CHAPITRE 4

Calcul de la force de précontrainte probable
(Perte de la précontrainte en post-tension)

3.1. Introduction

Les câbles de précontrainte ont des capacités ultimes allant de 200 à 15000 kN et sont initialement tendus à des taux de contrainte relativement élevés, soit 60% à 80% de leurs résistances à la traction. La force de précontrainte correspondante qui agit dans l´élément de béton peut être sensiblement inferieure à la force initiale $\mathbf{p_i}$ appliquée par les vérins. Cette différence provient des pertes de **tension instantanées et différées** dans le câble, dont **les causes sont**:

- Le frottement des armatures dans leurs gaines
- Le glissement au blocage des armatures (Certains types d´ancrages)
- La relaxation de l´acier de précontrainte
- le retrait du béton
- le fluage du béton

Les pertes instantanées: qui se produisent dans un temps relativement cour au moment de la mise en tension et de la mise en précontrainte, et qui résultent de la technologie ou des propriétés des matériaux. Elles sont aussi appelées aussi **pertes à la mis en œuvre.**

Les pertes différées: qui se produisent pendant un temps plus ou moins long après que la structure ait été précontrainte et qui proviennent de l´évolution dans le temps des caractères des matériaux lorsqu´ils sont soumis à des actions permanentes.

Pour des ouvrages importants tels que les ponts, il est indispensable de déterminer les forces de précontrainte effectives aussi précisément que possible, puisqu´elles influencent sensiblement le comportement structural à l´état de service.

Pour **les avant-projets** ou des **éléments structuraux de moindre envergure**, on admet généralement la valeur estimative de la précontrainte au temps infini.

$$\mathbf{P \text{ à l´infini} = 0{,}85\ P_{initial}}$$

La tension initiale dans les armatures de précontrainte mesurée au vérin σ_{p0} (connu avec certitude) ne correspond pas à la tension réelle dans une section donnée (x) et à une durée (t) donné.

$\sigma_p(x, t) = \sigma_{p0}$ - Pertes:

Valeur maximal de σ_{p0} (tension initiale à l´origine)

$$\boldsymbol{\sigma_{p0}} = \textbf{minimum de } (0{,}8\ f_{prg},\ 0{,}9\ f_{peg})$$

Le calcul des pertes de tension est nécessaire pour l´une ou l´autre des raisons suivantes:

- Soit pour déterminer la tension résiduelle à une section quelconque, i.e. la tension permanente disponible à cette section après toutes les pertes, étant donné une tension initiale à l´extrémité active (tension initiale fixée à priori)

- Soit pour déterminer la tension initiale à appliquer à l´extrémité active (aussi appelée section du verinage) étant donné une tension permanente à une section quelconque (tension permanente fixée à priori)

3.2. Pertes de tension à la mise en tension des câbles et au moment de l´ancrage (pertes instantanées)

Nous les examinerons dans l'ordre où technologiquement elles se produisent.

3.2.1. Perte par frottement

Lorsque le câble est mis en tension à l´origine, son déplacement à l´intérieur de la gaine va être gêné par les effets de frottements.
Ces derniers peuvent être dus à la **courbure de la gaine** ou **suite aux ondulations parasites**, sachant qu´elle ne peut vraiment être rectiligne lors du montage ou du coulage du béton.

a. effet de la courbure de la gaine

Considérons un tronçon AB de câble de rayon r et d´ouverture angulaire $d\alpha$. Sa longueur est r. $d\alpha$. Appliquons une force P à chaque extrémité (voir fig.). Le câble exerce sur le béton une force centripète égale à 2. p. sin $(d\alpha/2)$; $d\alpha$ étant petit, 2 sin $(d\alpha/2) = d\alpha$

Donc à 2. p. sin $(d\alpha/2)$ = p. $d\alpha$

Cette force répartie le long de AB a une densité p.$d\alpha$ / r. $d\alpha$ = P / r. Elle est appelée poussée sur le vide du câble. Le béton exerce une force égale et opposée.

