

CHAPITRE 4

Resistance des poutres isostatiques en BP en flexion Post Tension (Absence de Fissuration Classe I)

4.1. Généralités

Comme vis-à-vis de toute sollicitation, il y a lieu de procéder, en ce qui concerne les sollicitations normales, à deux catégories de justifications :

- aux ELU pour s'assurer de la résistance de la structure;
- aux ELS pour vérifier le respect des conditions d'exploitation et de durabilité.

—
Alors qu'aux ELS on se limite au domaine de fonctionnement élastique des matériaux, on admet, aux ELU, la plastification des sections.

Dans le présent paragraphe, nous nous bornerons à l'étude vis-à-vis des ELS.

Les matériaux étant alors censés se comporter élastiquement, le principe des justifications est extrêmement simple : il suffit de calculer les contraintes qui apparaissent dans les sections sous l'effet des sollicitations de calcul et de vérifier qu'elles ne dépassent pas les contraintes limites réglementaires.

Tant que les contraintes de traction dans le béton restent modérées (ce que nous supposons ici), le calcul s'effectue à partir des caractéristiques des **sections non fissurées**:

- sections nettes en ce qui concerne les contraintes développées par les charges permanentes et par la précontrainte;
- sections homogénéisées pour les contraintes dues aux charges variables.

Les **sections nettes** s'obtiennent en soustrayant des *sections brutes* les vides tels que trous, encoches et conduits ménagés pour le passage ou l'ancrage des armatures de précontrainte.

Les **sections homogénéisées** se déduisent des sections nettes, précédemment définies, en leur ajoutant la section des armatures de précontrainte multipliée par le coefficient d'équivalence instantané

$$\eta = E_p/E_i.$$

L'introduction de ces section homogénéisées permet de prendre en compte les variations de tensions qui affectent les armatures de précontrainte lorsque les charges variables sont appliquées à la structure.

En pratique, les caractéristiques des sections **brutes**, **nettes** et **homogénéisées** sont souvent très voisines et l'on peut les confondre **au stade du pré dimensionnement**. C'est ce que nous ferons dans ce qui suit.

4.2 Notations

Considérons une poutre de fibre moyenne G_x (supposée horizontale) et de plan moyen G_{xy} , fléchiée et précontrainte dans ce plan.

G_y (axe vertical de symétrie de la section droite) et

G_z sont les axes principaux d'inertie de la section (**figure 1**).

4.2.1 Section droite

Nous désignons par :

B son aire ;
 v et v' les distances de son centre de gravité aux fibres extrêmes ($v + v' = h$) ;
 I son moment d'inertie par rapport à Gz ;
 I/v et I/v' ses modules d'inertie;
 $\rho = I/B v v'$ son rendement géométrique.

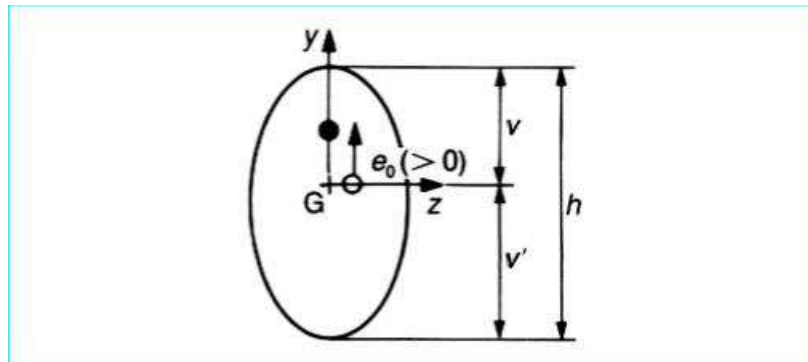


Figure 1. Caractéristiques d'une section droite

4.2.2 Sollicitations appliquées à la section

4.2.2.1 Sollicitations développées par les actions extérieures

Les actions extérieures (autres que la précontrainte) développent dans la section un moment fléchissant M , compté algébriquement positif s'il **comprime la fibre supérieure**.

M est la somme de :

M_g moment de poids propre;
 M'_g moment dû aux charges permanentes additionnelles;
 M_q moment généré par les actions variables de toutes natures.

Selon le cas de charge considéré, M varie entre :

- une valeur minimale : $M_{\min} = M_m = M_g + M'_g + M_{mq}$;
- et une valeur maximale : $M_{\max} = M_M = M_g + M'_g + M_{Mq}$.

