Université Akli Mohand Oulhadj de Bouira
Faculté des Sciences et des Sciences Appliquées
Département de Mathématiques et Informatique

Année : 2016 - 2017
Niveau : 1ère année MI
Module : Algèbre I

Examen d'Algèbre I (Durée 1h 30mn)

Exercice 1 : (02 Pts)

Montrer par l'absurde que :

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}, \qquad \frac{3x-2}{x+1} \neq 3$$

Exercice 2 : (02 Pts)

Soient x et y deux nombres réels, montrer par contraposition que :

$$[(x \neq 1) \wedge (x \neq -1) \wedge (y \neq -1)] \Longrightarrow (x^2 - y + x^2 y - 1 \neq 0)$$

Exercice 3 : (3.5 Pts)

Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^{2n}}$$

Exercice 4 : (6.5 Pts)

A. Soit $f : \mathbb{R}\setminus\{3\} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{3\}, \qquad f(x) = \frac{2+x}{3-x}$$

1. f est-elle injective ?
2. Soit y un nombre réel, résoudre dans $\mathbb{R}\setminus\{3\}$, selon les valeurs de y, l'équation : $\dfrac{2+x}{3-x} = y$
3. Que peut on déduire ?

B. Soit a un nombre réel et soit $g : \mathbb{R}\setminus\{3\} \longrightarrow \mathbb{R}\setminus\{a\}$ l'application définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{3\}, \qquad g(x) = f(x) = \frac{2+x}{3-x}$$

1. Déterminer le nombre a pour que g soit bijective.
2. Déterminer, dans ce cas, l'application réciproque g^{-1} de g.

Exercice 5 : (06 Pts)

Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications.

Montrer que :

(1) **Si** $(g \circ f)$ injective **et** f surjective, **alors** g est injective.

(2) **Si** $(g \circ f)$ surjective **et** g injective, **alors** f surjective.

Bon courage

Corrigé de l'examen d'Algèbre I :

Exercice n° = 1 : (02 pts)

Supposons que : $\exists x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $\dfrac{3x-2}{x+1} = 3$ (01)

Alors : $\exists x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $3x - 2 = 3x + 3$

Donc : $\exists x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $5 = 0$ Contradiction. (01)

D'où : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $\dfrac{3x-2}{x+1} \neq 3$

Exercice n° = 2 : (02 pts)

C'est-à-dire montrer que :

$$\left(x^2 - y + x^2 y - 1 = 0\right) \Rightarrow \left[(x=1) \vee (x=-1) \vee (y=-1)\right]$$ (0,5)

On a : $x^2 - y + x^2 y - 1 = 0 \Rightarrow x^2(1+y) - 1 - y = 0$

$$\Rightarrow x^2(1+y) - (1+y) = 0$$

$$\Rightarrow (x^2-1)(1+y) = 0$$ (1,5)

$$\Rightarrow (x^2 - 1 = 0) \vee (1 + y = 0)$$

$$\Rightarrow (x=1) \vee (x=-1) \vee (y=-1)$$

Donc :

$$\left[(x \neq 1) \wedge (x \neq -1) \wedge (y \neq -1)\right] \Rightarrow \left(x^2 - y + x^2 y - 1 \neq 0\right)$$

Exercice n° = 3 : (3,5) pts

* Pour $n = 1$: On a : $\displaystyle\sum_{k=1}^{2} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

et : $\displaystyle\frac{1}{2^{1-1}} - \frac{1}{2^{2\times 1}} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ (01)

Donc : $\displaystyle\sum_{k=1}^{2} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{1-1}} - \frac{1}{2^{2\times 1}}$

* Supposons que pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé $\displaystyle\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^{2n}}$

et montrons que $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n+2} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{2n+2}}$ (01)

On a : $\displaystyle\sum_{k=n}^{2n+2} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^n} + \sum_{k=n+1}^{2n+2} \frac{1}{2^k}$

