L3 Mathématiques
Analyse Hilbertienne (2018/2019)

Université Dr.T.Moulay de Saida.
Faculté des Sciences.

Examen final

Vrai, Faux, Justifier vos réponses

1. Un espace préhilbertien est un espace euclidien.
2. En dimension finie, une application linéaire est continue. Cela reste vrai aussi en dimension infinie.
3. La boule unité $B = \{x \in E / \|x\| \leqslant 1\}$ est un convexe fermé de E.
4. Si F est un sous espace vectoriel fermé dans un espace pr ?hilbertien E, son orthogonal lui est son supplémentaire.
5. Si dans un espace hilbertien E, un ensemble F est tel que pour tout $x \in E$ il existe un unique $a \in F$ qui réalise la distance minimale ? E alors F est un converxe fermé.
6. Tout espace de Hilbert séparable est isomorphe à $l^2(\mathbb{Z})$
7. $(\mathcal{C}([-1,1]), \|.\|_2)$ est un espace de Hilbert.$(\langle f,g\rangle_2 = \int_{-1}^{1} f(t)\overline{g}(t)dt$ et $\|f\|_2 = \sqrt{\langle f,f\rangle})$.
8. Toute fonction 2π-périodique est limite uniforme sur $[0, 2\pi]$ d'une suite de polynômes trigonométriques.

Exercice 1

A) Soit E un espace préhilbertien et A un partie non vide de E. Montrer que :

1. $A^{\perp}$ est un sous espace vectoriel fermé de E et on a $A^{\perp} \cap A \subset \{0\}$. A t-on égalité ?
2. Si A est dense dans E alors $A^{\perp} = \{0\}$

B) Soient E, F deux espaces de Hilbert. T une application linéaire de E dans F. Notons par $T^{\star}$ l'adjoint de T défini par $\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^{\star}y\rangle$
Montrer que $kerT^{\star} = (ImT)^{\perp}$ et $kerT = (ImT^{\star})^{\perp}$

Exercice 2

Sur $[0, \pi]$ on considère la fonction F à valeurs dans $]-1, 1[$ telle que $\theta \mapsto cos\theta$.

a) Montrer que F est une bijection continue.

b) Posons $f(x) = F(\theta)$. Calculer $\int\limits_{[0,\pi]} |F(\theta)|^2 \, d\theta$ en fonction d'une intégrale dépendant de f.

c) Posons $\phi_n(\theta) = cosn\theta$

1. Montrer que $(\phi_n)_n$ forme une base orthogonale dans $L^2([0,\pi], dx)$
2. En utilisant un changement de variables, en déduire que la suite $T_n(x) = cos(nArcosx)$ est une famille orthogonale de $L^2((0,1), \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}})$
3. Calculer les 5 premiers termes de T_n.
4. En utilisant ce qui précède, Montrer que
$T_n(1) = 1, \qquad T_n(-x) = (-1)^n T_n(x), \qquad T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2xT_n(x)$

Bonne chance