Posons : $\Delta M = M_M - M_m = M_{Mq} - M_{mq}$; Cette quantité est toujours positive ou nulle.

4.2.2.2 Sollicitations développées par la précontrainte

La précontrainte est exercée par le câble tendu à P et excentré de e_0 par rapport à G . e_0 est compté algébriquement sur l'axe Gy .

Il est donc positif lorsque le câble est au-dessus du centre de gravité.

Les sollicitations normales développées par la précontrainte sont alors:

$$\begin{aligned}
 N_p &= P \cos \alpha = P \\
 M_p &= P e_0 \cos \alpha = P e_0
 \end{aligned}$$

S'il y'a, en réalité plusieurs câbles distincts (tendus à P_i et excentrés de e_{0i} , le câble représente le câble unique fictif qui exercerait le même effort résultant ($p = \sum P_i$; $P e_0 = \sum P_i e_{0i}$).

4.2.3 Contraintes normales dans le béton

Toutes les contraintes et contraintes limites définies ci-après sont comptées algébriquement positives s'il s'agit de compressions.

Sous un cas de charge donné, elles varient linéairement avec y entre σ sur la fibre supérieure et σ' sur la fibre inférieure (**figure 2**).

Elles sont notées :

σ_1 et σ'_1 lorsque le moment extérieur est M_m ;

σ_2 et σ'_2 lorsque le moment extérieur est M_M .

Compte tenu des conventions adoptées pour le signe des moments :

$$\begin{aligned}\sigma_2 &\geq \sigma_1 \\ \sigma'_2 &\leq \sigma'_1\end{aligned}$$

Le problème du dimensionnement consiste généralement à faire en sorte que les contraintes sur les fibres extrêmes respectent des **contraintes limites**:

- $\sigma_{1(\text{barre})}$ et $\sigma'_{1(\text{barre})}$ pour celles qui interviennent lorsque le moment appliqué est M_m ;
- $\sigma_{2(\text{barre})}$ et $\sigma'_{2(\text{barre})}$ pour celles qui interviennent lorsque le moment appliqué est M_M ;
- $\sigma_{1(\text{barre})}$ et $\sigma'_{2(\text{barre})}$ au-dessous desquelles on ne doit pas descendre sont en pratique assez voisines de 0 et dites **contraintes limites de traction**;
- $\sigma_{2(\text{barre})}$ et $\sigma'_{1(\text{barre})}$ sont, au contraire, des **contraintes limites de compression** qu'il s'agit de ne pas dépasser.

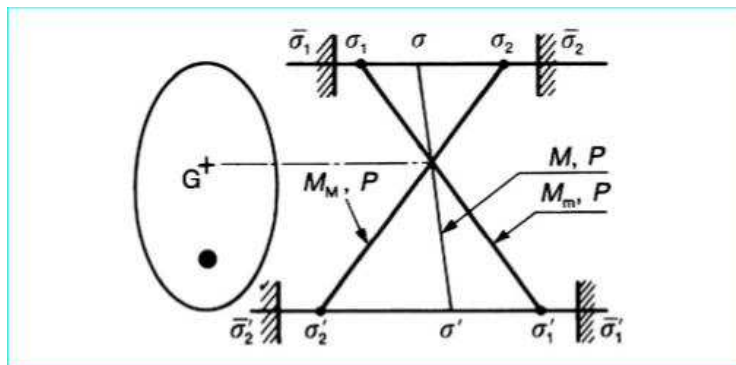


Figure 2: Contraintes et contraintes limites dans une section

4.3 Centre et ligne de pression

En un cas de charge réel quelconque, une section est soumise aux sollicitations suivantes :

- un effort normal $n = P$ dû à la seule précontrainte;
- un moment fléchissant $m = Pe_0 + M$ somme du moment de précontrainte Pe_0 et du moment fléchissant extérieur M .

Cela équivaut à l'effet d'une force normale de compression P , appliquée en un point de G_y appelé **centre de pression** et d'ordonnée :

$$e = \frac{m}{n} = e_0 + \frac{M}{P}$$

Le lieu de ces points lorsque la section décrit la poutre est la **ligne de pression**.

Si l'on suppose que, partout, $M = 0$, ce qui revient à ne considérer que l'effet de la précontrainte sur la poutre, la ligne de pression est dite **ligne de précontrainte** et se confond (pour une poutre isostatique) avec le tracé du câble ($e = e_0$).

