Université de M'sila. 2018-2019. Département de T.C.T.

Module: Analyse Complexe (Maths 4). durée $1^h:30^{mn}$.

16 JUIN 2019

Exercice 1 *(1,5pt+1,5pt+1+1+1=6pts)*

On pose $f(z) = e^z$ *où* $z \in \mathbb{C}$.

1) Par définition si on pose $z = x + iy$ *alors* $e^z = e^{x+iy} = e^x \cos y + e^x \sin y$ *alors*

$$\operatorname{Re} f(z) = e^x \cos y \quad \textit{et} \quad \operatorname{Im} f(z) = e^x \sin y .... \ (\mathbf{1{,}5pt+1{,}5pt})$$

2)en utilisant la définition du module, il est claire que $|f(z)| = e^x$. **(1pt)**

3) comme $|f(z)| = e^x. > 0$ *alors pour tout* $z \in \mathbb{C}$ *l'équation* $f(z) = 0$ *n'admit pas de solution.* **(1pt)**

4) On a: $e^z = -2 \Longleftrightarrow .\begin{cases} e^x \cos y = -2 \\ e^x \sin y = 0 \end{cases}$ *on tire que* $\sin y = 0$ *ie* $y = \pi k$ *où* $k \in \mathbb{Z}$ *donc pour cette valeur de* y *la première équation nous donne* $(-1)^k e^x = -2$ *ceçi implique* $k = 2m + 1$ *et* $e^x = 2$ *alors* $x = \ln 2$

conclusion : l'équation en question a pour solution

$$z = \ln 2 + i(2m + 1)\pi \qquad (\mathbf{1pts})$$

Exercice 2 *(2+3+1+1+2=9 points)*

1) Montrant que la fonction $\varphi(x, y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$ *est une fonction harmonique sur* $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$. *il faut vérifier que* $\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$

On a $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = \dfrac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2} \Longrightarrow \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \dfrac{(x^2 + y^2)\left[-2(x^3 + xy^2) + 4x^3 - 4xy^2\right]}{[x^2 + y^2]^4}$ *et*

$\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = \dfrac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} \Longrightarrow \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \dfrac{[x^2 + y^2]\left[-2x^3 - 2xy^2 + 8xy^2\right]}{[x^2 + y^2]^4}$ *alors*

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \textit{....donc la fonction } \varphi \textit{ est Harmonique.....} (\mathbf{2pts})$$

2) D'aprés le cours on a un théorème qui nous a permis de conclure qu'il

existe une fonction holomorphe $f(z)$ *tel que* $\operatorname{Re} f(z) = \varphi(x,y)$. **(1pt)**
Déterminant la forme explicite de f. *On pose* $f(z) = \varphi(x,y) + i\psi(x,y)$ *comme* f *est holomorphe alors sa partie réelle et sa partie imaginaire vérifiants les conditions de cauchy-Riemann par conséquent on a* $\begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \dfrac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} \end{cases}$

Intégrant la première équation par rapport à x *on obtient* $\psi(x,y) = \int \dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}dx = \dfrac{-y}{x^2+y^2} + K(y)$ *de la deuxième equation on tire que* $\frac{\partial \psi}{\partial y} = \dfrac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} + K'(y) \Longrightarrow K'(y) = 0$ *ie* $K(y) = \alpha$ *alors*

$$f(z) = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2} + \beta$$

comme par hypothèse $f(1) = 1$ *alors* $\beta = 0$ *et*

$$f(z) = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2} \text{..................} \textbf{(1pt)}$$

pour sa dérivée en fonction de z. *on a*

$$\begin{aligned} \frac{df}{dz} &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} + i\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \\ &= -\frac{x^2-y^2-2ixy}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{\overline{z}^2}{z^2\overline{z}^2} = -\frac{1}{z^2} \qquad \textbf{(1pt)} \end{aligned}$$

On peut déduire que

$$f(z) = \frac{1}{z} \text{..........................} \textbf{(1pt)}.$$

4) Calculer $\int_{|z|=1} \dfrac{f(z)+z+1}{z}dz = \int_{|z|=1} \dfrac{\frac{1}{Z}+z+1}{z}dz$ *on prend comme paramétrisation* $z = e^{i\theta}$ *où* $0 \leq \theta \leq 2\pi$ *on trouve*

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{-i\theta}+e^{i\theta}+1}{e^{i\theta}} ie^{i\theta}d\theta = 2\pi i \qquad \textbf{(2pts)}$$

Exercice 3 *Calculer la valeur de*

1) γ *est le contour paramétrisé par :* $z(t) = t^2 + it \quad (0 \leq t \leq 1)$ *alors* $\int_\gamma z^n dz = \int_0^1 (t^2 + it)^n (2t + i)\, dt =$

$$\left.\frac{(t^2 + it)^{n+1}}{n+1}\right|_{t=0}^{t=1} = \frac{(1+i)^{n+1}}{n+1} \text{..........où } n \in \mathbb{N} \text{ ....} \qquad (2pts)$$

2) $\int_{|z-3|=1} \frac{1}{(z-3)^2} dz$, *.On prend comme paramétrisation* $z - 3 = e^{i\theta}$ *où* $0 \leq \theta \leq 2\pi$ *on trouve*

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{2i\theta}} ie^{i\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} ie^{-i\theta} d\theta = 0 \qquad (2pts)$$

3) $\int_{\left|z-\frac{i}{2}\right|=1} \frac{e^z}{z-i} dz$, *comme* e^z *est holomorphe sur* $\mathbb{C}$ *et* $z_0 = i$ *est à l'interieur de* $\left\{ z : \left|z - \frac{i}{2}\right| < 1 \right\}$ *alors en utilisant le théorème de Cauchy on obtient*

$$\int_{\left|z-\frac{i}{2}\right|=1} \frac{e^z}{z-i} dz = 2\pi i e^i \text{..........} \qquad (2pts)$$

Le Resp de module: A.Memou.