
y	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0
y'	0	$-$	0	$+$	
y'/x'	∞		0		∞

(1pts)



(1pts)

Exercise 2 ***7points***

1. $\gamma'(t) = (-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin(\frac{s}{\sqrt{2}}), \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(\frac{s}{\sqrt{2}}), \frac{1}{\sqrt{2}}) \Longrightarrow \|\gamma'(t)\|^2 = 1 \neq,$
alors $s = t$. ***(1pts)***
2. $\mathbb{T} = \gamma'(t)$. ***(1pts)***$\Longrightarrow \left\|\frac{d\mathbb{T}}{dt}\right\| = \kappa = \frac{1}{2}$. ***(1pts)***

3. $$\begin{cases} \mathbb{N} = \dfrac{\frac{d\mathbb{T}}{dt}}{\left\|\frac{d\mathbb{T}}{dt}\right\|} = (-\cos t, -\sin t, 0). & \textbf{\textit{(1,5pts)}} \\ \mathbb{B} = \mathbb{T} \wedge \mathbb{N} = (\frac{1}{\sqrt{2}}\sin(\frac{s}{\sqrt{2}}), -\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(\frac{s}{\sqrt{2}}), \frac{1}{\sqrt{2}}). & \textbf{\textit{(1,5pts)}} \end{cases}$$

4. $\frac{d\mathbb{B}}{ds} = \tau\mathbb{N} \Longrightarrow \tau = -\frac{1}{2}$. ***(1pts)***

Exercise 3 ***6points***

1. $\|X_u \wedge X_v\| = b(a + b\cos u) \neq 0$. ***(1,5pt)***
2. Coefficients de la première forme fondamentale :

$$\begin{cases} E = X_u \cdot X_u = b^2, & \textbf{\textit{(0,5pt)}} \\ F = X_u \cdot X_v = 0, & \textbf{\textit{(0,5pt)}} \\ G = X_v \cdot X_v = (a + b\cos u)^2. & \textbf{\textit{(0,5pt)}} \end{cases}$$

$$I(du, dv) = b^2 du^2 + (a + b\cos u)^2 dv^2. \qquad \textbf{\textit{(0,5pt)}}$$

Le vecteur normal : $N_X = \frac{X_u \wedge X_v}{\|X_u \wedge X_v\|} = (\cos v \cos u, -\sin v \cos u, -\sin u)$. ***(0,5pt)***
Coefficients de la deuxième forme fondamentale :

$$\begin{cases} l = X_{uu} \cdot N_X = b, & \textbf{\textit{(0,5pt)}} \\ m = X_{uv} \cdot N_X = 0, & \textbf{\textit{(0,5pt)}} \\ n = X_{vv} \cdot N_X = (a + b\cos u)\cos u. & \textbf{\textit{(0,5pt)}} \end{cases}$$

$$II(du, dv) = b du^2 + (a + b\cos u)\cos u dv^2. \qquad \textbf{\textit{(0,5pt)}}$$