L3 Mathématiques
Analyse Hilbertienne (2018/2019)

Corrections
Faculté des Sciences.

Examen final

Vrai, Faux, Justifier vos réponses (4,5 pt)

1. faux, Un espace préhilbertien de dimension finie est un espace euclidien. **(0,5 pt)**
2. Vrai, En dimension finie, une application linéaire est continue . En dimension infinie, ce résultat ne subiste plus. Si $E = \mathcal{C}([0,1], \|.\|_2)$ muni du produit scalaire $(\langle f, g\rangle_2 = \int_0^1 f(t)\overline{g}(t)dt$. Pour $\delta : f \mapsto f(0)$ est une application linéaire mais non continue. En effet, si $f_n = (1-x)^n$ alors $\|f_n\| = (2n+1)^{-1/2}$ alors que $\delta(f_n) = 1$. **(0,5 pt)**
3. Vrai. Puisque la boule femée est fermée de E, la convexité découle de l'inégalité triangulaire **(0,5 pt)**
4. Si F est un sous espace vectoriel fermé dans un espace préhilbertien E, son orthogonal lui est son supplémentaire. Ce résultat est en général faux. Puisque si $E = \mathcal{C}([-1,1], \|.\|_2)$ muni du produit scalaire $\langle f, g\rangle_2 = \int_{-1}^1 f(t)\overline{g}(t)dt$ et si $G = \{f \in E \quad / f(0) = 0\}$. Alors G est dense dans E et lui est non égal donc $E \neq G \oplus G^\perp$ ce qui montre que l'orthogonal d'un sous espace n'est pas son supplémentaire en général. **(0,5 pt)**
5. Si dans un espace hilbertien E, un ensemble F est tel que pour tout $x \in E$ il existe un unique $a \in F$ qui réalise la distance minimale à E alors F est un converxe fermé. On ne connait pas de réponse ni par la négation ni l'affirmation. **(0,5 pt)**.
6. Tout espace de Hilbert séparable est isomorphe à $l^2(\mathbb{Z})$. Faux, il est isomorphe à $l^2(\mathbb{N})$ **(0,5 pt)**
7. $E = (\mathcal{C}([-1,1]))$ muni du produit scalaire $(\langle f, g\rangle_2 = \int_{-1}^1 f(t)\overline{g}(t)dt$ est un espace de Hilbert. Faux, il suffit de considèrer la suite de fonctions

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & -1 \leqslant x \leqslant \frac{-1}{n} \\ nx+1 & \frac{-1}{n} \leqslant x \leqslant 0 \\ 1 & 0 \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

$(f_n)_n$ est de cauchy pour la norme $\|.\|_2$. Si elle est convergente, elle devra converger vers la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ 1 & 0 < x \leqslant 1 \end{cases}$$

Or f n'est pas continue donc E ne peut être un espace de Hilbert puisque non complet. **(1 pt)**

8. Toute fonction 2π-périodique est limite uniforme sur $[0, 2\pi]$ d'une suite de polynômes trigonométriques. faux, il faut ajouter la condition de la continuité sur f. **(0,5 pt)**

Corrigé exercice 1 (7 pts)

A) Soit E un espace préhilbertien et A un partie non vide de E. Montrer que :

1. **a)** $A^\perp$ est un sous espace vectoriel fermé de E **(01 pt)**. En effet, pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $x, y \in A^\perp$, alors $\forall z \in A$ on a $< \alpha x + \beta y, z >= \alpha < x, z > +\beta < y, z >= 0$. Ce qui montre que $\alpha x + \beta y \in A^\perp$.

b) Montrons que $A^\perp$ est fermé (**0,5 pt**). Pour cela on considère une suite $(x_n)_n$ dans $A^\perp$ convergeant vers une limite x, montrer que $A^\perp$ est fermé revient à montrer que $x \in A^\perp$. On sait que l'application $(x,y) \mapsto < x, y >$ est continue dans le sens où $\lim_{n \longrightarrow \infty} < x_n, y > = < x, y >$. Du fait que $(x_n)_n \in A^\perp$ $\forall n > 0$ on a $< x_n, y > = 0$ et donc par passage à la limite $< x, y > = 0$ ce qui montre que $x \in A^\perp$.

c) Si $x \in A \cap A^\perp$ alors $< x, x > = 0$ ce qui montre que $x = 0$. Evidemment l'égalité à lieu. (**0,5 pt**)

2. Si A est dense dans E alors $A^\perp = \{0\}$. On sait déja que $\{0\} \in A^\perp$ en tant que plus petit sous espace vectoriel de E. Soit à présent $x \in A^\perp$, la densité de A dans E stipule qu'il existe une suite $(x_n)_n \in A$ tel que $\lim_{n \longrightarrow \infty} x_n = x$. Or $< x, x > = \lim_{n \longrightarrow \infty} < x_n, x > = 0$ on obtient alors $x = 0$. (**02 pts**)

B) Soient E, F deux espaces de Hilbert. T une application linéaire de E dans F. Notons par $T^\star$ l'adjoint de T défini par $\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^\star y \rangle$.