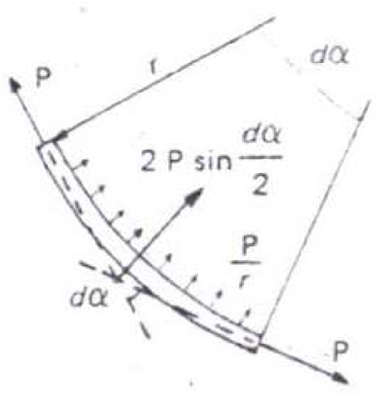


Fig. Effet de la courbure d´un câble

b. Frottement

Considérons le même tronçon de câble AB mis en tension en A avec une force P. Le câble tend à s´allonger mais cet allongement est freiné par le frottement sur la gaine. Soit f le coefficient de frottement (supposé uniforme et constant quelque soit P). Le béton exerce sur le câble une force centrifuge P/r et une réaction tangente f.P / r (voir figure ci -dessous.)

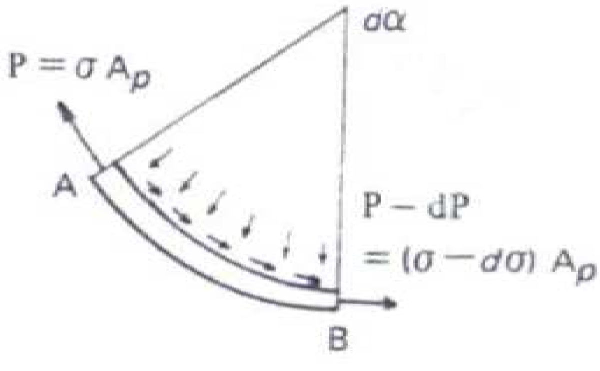


Fig. Frottement en courbe

En B la force dans le câble a diminué de $dp = f \cdot P/r \cdot r\, d\alpha$

soit $dp = f \cdot P \cdot d\alpha$. De même la contrainte a diminué de $d\sigma = f\, \sigma\, d\alpha$.

La solution de $d\sigma - f\, \sigma\, d\alpha = 0$

$$\boldsymbol{\sigma = \sigma\, e^{-f\, d\alpha}}$$

c. Déviations parasites

Le tracé théorique d´un câble ne peut pas être parfaitement réalisé (la gaine est soutenue ponctuellement). Le tracé réel présente toujours **des déviations parasites**. On admet que ces déviations sont équivalentes à une ondulation régulière α_d = ¾ de degré par mètre.

On pose $\varphi = f \cdot \alpha_d$, **$\varphi$ est alors le coefficient de la perte au mètre linéaire.**

d. Expression de la tension le long du câble

Pour le tracé de la figure ci-dessous les contraintes en B et M sont donc respectivement:

$\sigma_B = \sigma_A\, e^{-f\, \alpha - \varphi\, l AB}$

$\sigma_M = \sigma_A\, e^{-f\, \alpha - \varphi l AM}$

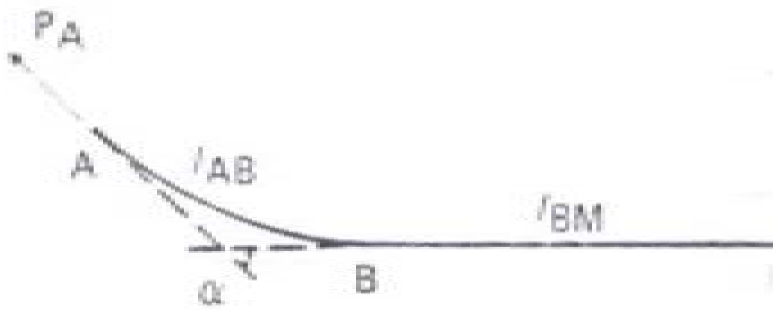


Fig. Tracé d'un câble

La tension en tout point est donnée par l´expression

$$\boldsymbol{\sigma_{p0}(x) = \sigma_{p0}\, e^{-f\, \alpha(x) - \varphi x}}$$

$\alpha(x)$ somme vectorielle des déviations verticales et horizontales comptées en valeurs absolue entre l´origine et la section étudiée,

f: coefficient de frottement en courbe (en rd^{-1})

x: longueur du câble entre l´origine et la section étudiée,

φ: Coefficient de frottement par unité de longueur (en m^{-1})

σ_{p0}: tension à l´ancrage (x = 0)

Le BPEL retient cette formule comme loi de variation de la contrainte dans les armatures.