Donc :
$$\sum_{k=n+1}^{2n+2} \frac{1}{2^k} = \left(\sum_{k=n}^{2n+2} \frac{1}{2^k}\right) - \frac{1}{2^n}$$
$$= \left(\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{2^k}\right) + \frac{1}{2^{2n+1}} + \frac{1}{2^{2n+2}} - \frac{1}{2^n}$$
(1,5)
$$= \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{2^{2n+1}} + \frac{1}{2^{2n+2}} - \frac{1}{2^n}$$
$$= \frac{1}{2^{n-1}}\left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2^{2n}}\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2}\right)$$
$$= \frac{1}{2^{n-1}} \times \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{2n}} \times \frac{1}{2^2}$$
$$= \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{2n+2}}$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\displaystyle\sum^{2n} \frac{1}{\ldots} = \frac{1}{\ldots} - \frac{1}{\ldots}$

A/

1/ Soient $x \in \mathbb{R}\setminus\{3\}$ et $x' \in \mathbb{R}\setminus\{3\}$ tels que $f(x) = f(x')$

Alors : $f(x) = f(x') \Rightarrow \dfrac{2+x}{3-x} = \dfrac{2+x'}{3-x'}$

$\Rightarrow 6 - 2x' + 3x - xx' = 6 - 2x + 3x' - x'x$

$\Rightarrow 5x = 5x'$ (01)

$\Rightarrow x = x'$

D'où : f injective

2/ On a : $\dfrac{2+x}{3-x} = y \Leftrightarrow 3y - yx = 2 + x$

(0,5)

$\Leftrightarrow (y+1)x = 3y - 2 \ldots\ldots (1)$

Donc : • Si $y = -1$: l'équation (1) n'a pas de solutions (0,5)

• Si $y \neq -1$: $(1) \Leftrightarrow x = \dfrac{3y-2}{y+1}$ (0,5)

(0,5)

3/ On déduit que f n'est pas surjective, car :

$\exists (y = -1) \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{3\} ,\ f(x) \neq -1$ (0,5)

B/ 1/ D'après A/2/, $a = -1$ (01) car :

$\forall y \in \mathbb{R}\setminus\{-1\} ,\ \exists ! \left(x = \dfrac{3y-2}{y+1}\right) \in \mathbb{R}\setminus\{3\} ;\ y = f(x)$

(0,5) D'après Exercice n°1

D'après ce qui précède :

$$g^{-1} : \mathbb{R}\setminus\{-1\} \longrightarrow \mathbb{R}\setminus\{3\} \quad 0,5 \quad 0,5$$

$$x \longmapsto g^{-1}(x) = \frac{3x-2}{x+1} \quad 0,5$$

Exercice n° 5 : (06 pts)

1°/ Supposons que $(g \circ f)$ est injective et f surjective et montrons que g est surjective, c.à.d : (01)

$$\forall y \in F,\ \forall y' \in F,\ g(y) = g(y') \Rightarrow y = y'.$$

Donc : Soient $y \in F$ et $y' \in F$ tels que $g(y) = g(y')$

Comme f est surjective, alors : $\exists x \in E ;\ y = f(x)$ (01)

et : $\exists x' \in E ;\ y' = f(x')$

Donc : $g(y) = g(y') \Rightarrow g[f(x)] = g[f(x')]$

$\Rightarrow g \circ f(x) = g \circ f(x')$

(01) $\Rightarrow x = x'$; car $g \circ f$ injective

$\Rightarrow f(x) = f(x')$; car f est une applicat

$\Rightarrow y = y'$.

D'où : g injective

Supposons que $(g \circ f)$ est surjective et g injective et montrons que f est surjective, c.à d: 0.1

$$\forall y \in F, \ \exists x \in E, \ y = f(x)$$

Donc: Soit $y \in F$, alors:

Puisque: g est une application de F dans G,

alors: $g(y) \in G$ 0.1

Et comme $(g \circ f)$ est surjective

alors: $\exists x \in E, \ g(y) = (g \circ f)(x)$

c.à.d: $\exists x \in E, \ g(y) = g[f(x)]$ 0.1

D'où: $\exists x \in E, \ y = f(x)$; car g est injective

Donc: f est surjective