Département du Socle Commun
$1^{ère}$ année Licence ST
Matière : Mathématiques 2

le : 03/07/2019

Durée : 1h30

EMD 2

Exercice 1 : (06 pts)

1) Déterminer les réels a, b tel que : $\frac{1}{x^2-5x+6} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x-3}$

2) Calculer l'intégrale indéfinie : $\int \frac{1}{x^2-5x+6}dx$

   Déduire la valeur de l'intégrale définie $\int_0^1 \frac{1}{x^2-5x+6}dx$

3) En utilisant un changement de variable convenable, calculer l'intégrale :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\cos(t)}{(\sin(t))^2 - 5\sin(t) + 6}dt$$

Exercice 2 : (08 pts)

Soit A une matrice définie par : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1) Déterminer l'application linéaire f associée à la matrice A.
2) Calculer la matrice inverse A^{-1} en utilisant la co-matrice.
3) En déduire la solution du système suivant en utilisant la méthode de la matrice inverse

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x - y + z = -1 \\ x + z = 2 \end{cases}$$

Soient $V_1(2, 1, -1)$; $V_2(2, -1, 2)$; $V_3(3, 0, 1)$ des vecteurs de IR^3.

4) Déterminer la matrice associée à f dans la base $\{V_1, V_2, V_3\}$.

Remarque : il appartiendra à l'étudiant de choisir entre l'exercice 3 et l'exercice 4

(اختر بين التمرينين 3 و 4)

Exercice 3 : (06 pts)

Soit l'équation différentielle linéaire du second ordre suivante :

$$y'' - 5y' - 14y = (3x^2 + 2x - 1)e^x \cdots\cdots (I)$$

1) Résoudre l'équation homogène associée.
2) Déterminer les réels: a, b, c pour que $y_p(x) = (ax^2 + bx + c)e^x$ soit une solution particulière.
3) Donner une solution générale de l'équation(I)

Exercice 4 : (06 pts)

Soit f une application définie par : $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$(x, y) \mapsto f(x, y) = (2x + 3y, 3x - y)$$

1) Montrer que f est une application linéaire.
2) Déterminer $Ker(f)$ et $Im(f)$. En déduire leurs dimensions.
3) f , est-elle injective ? surjective ? bijective ?

Bon courage

Mathématiques 2 2017/2018

Corrigé de l'EMD 2

Ex 01:

1) $\dfrac{1}{x^2-5x+6} = \dfrac{a}{(x-2)} + \dfrac{b}{(x-3)} = \dfrac{a(x-3)+b(x-2)}{(x-2)(x-3)} = \dfrac{(a+b)x-3a-2b}{x^2-5x+6}$ 0,5

Par identification, on obtient : $\begin{cases} a+b=0 & \dots (1) \\ -3a-2b=1 & \dots (2) \end{cases}$ 0,5

$3\times(1)+(2) \Rightarrow b=1$ 0,5 et $a=-1$ 0,5

$$\Rightarrow \frac{1}{x^2-5x+6} = \frac{-1}{(x-2)} + \frac{1}{(x-3)}$$

2) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-5x+6}\,dx = \int \frac{-1}{(x-2)}\,dx + \int \frac{1}{(x-3)}\,dx$ 0,5 0,5

$$= -\ln|x-2| + \ln|x-3| + c = \ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right| + c \quad (c\in\mathbb{R})$$

• $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2-5x+6}\,dx = \left[\ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right|\right]_{x=0}^{x=1} = \ln(2) - \ln(3) + \ln(2) = \ln(4/3)$ 0,5 0,5

3) Posons : $x=\sin(t) \Rightarrow dx = \cos(t)\,dt$ 0,5 0,5 1,5

Pour : $t=\pi/2 \Rightarrow x=1$ 0,5 /7

$t=0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow I = \displaystyle\int_0^1 \frac{2}{x^2-5x+6}\,dx = 2\ln(4/3)$ 0,5

1) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$(x,y,z) \longmapsto f(x,y,z) = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (x+y \,;\, 2x-y+z \,;\, x+ \ldots$ 0,5 0,5

2) On a : $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} \cdot (A^*)^t$, avec : A^* est la co-matrice 0,5

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$ 0,5

$A^* = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix}$ 0,5 $\Rightarrow A^{-1} = \dfrac{-1}{2} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 3/2 \end{bmatrix}$ 0,5

3) On a $|A| \neq 0 \Rightarrow$ le système admet une solution unique

$X_{sol} = A^{-1} \cdot E \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ 0,5 0,5

4) Soit B la matrice associée à f dans la base $\{V_1, V_2, V_3\}$ alors on a :

1ère Méthode : $B = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(V_1) & f(V_2) & f(V_3) \end{array} \\ \begin{bmatrix} -8 & -35 & -37 \\ -10 & -46 & -44 \\ 13 & 57 & 55 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{array}$

avec • $f(V_1) = f(2,1,-1) = (3,2,1) = \alpha V_1 + \beta V_2 + \delta V_3$

$\Rightarrow \begin{cases} 2\alpha + 2\beta + 3\delta = 3 \\ \alpha - \beta = 2 \\ -\alpha + 2\beta + \delta = 1 \end{cases}$ 0,5 on obtient $\alpha = -8$, $\beta = -10$ et $\delta = 13$ 0,5