1. $kerT^\star = (ImT)^\perp$. Soit $x \in kerT^\star$ càd $T^\star x = 0$. Pour tout $y \in E$

$$0 = < T^\star x, y > = < x, Ty > \quad \Longrightarrow x \in (ImT)^\perp \; donc \;\; kerT^\star \subset (ImT)^\perp$$

L'inclusion inverse se démontre de la même manière. (**1,5 pts**)

2. En remplaçant T par $T^\star$ on montre que $kerT = (ImT^\star)^\perp$ (**1,5 pts**)

Corrigé exercice 2 (**08,50 pts**)

Sur $]0, \pi[$ on considère la fonction F à valeurs dans $]-1, 1[$ telle que $\theta \mapsto cos\theta$.

a) L'application $\theta \mapsto \cos\theta$ est une bijection continue de $]0, \pi[$ sur $]-1, 1[$ et donc à chaque fonction F continue on associe de façon univoque la fonction f continue sur $]-1, 1[$ par la relation $F(\theta) = f(x)$ où $x = cos\theta$ (**1 pt**)

b) Posons $f(x) = F(\theta)$. Calculer $\int_{[0,\pi]} |F(\theta)|^2 \, d\theta$ en fonction d'une intégrale dépendant de f (**1 pt**).

En posant $x = \cos\theta$ on obtient $F(\theta) = f(x)$, ainsi

$$\int_{[0,\pi]} |F(\theta)|^2 \, d\theta = \int_{[-1,1]} |f(x)|^2 \, \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$$

c) Posons $\phi_n(\theta) = cosn\theta$

1. Montrer que $(\phi_n)_n$ forme une base orthogonale dans $L^2([0,\pi], dx)$
Vérifons qu'elle est orthogonale (**1,5 pts**). Les régles de calculs trigonométriques nous montre que l'intégrale vaut :

$$\int_{[0,\pi]} \phi_n(\theta)\overline{\phi_m}(\theta) d\theta = \begin{cases} \delta_{n,m}\frac{\pi}{2} & (n, m \neq (0,0) \\ \delta_{0,m}\pi & sinon \end{cases}$$

où $\delta_{n,m} = 1$ si $n \neq m$ et 0 sinon.

2. En utilisant un changement de variables, en déduire que la suite $T_n(x) = cos(nArcosx)$ est une famille orthogonale de $L^2((0,1), \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}})$ **(0,5 pt)**
   On sait que la famille $\{1, x, x^2.....\}$ est totale dans $L^2((0,1), \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}})$ donc l'isomorphisme $F \mapsto f$ fournit une base hilbertienne dans $L^2((0,\pi), d\theta)$ noté $\phi(n)$.

3. Calculer les 5 premiers termes de T_n **(1,5 pt)**.
   Sachant que $\phi_n(\theta) = cosn\theta$ et $\theta = \arccos x$ on pose $T_n(x) = cos(n \arccos x)$. Donc
   $T_0(x) = cos(0 \arccos x) = 1, \quad T_1(x) = cos(\arccos x) = 1,$
   $T_2(x) = cos(2\theta) = 2cos^2 - 1 = 2x^2 - 1,$
   $T_3(x) = cos(3\theta) = 4x^3 - 3x$, $T_4(x) = cos(4x) = 8x^4 - 8x^2 - 1$

4. En utilisant le fait que $x = cos\theta$
   $T_n(1) = 1 = cosn \arccos 1 = cos0 = 1$, **(1 pt)**
   $T_n(-x) = T_n(-cos\theta) = T_n(cos(\theta+\pi)) = cos(n\theta+n\pi) = (-1)^n cosn\theta = (-1)^n T_n(x)$,
   (1 pt)
   Puisque $T_{n+1}(x) = cos(n+1)\theta, \quad T_{n-1}(x) = cos(n-1)\theta$
   On obtient

$$cos(n+1)\theta + T_{n-1}(x) = cos(n-1)\theta = 2cos\theta cosn\theta$$

   ce qui donne le résultat en récuperant la variable x **(1 pt)**