République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mouloud MAMMERI de Tizi-Ouzou
Faculté de Génie Electrique et d'informatique
Département d'Automatique

Examen : Systèmes Linéaires Multivariables **Durée :1h40**

Exercice 1 (08pts):

Soit la réalisation d'état suivante :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

1. Calculez les valeurs propres de cette réalisation ? 1,5

2 2. Montrez que cette réalisation est sous la forme décomposée selon la commandabilité? Est-elle stabilisable?

3. Calculez la matrice de transfert de la réalisation ? 1,5

3 4. Est-il possible en utilisant la commande par retour d'état de placer les pôles aux positions $\{-4; -4; -4; -4; -3\}$? Si oui, calculez ce gain de retour d'état K en considérant que la partie commandable de la réalisation est sous la forme canonique commandable ?

Exercice 2 (7pts):

On considère un système régi par l'équation d'état :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) \end{cases}$$

On souhaite commander ce système par retour d'état de sorte qu'il soit caractérisé par une réponse indicielle, en boucle fermée, présentant un dépassement de 20% et un temps de montée de $0{,}5\,s$. Établir le schéma fonctionnel complet du système auquel on associera un observateur asymptotique possédant un temps de montée de 0,1s et un facteur d'amortissement égal à 1.

- Calculer le gain du retour d'état et le gain de l'observateur.

Exercice 3 (5pts) :

Soit un processus à deux entrées décrit par les équations d'état :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} u .$$

On désire par un retour d'état stabilisé le système en imposant les pôles en boucle fermée égaux à -2, -2 et -5. Peut-on réaliser ceci avec uniquement la première entrée seule ou la seconde entrée seule ? Justifiez. (Ne faites pas de calculs)

Solution de l'exercice 1:

Pour calculer les valeurs propres de la réalisation, on commence par constater que la matrice A de la réalisation est bloc diagonale :

$$A=\left[\begin{array}{ccc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right]=\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$$

1,5

Ainsi ses valeurs propres sont données par l'union des valeurs propres de ses blocs diagonaux. Son deuxième bloc diagonal A_2 est lui même diagonal alors ses valeurs propres sont les éléments de sa diagonale $\Lambda_1=\{-4,-3\}$. Les valeurs propres du premier bloc A_1 sont les racines de son polynôme caractéristique :

$$\det(\lambda I-A_1)=det\begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 2 & \lambda-3 & 2 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}=\lambda\{\lambda(\lambda-3)+2\}=\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)$$

Alors, l'ensemble des valeurs propres de A_1 est $\Lambda_1=\{0,1,2\}$. Ainsi l'ensemble des valeurs propres de A (de la réalisation) est $\Lambda=\Lambda_1\cup\Lambda_2=\{0,1,2,-4,-3\}$.

2. Forme décomposée selon la contrôlabilité et stabilisabilté :

La forme décomposée selon la contrôlabilité est comme suit (en prenant en considération que la matrice D de la réalisation donnée est nulle) :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_C \\ \dot{x}_{\bar{C}} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A_C & A_{12} \\ 0 & A_{\bar{C}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_C \\ x_{\bar{C}} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} B_C \\ 0 \end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix} C_C & C_{\bar{C}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_C \\ x_{\bar{C}} \end{bmatrix}$$

Dans cette forme la paire (A_C,B_C) doit être ~~contrôlable~~. commandable

En comparant cette expression, avec la réalisation donnée on peut constater que :

$$\begin{bmatrix} A_C & A_{12} \\ 0 & A_{\bar{C}} \end{bmatrix}\rightarrow\left[\begin{array}{ccc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right],\quad \begin{bmatrix} B_C \\ 0 \end{bmatrix}\rightarrow\left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{bmatrix} C_C & C_{\bar{C}} \end{bmatrix}=\left[\begin{array}{ccc|cc} -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

2

commandable

Il reste à démontrer que la paire (A_C,B_C) est ~~contrôlable~~. Pour ceci, on calcul sa matrice de commandabilité $\Gamma_C(A_C,B_C)$ et on doit montrer qu'elle est à rang plein ~~pour les lignes :~~

$$\Gamma_C(A_C,B_C)=\begin{bmatrix} B_C & A_CB_C & A_C^2B_C \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 7 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La sous matrice formée des trois premières colonnes de $\Gamma_C(A_C,B_C)$ a un déterminant qui est égale à :

$$\det\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix} = 1 \neq 0$$

Ainsi, le rang de $\Gamma_C(A_C, B_C)$ est : $rank(\Gamma_C(A_C, B_C)) = 3 = nombre\ de\ ses\ lignes$ et la paire (A_C, B_C) est contrôlable. Par conséquent, la réalisation donnée est sous la forme décomposée selon la ~~contrôlabilité~~. Les valeurs propres ~~contrôlables~~ sont ceux de $A_C = A_1$ est les valeurs propres non ~~contrôlables~~ sont ceux de $A_C = A_2$.