De la formule ci-dessus, il en résulte que si un câble est rectiligne donc **α est nul et $\sigma_{p0}(x) = \sigma_{p0}\, e^{-\varphi x}$**

Donc en ligne droite, par contre, le frottement se conçoit moins bien. Si le câble est parfaitement rectiligne, il n´y a théoriquement pas de frottement; mais pratiquement les câbles droits présentent toujours dans leur tracé des imperfections et des sinuosités plus ou moins importantes (phénomène d´ondulations) entrainant un frottement qu´il serait vain de prétendre calculer avec précision. Ces déviations parasites fonction de la précision d´exécution existent aussi dans les parties courbes.

Valeurs courantes des coefficients f et φ

Les valeurs de f et φ sont fournies par l´exécutant de la précontrainte qui, généralement, effectue des mesures pour déterminer ces valeurs. Dans les situations usuelles, la valeur de f est comprise entre 0,1 et 0,3 et la valeur de φ entre 0,001 et 0,004 m^{-1}. Les valeurs de f et φ dépendent entre autre de la rigidité de la gaine et du soin apporté à l´installation des gaines. Les supports de gaine doivent être solides et bien fixés aux étriers ou aux coffrages pour ne pas se déplacer lors du bétonnage. Pour éviter un fléchissement excessif de la gaine, l´espacement longitudinal entre les supports devrait être de 0,5 à 1,0 m.

Dans le tableau ci-dessus R est le rayon de courbure le plus faible du tracé de la gaine considérée. Il est à noter que la qualité de l'exécution influence notablement la valeur de ces coefficients; une mauvaise exécution peut entrainer leur doublement.

Cas	*Nature des armatures*	*f* $3 \leqslant R \leqslant 6$ (en m)	*f* $R \geqslant 6$ (en m)	φ
I Câbles ne traversant pas des joints ou surfaces de reprise	fils tréfilés ronds et lisses	$\frac{22 - R}{100}$	0,16	0,002
	torons	$\frac{24 - R}{100}$	0,18	
II Câbles traversant de nombreux joints ou reprises de bétonnage	fils tréfilés ronds et lisses	$\frac{24 - R}{100}$	0,18	0,003
	torons	$\frac{26 - R}{100}$	0,20	

Calcul simplifié des pertes par frottement

La formule exponentielle précédente peut se simplifier dans la plus part des cas si l´on remarque que le développement en série de e^x est:

$$1 + x + x^2/2! + x^3/3! + ...$$

Si la valeur de l´exposant x est faible (ce qui est le cas dans la formule ci-dessus ou l´exposant de e est en général inferieur à 0,2, les termes $x^2/2! + x^3/3!+....$ deviennent négligeables.

On peut alors négliger ces termes et admettre que $e^x = 1+x$; on peut alors écrire:

$$\boldsymbol{\sigma_{p0}(x) = \sigma_{p0}\,(1- f\,\alpha(x) - \varphi x)}$$

3.2.2. Perte par recul d´ancrage

Lors du blocage de l´ancrage après la mise en tension des câbles de précontrainte un certain recul est nécessaire pour le blocage définitif. Ce recul va provoquer une certaine perte de tension définie comme étant la perte par recul d´ancrage.

L´importance de ce recul dépend généralement du procédé de serrage du câble il est donné par la fiche d´agrément des ancrages et varie de **1 à 12 mm**.

Ce glissement du câble à l´intérieur de la gaine est gêné par l´effet de frottement qui sera de même nature que celui mis en jeu lors de **la mise en tension** du câble **mais de sens contraire**. Cette perte de tension selon l´intensité du frottement et du recul peut **ne concerner qu´une partie du câble.**

En prenant compte la variation parasite le long du câble on aura:

$$\sigma'_{p0}(x) = \sigma'_{p0}\, e^{f\,\alpha(x) + \varphi x}$$

$$\sigma'_{p0}(x) = \sigma'_{p0}\,(1 + f\,\alpha(x) + \varphi x)$$

Les pentes des fonctions précontraintes **avant et après blocage des ancrages** sont de signe contraire, ce qui permet de remarquer qu´il y´a une symétrie par rapport à un axe horizontal passant par la moyenne des contraintes à la mise en tension et après pertes dues au recul d´ancrage.

