Le prisme

Plan du cours

Le prisme

1 Définition

Le prisme est une association de deux dioptres plans non parallèles qui limitent un milieu transparent d'indice ***n***. Leur intersection définit l'arête du prisme et l'angle dièdre A est l'angle du prisme. En pratique il est limité par une troisième face, la base.

- *Les faces* du prisme sont les deux surfaces planes précédentes.
- *L'arête* Δ du prisme est l'intersection des deux faces du prisme.
- Une *section principale* est l'intersection du prisme par un plan perpendiculaire à l'arête du prisme.
- *L'angle* du prisme est l'angle au sommet de la section principale.

Remarque :

Nous supposerons ici que l'indice de la matière constituant le prisme est supérieur à celui du milieu dans lequel baigne le prisme.

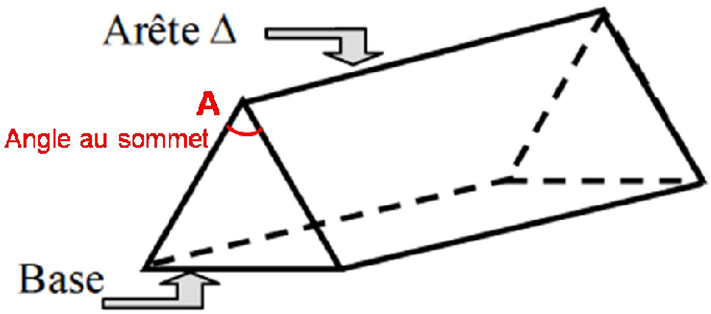


Figure 1. Le prisme

2 Equations du prisme

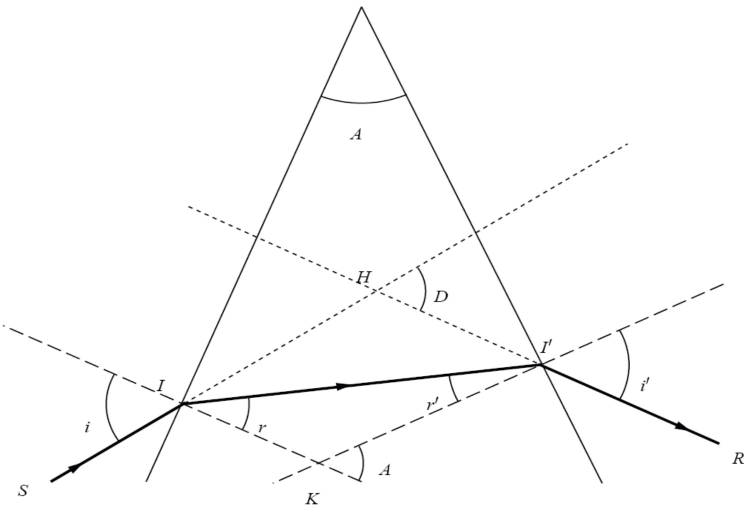


Figure 2. Marche d'un rayon lumineux dans un prisme

- Ecrivons les relations de Snell-Descartes :

Au point I :

$$n' \sin i = n \sin r \qquad (1)$$

au point J:

$$n \sin r' = n' \sin i' \qquad (2)$$

- L'angle entre les deux normales aux faces du prisme passant par I et I' est égal à l'angle au sommet du prisme A. D'autre part, on a dans le triangle II'K

$$r + r' = A \qquad (3)$$

- La déviation est définie comme étant l'angle que fait le prolongement du rayon incident avec le rayon émergent du système.

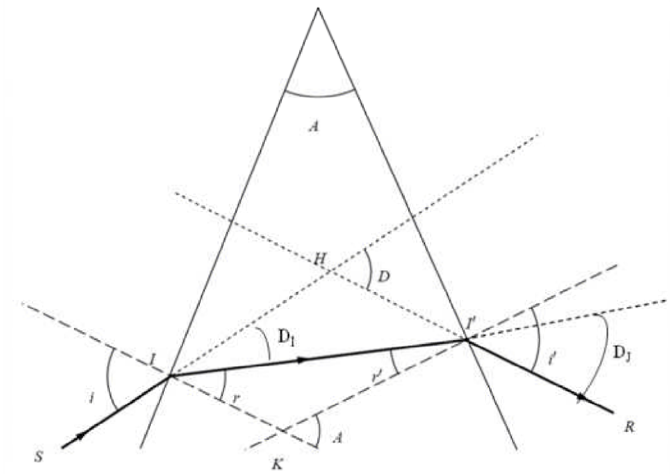


Figure 3. Déviation d'un rayon lumineux dans un prisme

La déviation totale est :

$$D_t = D_I + D_J$$

Avec :

$$D_I = i - r \text{ et } D_J = i' - r'$$

D'où :

$$D_t = i + i' - (r + r') = i + i' - A \qquad (4)$$

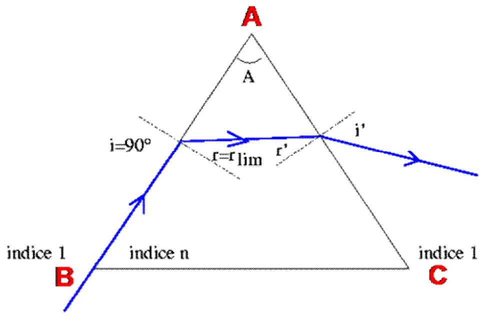
Pour résumer pour un prisme on a :

$$\boxed{\begin{aligned} n' \sin i &= n \sin r \\ n \sin r' &= n' \sin i' \\ r + r' &= A \\ D &= i + i' - A \end{aligned}}$$

