Universite de Mohamed Boudiaf / M'sila
Faculté des Sciences et Technologies
Module : Méthodes Numériques (MATH 05)

Année Universitaire : 2018/2019
Le 15/06/2019 à 10^h : 00.
Durée : 1^h 30^{min}

15 JUIN 2019

EPREUVE DU 4^{eme} SEMESTRE

Exercice N°01 : (03 pts)

Estimez l'erreur dans l'évaluation de $f(x) = e^{10x^2}\cos(x)$ si on sait que x est égal à 2 à $\pm 10{,}6$ près.

Barème détaillé de l'exercice 01 :

1) $00.50 + 01.00 + 01.50$

Exercice N°02 : (07.5 pts) **(Résolution l'équation non linéaire $f(x) = 0$)**

On veut calculer l'unique racine positive r de l'équation f(x) = 0 où $f(x) = e^x - x - 2$.
On vous propose d'appliquer 2 méthodes de points fixes, basées sur les fonctions suivantes:
$g_1(x) = e^x - 2$
$g_2(x) = \ln(2 + x)$
1- Comment ces fonctions g_1 et g_2 ont-elles été obtenues ? Détaillez vos réponses.
2- Dans quel intervalle de longueur 1 se trouve cette racine ? (justifier)
3- En déduire si les méthodes de points fixes utilisant g_1 et g_2 convergent.
4- Faire 2 itérations à partir de $x_0 = 1$ pour chacune des 2 méthodes de point fixe.
5- Appliquer la méthode de Newton à l'équation de départ et faites 2 itérations à partir de $x_0 = 1$.
6- Pour quelle(s) valeur(s) de x_0 ne peut-on pas démarrer la méthode de Newton ?

Barème détaillé de l'exercice 02 :

1) 01.00 2) 01.00 3) 01.50 4) 01.50 5) 01.50 6) 01.00

Exercice N°03 : (09.5 pts) **(Résolution du système linéaire $Ax = b$)**

On donne le système (S) : $\begin{cases} x - y + 2z = 5 \\ 3x + 2y + z = 10 \\ 2x - 3y - 2z = -10 \end{cases}$

Méthode Direct

1) Ecrire la matrice A associer au systeme (S) et calculer : A^t, $|A|$, $\|A\|_1$, $\|A\|_2$ et $\|A\|_\infty$.
2) Résoudre ce système, en utilisant la méthode d'élimination de Gauss.
3) Résoudre ce système, en utilisant la méthode d'élimination de Gauss-jordan.
4) Effectuer une factorisation LU de la matrice A et resoudre le système (S).

Barème détaillé de l'exercice 03 :

1) $00.50 + 00.50 + 00.50 + 00.50 + 00.50$ 2) 02.00 3) 02.00 4) 03.00

Responsable de module : Abdelkader Djerad.

Université de M'sila / Faculté des ST / Année U: 2018/2019.

Corrigé type d'Epreuve du 4ème Semestre

Module : Méthodes Numériques (MATH 05)

Exercice N° 01 : (3pts)

On applique la formule de Propagation d'erreur avec $x^* = 2$

et $\Delta x = 10^{-6}$ et $f'(x) = 20\,x\,e^{10x^2}\cos(x) - e^{10x^2}\sin(x)$ (1,5)

Cela donne : $\Delta f \simeq |f'(x^*)|.\Delta x = 4,1322.10^{12}$. (1,5)

Exercice N° 02 : (7,5pts)

1) $f(x) = 0 \iff f(x) + x = x$ (1)

$e^x - x - 2 = 0 \iff e^x = x + 2 \iff x = \ln(x+2)$ (1)

2) $f(1) = e - 3 < 0$ et $f(2) = e^2 - 4 > 0$ d'où l'intervalle $[1;2]$

3) $g_1'(x) = e^x$ si $1 \le x \le 2 \Rightarrow e^1 \le e^x \le e^2$ donc la méthode de Point fixe diverge.

$g_2'(x) = \dfrac{1}{2+x}$ si $1 \le x \le 2 \Rightarrow 3 \le x+2 \le 4 \iff \dfrac{1}{3} \geq \dfrac{1}{x+2} \geq \dfrac{1}{4}$

donc la méthode de Point fixe converge car : $g_2'(x) \le \dfrac{1}{3}$ (1,5)

4) $x_1 = g_1(1) = e - 2$; $x_2 = g_1(e) = e^{e-2} - 2$

$x_1 = g_2(1) = \ln(3)$; $x_2 = g_2(\ln 3) = \ln(\ln(3) + 2) = 1,1309$ (1,5)

5) $x_{n+1} = x_n - \dfrac{e^{x_n} - x_n - 2}{e^{x_n} - 1}$; $x_1 = \dfrac{2}{e-1} = 1,1639$ (1,5)

$x_2 = 1,1464$

6) les Valeurs pour lesquelles $f'(x_0) = 0$; c'est-à-dire : $x_0 = 0$ (1)

Exercice N° 03 (9,5pts)

1) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -2 \end{bmatrix}$; $A^t = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$; $|A| = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

$\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^{3} |a_{ij}| = \max\{6; 6; 5\} = 6$.

$\|A\|_2 = \sqrt{\sum |a_{ij}|^2} = \sqrt{1+1+4+9+4+1+4+9+4} = \sqrt{37} = 6,08$

$\|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^{3} |a_{ij}| = \max\{4; 6; 7\} = 7$. (2,5)

2) Méthode d'élimination de Gauss.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \\ 2 & -3 & -2 & -10 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 5 & -5 & -5 \\ 0 & -1 & -6 & -20 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -6 & -20 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -7 & -21 \end{array}\right] \text{ donc } \begin{cases} x - y + 2z = 5 \\ y - z = -1 \\ -7z = -21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 + y - 2z \\ y = z - 1 \\ z = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 + 2 - (2)(3) \\ y = 3 - 1 = 2 \\ z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$$

(2)

3) Méthode d'élimination de Gauss-Jordan.

On continue l'operation de Gauss :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -7 & -21 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \text{ donc } \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3. \end{cases}$$

(2)

4) Factorisation LU.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$ Apres l'utilisation de la Methode de Gauss.
On a obtenue deja :

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & -1 & -6 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ (-3)L_1 + L_2 \\ (-2)L_1 + L_3 \end{matrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \left(\frac{1}{5}\right)L_2 + L_3 \end{matrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix} \qquad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ +3 & 1 & 0 \\ +2 & -\frac{1}{5} & 1 \end{bmatrix}$$

$$Ax = b \Leftrightarrow LUx = b \Leftrightarrow Ly = b \text{ et } Ux = y \Leftrightarrow \begin{cases} Ly = b \\ Ux = y \end{cases}$$

$$Ly = b \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 5 \\ 3y_1 + y_2 = 10 \\ 2y_1 - \frac{1}{5}y_2 + y_3 = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 5 \\ y_2 = -5 \\ y_3 = -21 \end{cases}$$

$$Ux = y \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \\ 5x_2 - 5x_3 = -5 \\ -7x_3 = -21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 3. \end{cases}$$

(3)

OBS : On peut utilise autre Methode !