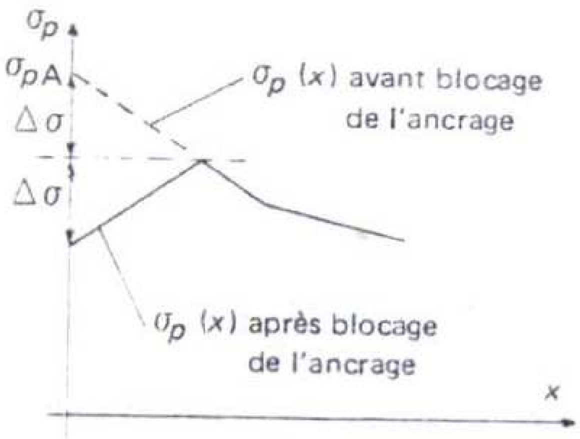


Fig. Effet du blocage de l'ancrage

Ceci veut dire que le diagramme des tensions après rentrée d´ancrage est symétrique entre ces points de celui que l´on avait avant blocage de l´ancrage (figure ci-dessus)**.**

Ceci nous donne la direction de la droite, il suffit alors de déterminer un point de passage pour avoir défini la droite.

Soit C le point jusqu'ou se fait sentir cette entrée d'ancrage. Considérons un élément de câble de longueur dx, il subi une variation de contrainte $\delta\ \sigma p(x)$, donc un raccourcissement δ dx. La contrainte appliquée étant dans le domaine élastique du câble on peut ecrire:

$$\delta\, dx / dx = \delta\, \sigma p(x) / Ep$$

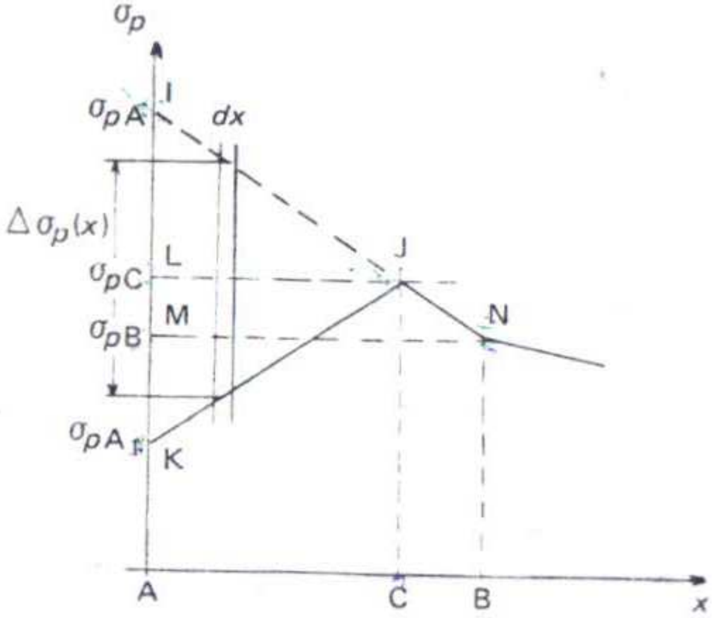
Le raccourcissement total entre A et C est intégrale de δ dx (entre A et C) = intégrale ($\delta\ \sigma p(x)$ / Ep) dx (entre A et C)

Or ce raccourcissement du câble doit être égal à la rentrée d'ancrage en A, valeur qui est connu expérimentalement et qui est un des paramètre du système d'ancrage. Cette valeur est notée conventionnellement g donc:

$$\mathbf{g = 1/E_p \times \text{intégrale (de A à C)}\ \delta\ \sigma_p(x)\ dx}$$

Sur la figure ci dessous, on voit que la valeur de cette intégrale est égale à la surface du triangle IJK

$$\mathbf{g\ E_p = \text{aire du triangle IJK} = (\sigma_{pA} - \sigma_{pA1}) \times d\ /2}$$



3.3. Perte due à la déformation instantanée du béton

Lorsque une poutre présente plusieurs câbles à la mise en tension, les câbles sont tendus l´un après l´autre. A chaque mise en tension d´un câble, il en résulte un raccourcissement du béton, c´est à dire une chute de tension dans les câbles tendus précédemment.