Equations du prisme

3 Conditions d'émergence du rayon

Condition sur l'angle au sommet A



Lorsque l'angle d'incidence *i=90°*, il existe un angle de réfraction limite que l'on peut calculer ($r = \lambda_\ell$ avec $\sin\lambda_\ell = \dfrac{n'}{n}$). Ceci est schématisé sur la figure ci-dessus. Dès lors, $r \le \lambda_\ell$

De plus, si r' est supérieur à λ_ℓ, alors le rayon est totalement réfléchi sur la deuxième face du prisme.

Ainsi pour qu'il y ait émergence par la face AC il faut que $r' \le \lambda_\ell$.

On en déduit la première condition (**condition nécessaire** mais pas suffisante) d'émergence du rayon lumineux par la face AC du prisme :

$$r \le \lambda_\ell \qquad ; \qquad r' \le \lambda_\ell$$

$$A < 2\lambda_\ell \qquad \textit{(5)}$$

Condition sur l'angle d'incidence i

Ainsi pour qu'il y ait émergence par la face AC il faut que $r' \le \lambda_\ell$:

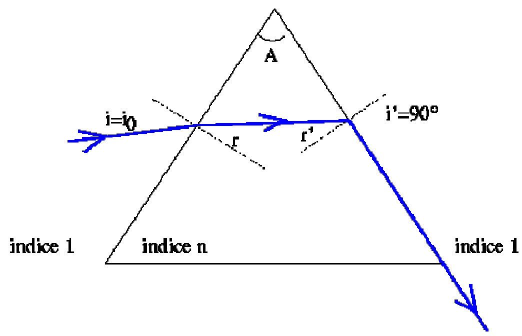
$$r' \le \lambda_\ell$$

$$A - r \le \lambda_\ell \Rightarrow r \ge A - \lambda_\ell$$

$$n \sin r \ge n \sin(A - \lambda_\ell)$$
$$\sin i_o \ge n \sin(A - \lambda_\ell)$$

On en déduit la condition sur l'angle d'émergence sur l'angle d'incidence :

$$i_o \ge \arcsin\left(n \sin(A - \lambda_\ell)\right) \qquad (6)$$



4 Etude de la déviation

La déviation $D = i + i' - A$ peut être considérée comme une fonction des variables indépendantes n, A, i (r,r' et i' dépendent de i, A et n) :

$$dD = \left(\frac{\partial D}{\partial i}\right)_{n,A} di + \left(\frac{\partial D}{\partial n}\right)_{i,A} dn + \left(\frac{\partial D}{\partial n}\right)_{i,n} dA$$

Considérons un prisme plongé dans l'air (n'=1). Nous allons différentier les quatre équations du prisme puis étudier les variations de la déviation D en fonction des trois variables dont elle dépend.

$$\cos i \; di = n \; \cos r \, dr + \sin r \, dn \qquad (7)$$

$$\cos i' \; di' = n \; \cos r' \; dr' + \sin r' \; dn \qquad (8)$$

$$dA = dr + dr' \qquad (9)$$

$$dD = di + di' - dA \qquad (10)$$

Multiplions l'équation (7) par (cos r') et l'équation (8) par (cos r) :

$$\cos r' \cos i \; di = n \; \cos r' \cos r \, dr + \cos r' \sin r \, dn \qquad (11)$$

$$\cos r \; \cos i' \; di' = n \; \cos r \; \cos r' \; dr' + \cos r \; \sin r' \; dn \qquad (12)$$

En sommant les équations (11) et (12), on obtient une expression donnant di'

$$di' = dn \; \frac{\sin A}{\cos r \; \cos i'} + dA \; \frac{n \; \cos r'}{\cos i'} - di \; \frac{\cos r' \; \cos i}{\cos r \; \cos i'}$$

On remplace l'expression de di' dans l'équation (10) :

$$dD = dn \; \frac{\sin A}{\cos r \; \cos i'} + dA \left(\frac{n \; \cos r'}{\cos i'} - 1\right) - di \left(1 - \frac{\cos r' \; \cos i}{\cos r \; \cos i'}\right) \qquad (13)$$

- **Etude la déviation en fonction de l'indice**

  Avec A et i fixés :

$$\frac{dD}{dn} = \frac{\sin A}{\cos r \; \cos i'}$$

$\frac{dD}{dn} > 0$ par conséquent la déviation varie dans le même sens que l'indice.

- **Etude la déviation en fonction de l'angle au sommet**

  Avec n et i fixés :

$$\frac{dD}{dA} = \left(\frac{n \; \cos r'}{\cos i'} - 1\right)$$

$\frac{dD}{dA} \geq 0$ parce que $n \; \cos r' \geq \cos i'$ par conséquent la déviation varie dans le même sens que l'angle au sommet.

