Université Dr. T. Moulay de Saida. Faculté des Sciences.

Département de Mathématiques.

Année : 2018. 2019.

Troisième année mathématique.

Module : Transformations intégrales dans L^P.

Correction d'examen :

Exercice 01 : 08 pts

1). $\forall t > 0 \quad \Lambda'(t) = -1.$ 1

$\forall t < 0 \quad \Lambda'(t) = 1.$

on appelle Π la fonction porte. $\Pi(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]. \\ 0 & \text{si } t \notin [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]. \end{cases}$

par conséquent

$$\Lambda'(t) = \Pi(t + \tfrac{1}{2}) - \Pi(t - \tfrac{1}{2})$$ 1

2). D'après les propriétés de transformation de Fourier on obtient :

$$\mathcal{F}(\Lambda')(s) = e^{i\pi s}\,\mathcal{F}(\Pi)(s) - e^{-i\pi s}\,\mathcal{F}(\Pi)(s) = 2i \sin(\pi s)\,\mathcal{F}(\Pi)(s)$$ 1

$$= 2i \frac{\sin^2(\pi s)}{\pi s}.$$

puisque : $\mathcal{F}(\Pi)(s) = \dfrac{\sin(\pi s)}{\pi s}$. 1

- D'après la propriété de transformée d'une dérivée, on a :

$$\mathcal{F}(\Lambda')(s) = 2i\pi s\,\mathcal{F}(\Lambda)(s)$$

Donc $\mathcal{F}(\Lambda)(s) = \dfrac{1}{2\pi s}\, 2i \dfrac{\sin^2(\pi s)}{\pi s} = \dfrac{\sin^2 \pi s}{\pi^2 s^2}$. 1

3- $\Pi * \Pi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi(t-u)\Pi(u)\,du = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \Pi(t-u)\,du = -\int_{t+\frac{1}{2}}^{t-\frac{1}{2}} \Pi(v)\,dv$ 1

avec le changement de variable $v = t - u$

Alors

$\forall t > 1, \quad t - \frac{1}{2} > \frac{1}{2}$ d'où $\Pi * \Pi(t) = 0$.

$\forall t < -1. \quad t + \frac{1}{2} < -\frac{1}{2}$ d'où $\Pi * \Pi(t) = 0$. 0,5

$\forall t \in [0,1] \quad \Pi * \Pi(t) = \int_{t-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \Pi(v)\,dv = \int_{t-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} 1\,dv = 1 - t$.

De même on montre que

$\forall t \in [-1, 0], \quad \Pi * \Pi(t) = 1 + t$.

Ceci prouve que : $\forall t \in \mathbb{R}, \quad \Pi * \Pi(t) = A(t)$. 0,5

D'après la propriété concernant la transformée d'un produit de convolution : $\mathcal{F}(\Pi * \Pi) = \mathcal{F}(\Pi) \times \mathcal{F}(\Pi)$. 0,5

D'où :

$$\mathcal{F}(A)(s) = \mathcal{F}(\Pi * \Pi)(s) = [\mathcal{F}(\Pi)(s)]^2 = \left(\frac{\sin \pi s}{\pi s}\right)^2$$

$$= \frac{\sin^2 \pi s}{\pi^2 s^2}$$ 0,5

qui est un résultat conforme à la question précédente.

Exercice 02 ; 06 pts

2

(a) on trouve : $\dfrac{2s+1}{(s-2)(s^2+1)} = \dfrac{1}{s-2} - \dfrac{s}{s^2+1}$

(b) La transformée de Laplace de l'équation differentielle est :

$$s^2 Y - 2 - \frac{5}{2} sY + Y = -\frac{5}{2}\, \frac{1}{s^2+1}$$ d'où 1,5

$$Y = \frac{2s+1}{(s-2)(s^2+1)}$$ 1,5

et l'on déduit du (a) que $y(x) = e^{2x} - \cos x$ 1

qui vérifie bien les conditions initiales.

Exercice 03 : 06pts

La transformée de Laplace du système est :

$$\begin{cases} s^2 Y - 1 + s(Z-Y) = -\frac{3}{4} Y \\ s^2 Z + 1 - s(Z-Y) = -\frac{3}{4} Z \end{cases}$$ d'où 1

$$\begin{cases} s^2(Y+Z) = -\frac{3}{4}(Y+Z) \\ s^2(Y-Z) - 2 + 2s(Z-Y) = -\frac{3}{4}(Y-Z). \end{cases}$$ 1

Si bien que :

$$\begin{cases} Y+Z = 0 \\ 2s^2 Y - 2 - 4sY = -\frac{3}{2} Y \end{cases}$$ d'où 1

$$Y = \frac{1}{(s-\frac{1}{2})(s-\frac{3}{2})} = -\frac{1}{s-\frac{1}{2}} + \frac{1}{s-\frac{3}{2}} = -Z.$$ 1 1

On a donc $y(x) = -e^{\frac{x}{2}} + e^{\frac{3x}{2}} = -z(x).$ 1

qui vérifie bien les conditions initiales.

N. Berrouche