Ainsi on peut démontrer:

$$\mathbf{\Delta\sigma_{pi}(x) = E_p\ (n - 1 / 2n) * \sigma_b(x) / E_{bi}}$$

n: nombre de câble
σ_x: contrainte normale de compression du béton sous l´action des actions de longue durée
E_{bi}: module instantané du béton au jour j
E_p: module de Young des armatures de précontrainte

Le règlement BPEL 83 propose:

$$\mathbf{\Delta\sigma_{pi}(x) = 1/2E_p * \sigma_b(x) / E_{bi}}$$

3.4. Perte de tension instantanée totale

Les pertes traitées précédemment se produisent à l´instant de mise en tension des armatures actives. Elles sont cumulables et définies dans le repère espace par:

$$\mathbf{\Delta\sigma_i = \Delta\sigma_p\ \text{(frottement)} + \Delta\sigma_p\ \text{(glissement)} + \Delta\sigma_p\ \text{(déformation instantanée du béton)}}$$

$\boldsymbol{\sigma_{po}}$**:** Tension initiale

$\boldsymbol{\sigma_{pi}(x) = \sigma_{po} - \Delta\sigma_i}$

5.5. Perte différées

Elles résultent des déformations o des contraintes appliquées aux matériaux constitutifs qui ont été examinées.

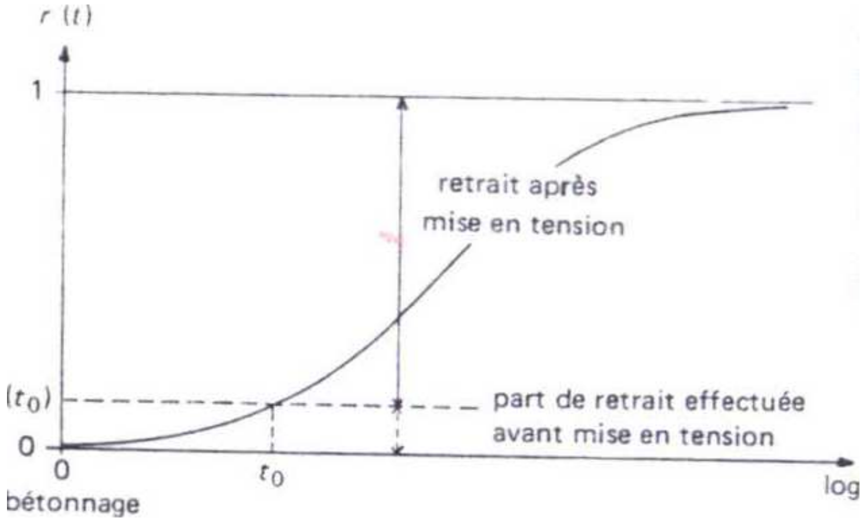
3.5.1. Pertes dues au retrait

C´est un phénomène physique du essentiellement à l´évaporation de l´eau en excès. On peut considérer par simplification que le retrait final ξ_r ne dépend que des conditions climatique.

Le retrait se développe dès le durcissement du béton alors que les câbles ne sont tendus que lorsque celui-ci a obtenu la résistance nécessaire. Donc les câbles ancrés sur le béton, ne subissent que la part de raccourcissement dû au retrait effectué après leur mise en tension.