Commandabilité

commandable

commandable

Vues que les valeurs propres non ~~contrôlables~~ (ceux de $A_C = A_2$) sont $\{-3, -4\}$ et sont à parties réelles négatives, alors la réalisation est **stabilisable**. commandable

3. Calcul de la matrice de transfert de la réalisation :

Commandabilité

Vue que la réalisation est sous une forme décomposée selon la ~~contrôlabilité~~ , alors sa matrice de transfert ~~de~~ est déterminée seulement par sa partie ~~contrôlable~~ : Commandable

$$G(s) = C_C(sI - A_C)^{-1}B_C + D_C = \begin{bmatrix}-1 & 1 & -1\\ -2 & 1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s & -1 & 0\\ 2 & s-3 & 2\\ 0 & 0 & s\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}s & -1 & 0\\ 2 & s-3 & 2\\ 0 & 0 & s\end{bmatrix}^{-1} = \frac{\begin{bmatrix}s(s-1) & 2s & 0\\ s & s^2 & 0\\ -2 & -2s & (s-1)(s-2)\end{bmatrix}^T}{s(s-1)(s-2)} = \begin{bmatrix}\frac{1}{s-2} & \frac{1}{(s-1)(s-2)} & \frac{-2}{s(s-1)(s-2)}\\ \frac{2}{(s-1)(s-2)} & \frac{s}{(s-1)(s-2)} & \frac{-2}{(s-1)(s-2)}\\ 0 & 0 & \frac{1}{s}\end{bmatrix}$$

1,5

$$\therefore\ G(s) = C_C(sI - A_C)^{-1}B_C$$

$$= \begin{bmatrix}-1 & 1 & -1\\ -2 & 1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{s-2} & \frac{1}{(s-1)(s-2)} & \frac{-2}{s(s-1)(s-2)}\\ \frac{2}{(s-1)(s-2)} & \frac{s}{(s-1)(s-2)} & \frac{-2}{(s-1)(s-2)}\\ 0 & 0 & \frac{1}{s}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}\frac{-s+3}{(s-1)(s-2)} & \frac{1}{s-2} & \left(\frac{2}{s(s-1)(s-2)} + \frac{-2s}{s(s-1)(s-2)} + \frac{-(s-1)(s-2)}{s(s-1)(s-2)}\right)\\ -\frac{2}{s-1} & \frac{1}{s-1} & \left(\frac{4}{s(s-1)(s-2)} + \frac{-2s}{s(s-1)(s-2)} + \frac{-2(s-1)(s-2)}{s(s-1)(s-2)}\right)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}\frac{-s+3}{(s-1)(s-2)} & \frac{1}{s-2} & -\frac{1}{s-2}\\ \frac{-2}{s-1} & \frac{1}{s-1} & \frac{-2}{s-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{s-2} & \frac{1}{s-2}\\ \frac{1}{s-1} & 0\end{bmatrix}$$

4.1. Commande par retour d'état :

En premier lieu, vue que le système est stabilisable, on peut le commander en utilisant le retour d'état. Ensuite, vue que l'ensemble des valeurs propres désirées en boucle fermées contient les valeurs propres non ~~contrôlables~~ $\{-4, -3\}$ qui ne peuvent pas être affectées par le retour d'état, alors on peut en utilisant la commande par retour d'état obtenir l'ensemble des valeurs propres désirées.

Commandable

4.2. Calcul du gain de retour d'état K nécessaire pour obtenir les valeurs propres désirées :

L'expression de la commande par retour d'état est comme suit (En partagent K de façon compatible avec le vecteur d'état $\begin{bmatrix} x_C \\ x_{\bar{C}} \end{bmatrix}$:

$$u = r - K\begin{bmatrix} x_C \\ x_{\bar{C}} \end{bmatrix} = r - [K_C \quad K_{\bar{C}}]\begin{bmatrix} x_C \\ x_{\bar{C}} \end{bmatrix}$$

Si on remplace cette expression dans l'équation d'état, nous obtenons l'équation d'état en boucle fermée suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_C \\ \dot{x}_{\bar{C}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_C & A_{11} \\ 0 & A_{\bar{C}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_C \\ x_{\bar{C}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_C \\ 0 \end{bmatrix}\left(r - [K_C \quad K_{\bar{C}}]\begin{bmatrix} x_C \\ x_{\bar{C}} \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} A_C - B_C K_C & A_{11} - B_C K_{\bar{C}} \\ 0 & A_{\bar{C}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_C \\ x_{\bar{C}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_C \\ 0 \end{bmatrix} r$$

commandabilité

Cette équation est aussi dans la forme décomposée selon la ~~contrôlabilité~~. Les valeurs propres non

Commandable

~~contrôlables~~ restent inchangées et $K_{\bar{C}}$ n'a aucun effet sur les valeurs propres en boucle fermée, alors on le prend comme étant nul. Par contre les valeurs propres contrôlables peuvent être librement placées par le choix de K_C. Puisque la paire (A_C, B_C) est sous la forme canonique ~~contrôlable~~, ceci permettra

commandable

d'obtenir le gain de retour d'état K_C en constatant que :