Etude la déviation en fonction de l'angle d'incidence

Avec A et n fixés :

$$\frac{dD}{di}=\left(1-\frac{\cos r' \; \cos i}{\cos r \; \cos i'}\right)$$

Recherche de l'extremum

$$\frac{dD}{di}=0 \Rightarrow \frac{\cos r' \; \cos i}{\cos r \; \cos i'}=1$$

$$\cos r' \; \cos i = \cos r \; \cos i'$$

Elevons l'expression au carré et introduisons les sinus :

$$(1-\sin^2 i)(1-\sin^2 r') = (1-\sin^2 i')(1-\sin^2 r)$$

$\Rightarrow$ $1-\sin^2 r' - n^2\sin^2 r + n^2\sin^2 r.\sin^2 r' - 1 + \sin^2 r + n^2\sin^2 r' - n^2\sin^2 r'.\sin^2 r = 0$

$\Rightarrow$ $(1-n^2)(\sin^2 r - \sin^2 r') = 0.$

Avec n >1 L'extremum est atteint lorsque r = r'. Ce qui correspond à $i=i'=i_m$.

On retient donc la solution $r = r' = \frac{A}{2}$.

L'angle d'incidence correspondant est : $i_m = \arcsin\left(n \sin\left(\frac{A}{2}\right)\right)$.

La déviation correspondante est : $D_m = 2i_m - A$

Cas particulier : Etude de la déviation minimale

- Influence de l'angle d'incidence i

Lorsque l'angle d'incidence augmente, la déviation commence par diminuer jusqu'à atteindre un minimum D_{min} puis augmente (voir TP Goniomètre). La déviation minimale est atteinte pour :

$$i=i'=i_m \qquad (14)$$

$$r=r' = A/2 \qquad (15)$$

$$D_m = 2i_m - A \qquad (16)$$

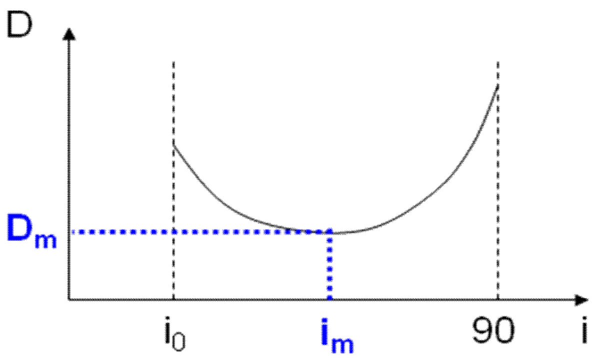


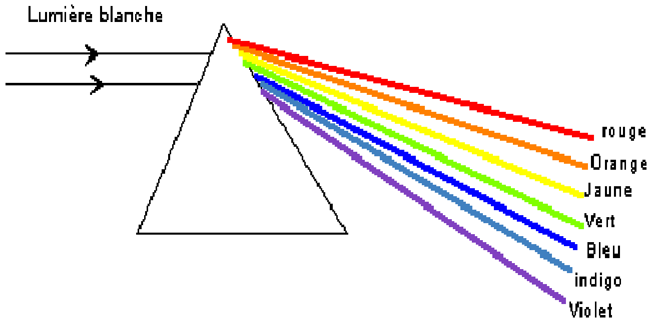
Figure4. Déviation d'un rayon lumineux dans un prisme en fonction de l'angle d'incidence i

- Par ailleurs en appliquant la loi de Snell-Descartes au point I, on aboutit à la relation qui permet de calculer la valeur de l'indice

$$n = n' \frac{\sin \frac{D_m + A}{2}}{\sin \frac{A}{2}} \qquad (17)$$

5 Dispersion de la lumière par un prisme

L'expérience montre (voir TP goniomètre) que lorsque un faisceau parallèle monochromatique aborde un prisme sur une de ces faces, il en émerge par l'autre face plusieurs faisceaux, non parallèles et de couleurs différentes. Ce phénomène est appelé ***dispersion***.



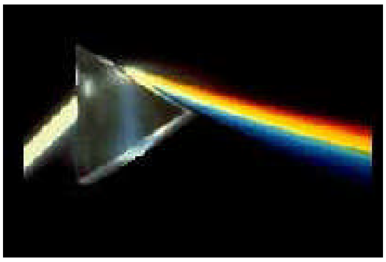


Figure6. Dispersion de la lumière par un prisme

Ainsi, pour un angle d'incidence donné, on obtient **des valeurs différentes de la déviation** pour les radiations composant la lumière blanche.

De plus sachant que :

$$n = n' \frac{\sin \frac{D_m + A}{2}}{\sin \frac{A}{2}}$$

Il s'en suit que l'indice de réfraction dépend de la couleur de la radiation à savoir de la longueur d'onde λ . On a donc n=f(λ) comme le montre la relation empirique dite relation de Cauchy :

$$n = a + \frac{b}{\lambda^2} \qquad (18)$$

Où a et b sont des constantes.