Connaissant le raccourcissement total ξ_r et sa loi d´évolution r(t) et connaissant l´âge t_0 du béton à la mise en tension on peut déterminer le raccourcissement dû à cette part de retrait qui est

$$(\Delta l/l)_{b\,(t0,\,\infty)} = \xi_r\,[1 - r(t_0)]$$ **(voir fig. ci-dessous)**



Le raccourcissement des câbles est égal; on a donc: $Al/l = \xi_r\,[1-r(t_0)]$

Les câbles étant dans leur domaine élastique: $(Al/l)_p = \Delta\sigma_r / E_p$

Avec $\Delta\sigma_r$ = variation de tension dans les câbles due à ce raccourcissement; donc la perte totale par retrait s´exprime par

$$\Delta\sigma_r = \xi_r\,[1 - r(t_0)] * E_p$$

$\xi_r(t) = \xi_r * r(t)$, ou la fonction d´évolution r(t) varie entre 0 et 1 respectivement au temps t = 0 et au temps t = infini.

C´est l´expression retenue par le BPEL

Pour calculer la perte à un temps t l´expression devient:

$$\Delta\sigma_r(t) = \xi_r\,[r(t) - r(t_0)] * E_p$$

$$r(t) = t / t + 9r_m$$

Où:
r_m : est le rayon moyen de la section (= rapport de la section transversale à son périmètre) exprimé en mètre, il indique le chemin moyen parcouru par l´eau durant son évaporation, ce qui conditionne l´évolution du retrait dans le temps t.

$\Delta\sigma_r$: Perte due au retrait
ξ_r: Retrait final
t_0: Age du béton

3.5.2. Pertes dues au Fluage

Le fluage a été défini comme étant l´augmentation de déformation du béton sous des contraintes de compression permanente. Ce type de déformation conduit à un raccourcissement de l´élément impliquant une perte de tension dans l´armature active croissante dans le temps proportionnelle à la déformation de fluage.

La déformation de fluage est environ égale à deux fois celle instantanée, ce qui se traduit par une perte de précontrainte finale de:

$$\boldsymbol{\Delta\sigma_f = E_p * \xi_f = 2 * \sigma_b * E_p / E_i}$$

Ou σ_b représente la contrainte moyenne de compression permanente au niveau du centre de gravité des aciers actifs.

En réalité et dans de cas d´ouvrages construit en plusieurs phases, cette contrainte permanente change d´une phase à l´autre, ce qui compliquerait d´autant plus les calculs.

Par simplification les règles BPEL 91 proposent de déterminer cette perte en considérant la moyenne entre la contrainte maximale atteinte durant la réalisation de l´ouvrage, et celle finale.

$$\boldsymbol{\Delta\sigma_f = 2\ E_p / E_{ij} * (\sigma_b + \sigma_M) / 2 = (E_p / E_{ij})\ (\sigma_b + \sigma_M)}$$

σ_b : contrainte permanente finale dans le béton au niveau du câble moyen
σ_M : Contrainte permanente maximale dans le béton au niveau du câble moyen
J: âge du béton à la mise en précontrainte.

3.5.3. Perte par relaxation

La relaxation peut être définie comme étant le relâchement de tension dans les armatures de précontrainte à longueur constante. C´est un phénomène qui dépend de la température, du temps et de la contrainte dans les aciers.

La loi d´évolution de la relaxation dans le temps est assez compliqué, on prendra en considération celle stabilisée.

Elle est définie par

$$\boldsymbol{\Delta\sigma_p = 0{,}06 * \rho_{1000}\ (\mu - \mu_0) * \sigma_{pi}}$$

$$\boldsymbol{\mu = \sigma_{pi} * f_{prg}}$$

$\boldsymbol{\sigma_{pi}}$ désigne la contrainte après pertes instantanées
$\boldsymbol{\mu_0}$ Coefficient qui tient compte du taux en delà duquel il n´y´a pas de relaxation, il est égale à :

0,43 pour les aciers de très bonne relaxation
0,30 pour les aciers de relaxation normale

0,35 pour les autres cas

3.5.4. Perte différée totale

Les pertes différées sont aussi cumulables, dans la détermination de la perte différée total. D´après la définition de la relaxation on peut remarquer que le fluage ainsi que le retrait vont atténuer cette perte de tension suite à la diminution de longueur de l´élément.
Cette influence est prise en compte forfaitement en minorant par 5/6 la valeur de la relaxation finale de l´acier, la perte différée totale sera: y

$$\Delta\sigma_{d} = \Delta\sigma_{r} + \Delta\sigma_{fl} + \Delta\sigma_{\rho} * 5/6$$