$y_p'(x) = (a x^2 + (2a+b) x + (c+b)) e^x$ (0.5)

$y_p''(x) = (a x^2 + (4a+b) x + (2a+2b+c)) e^x$ (0.5)

En remplaçant dans l'équation (2), on obtient

$$\begin{cases} -12a = 3 \\ -6a - 12b = 2 \\ 2a - 3b - 12c = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{4} \\ b = -\frac{1}{18} \\ c = \frac{5}{288} \end{cases}$$ (0.5) (0.5) (0.5)

$y_G(x) = y_h + y_p$ (0.5)

(3) $y_G(x) = \underbrace{C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x}}_{y_h} + \underbrace{\left(-\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{18}x - \frac{5}{288}\right)}_{y_p}$ (0.5)

Exo 2 : (1) Soient $(x_1,y_1), (x_2,y_2) \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

(a) $f((x_1,y_1)+(x_2,y_2)) = f(x_1+x_2, y_1+y_2) = (2(x_1+x_2)+3(y_1+y_2), 3(x_1+x_2)-(y_1+y_2))$

$= (2x_1+3y_1, 3x_1-y_1) + (2x_2+3y_2, 3x_2-y_2)$ (1)

$= f(x_1,y_1) + f(x_2,y_2)$

(b) $f(\lambda(x_1,y_1)) = f(\lambda x_1, \lambda y_1) = (2\lambda x_1 + 3\lambda y_1, 3\lambda x_1 - \lambda y_1) = \lambda(2x_1+3y_1, 3x_1-y_1)$

(1) $= \lambda f(x_1,y_1)$

(2) $\mathrm{Ker}(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, (2x+3y, 3x-y) = (0,0)\}$ (0.5)

$$\begin{cases} 2x + 3y = 0 & (1) \\ 3x - y = 0 & (2) \end{cases}$$

(2) $\Rightarrow y = 3x$ $\overset{(1)}{\Rightarrow} 2x + 9x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 0$ (0.5)

$\Rightarrow \mathrm{Ker}(f) = \{(0,0)\}$ (0.5) D'où $\dim \mathrm{Ker}(f) = 0$ (0.5)

• $f(V_2) = f(2,-1,2) = (3,7,4) = \alpha V_1 + \beta V_2 + \gamma V_3$

$$\begin{cases} 2\alpha + 2\beta + 3\gamma = 1 \\ \alpha - \beta = 7 \\ -\alpha + 2\beta + \gamma = 4 \end{cases} \text{ 0,5 } \Rightarrow \alpha = -39,\ \beta = -46 \text{ et } \gamma = 57 \text{ 0,5}$$

• $f(V_3) = f(3,0,1) = (3,7,4) = \alpha V_1 + \beta V_2 + \gamma V_3$

$$\begin{cases} 2\alpha + 2\beta + 3\gamma = 3 \\ \alpha - \beta = 7 \\ -\alpha + 2\beta + \gamma = 4 \end{cases} \text{ 0,5 } \Rightarrow \alpha = -37,\ \beta = -44,\ \gamma = 55 \text{ 0,5}$$

$2^{ème}$ Méthode : On a $B = P^{-1} \times A \times P$ 0,5 (P matrice de passage)

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ 0,5 } ; \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{bmatrix} \text{ 1}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -10 & 5 & -7 \\ -12 & 6 & -8 \\ 15 & -7 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -39 & -37 \\ -10 & -46 & -44 \\ 13 & 57 & 55 \end{pmatrix} \text{ 1}$$

Exo 3 : ① $y'' - 5y' - 14y = 0$

E.C : $r^2 - 5r - 14 = 0$ 0,5 | $\Delta = 9^2 > 0 \Rightarrow r_1 = -2$ 0,5 et $r_2 = 7$ 0,5

$\Rightarrow y_h = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{7x}$ 1 avec $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

② On a $y_p(x) = (a x^2 + b x + c) e^{2}$, $a, b, c \in \mathbb{R}$

$\mathrm{Im}(f) = \{ f(x,y) \setminus (x,y) \in \mathbb{R}^2 \}$

$\mathrm{Im}(f) = \{ (2x+3y \, ; \, 3x-y) \setminus x, y \in \mathbb{R} \}$ 0,5

On a $\dim(\mathbb{R}^2) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \mathrm{rg}(f)$

$2 = 0 + ?$ 0,5

$\Rightarrow \mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f)) = 2 - 0 = 2$

(F) On a $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 0 \Rightarrow f$ est injective 0,5

$\mathrm{rg}(f) = 2 = \dim(\underset{F}{\mathbb{R}^2}) \Rightarrow f$ est surjective 0,5

f est inj + surj $\Rightarrow f$ est bijective 0,5