3

$$A_C = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right], \quad B_C = \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right]$$

Les deux blocs diagonaux de A_C sont sous la forme compagnon et les lignes de B_C ont un 1 comme premier paramètre non nul de ses lignes non nulles. Le polynôme caractéristique désiré en boucle fermée correspondant au valeurs propres ~~contrôlables~~ doit être partagé de façon compatible avec A_C :

commandable

$$\Delta_f(s) = (s+4)^3 = (s+4)^2(s+4) = (s^2 + 8s + 16)(s+4)$$

ses coefficients seront utilisées pour former la matrice A_{Cd} en boucle fermée qui est aussi sous la forme compagnon :

$$A_{Cd} = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ -16 & -8 & -2 \\ \hline 0 & 0 & -4 \end{array}\right]$$

On sait que $A_{Cd} = A_C - B_C K_C$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ -16 & -8 & -2 \\ \hline 0 & 0 & -4 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right] - \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right] K_C$$

et si on passe à la forme réduite (Puisque la première ligne de B_C est nulle, la première ligne du deuxième terme de cette équation ne dépend pas des composantes de K_C) nous obtenons $A_{CdR} = A_{CR} - B_{CR} K_C$ avec :

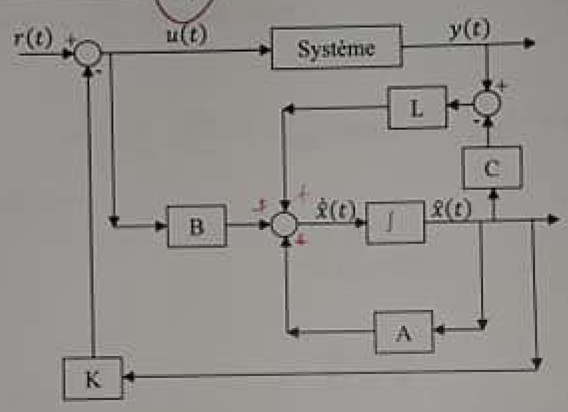
$$A_{CdR} = \begin{bmatrix} -16 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}; A_{CR} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; B_{CR} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ainsi :

$$K_C = B_{CR}^{-1}(A_{CR} - A_{CdR}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \left(\begin{bmatrix} -2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -16 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 14 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 14 & 11 & -8 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$K = [K_C \quad K_{\bar{C}}] = \left[\begin{array}{ccc|cc} 14 & 11 & -8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

<u>**Solution de l'exercice 2 :**</u> 7



Dans le cas d'une commande par retour d'état avec un vecteur de gain (k), la fonction de transfert en boucle fermée a pour expression :

$$H(s) = \frac{y(s)}{r(s)} = C[sI - (A + BK)]^{-1}B$$

Calculons le dénominateur de cette fonction de transfert :

$$D(s) = \det\big(sI - (A + BK)\big) = s^2 + (4 + k_2 + k_1)s + 2k_1 + 2 + k_2$$

Compte tenu des performances que l'on souhaite obtenir, nous devons identifier ce dénominateur avec :

$t_m = 0.5s \Longrightarrow w_n = \frac{3}{t_m} = 6rad/s$ et $dep = 20\% \Rightarrow \xi = 0.45$

Alors :

$$D(s) = \frac{s^2}{w_n} + \frac{2\xi s}{w_n} + 1 = \frac{s^2}{36} + 0.15s + 1 = \frac{1}{36}(s^2 + 5.4s + 36)$$

D'où : $4 + k_2 + k_1 = 5.4$

$2k_1 + 2 + k_2 = 36$

Alors :

$k_1 = 32.6$
$k_2 = -31.2$

Calculons à présent le gain L de l'observateur :

$$D(s) = \det(sI - (A - LC)) = s^2 + (4 + l_2) + 2 + l_1$$

Le polynôme caractéristique désiré et donné par :

Nous avons :

$t_m = 0.1s \Rightarrow w_n = \frac{3}{t_m} = 30rad/s$ et $\xi = 1$

Donc :

$$D(s) = \frac{s^2}{w_n} + \frac{2\xi s}{w_n} + 1 = \frac{s^2}{900} + 0.067s + 1 = \frac{1}{900}(s^2 + 60s + 900)$$

Par identification :

$$\begin{cases} 4 + l_2 = 60 \\ 2 + l_1 = 900 \end{cases}$$

Alors :

$$\begin{cases} l_1 = 898 \\ l_2 = 56 \end{cases}$$

<u>Solution de Exercice 3 :</u>

Oui on peut le faire avec la première entrée seule et on peut le faire aussi avec la deuxième seule. Pour la première on peut le faire puisque la valeur propre -2 non commandable est stable (satabilisabilité). Pour la deuxième le système est complètement commandable.