— L'effet d'un moment fléchissant extérieur M est donc de déplacer le centre de pression sur G_y , à partir du câble, de la quantité algébrique $\frac{M}{P}$ (**figure 3**).

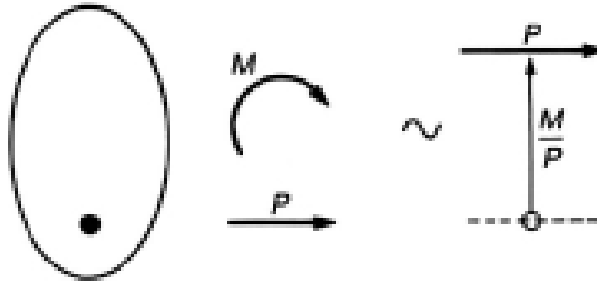


Figure 3. Centre de pression

Cette opération lui permet de compenser la charge permanente, c'est-à-dire d'annuler son effet. Autrement dit, la charge permanente ne coûte rien, ni en acier, ni en béton, ce qui montre bien le caractère actif de la précontrainte.

Cette faculté de compensation des charges permanentes a néanmoins ses limites : les effets desdites charges doivent être suffisamment faibles pour que la variation d'excentricité à donner au câble ne fasse pas sortir ce dernier hors du béton ou ne l'y laisse pas trop mal enrobé.

Il faut donc : $-(v' - d') \leq e_0 \leq (v - d)$ (1)

avec d et d' distances minimales entre le barycentre des câbles réels et les fibres extrêmes, supérieure et inférieure.

d et d' dépendent :

- du nombre de câbles nécessaire pour réaliser la force de précontrainte P ;
- des règles de groupement et d'enrobage imposées aux câbles.

À cet égard, pour les unités de précontrainte les plus courantes (de force utile, toutes pertes faites, comprise entre 0,6 MN et 3 MN) logées dans des conduits de diamètre \emptyset compris entre 5 cm et 10 cm, on admet :

- des groupements en paquets de deux dans le sens vertical ;
- des distances libres entre paquets ou conduits isolés au moins égales à \emptyset tant verticalement qu'horizontalement ;
- des enrobages au moins égaux à \emptyset .

La **figure 4** donne, pour quelques configurations, des valeurs de d et d' .

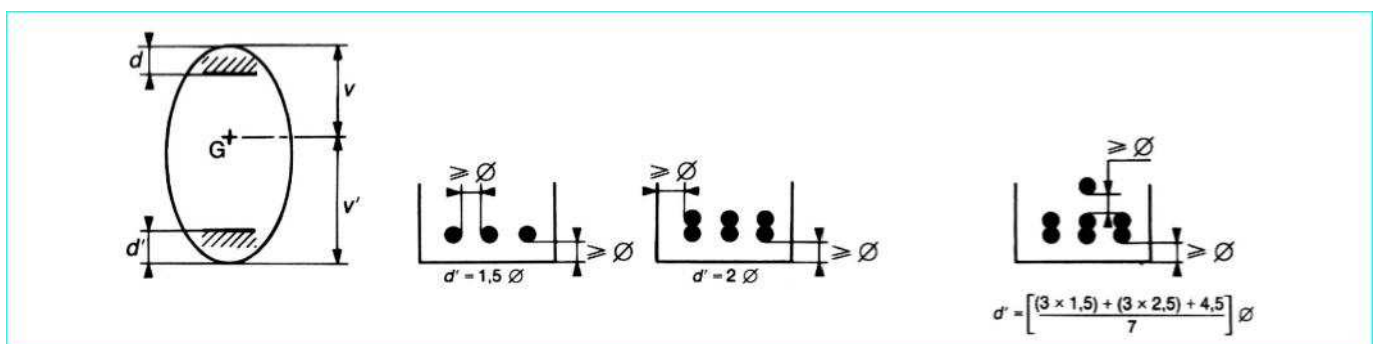


Figure 4. Définition de d et d'

4.4. Contraintes normales du béton

4.4.1. Expression générale

A l'ordonnée y s'exerce la contrainte normale:

$$\sigma(y) = \frac{P}{B} + (Pe_0 + M) \frac{y}{I} = \frac{P}{B} + Pe \frac{y}{I} = \frac{P}{B} \left(1 + \frac{ey}{\rho v v'} \right) \quad (2)$$

Au niveau de G(y = 0), quelque soit le cas de charge appliqué on a:

$$\sigma_G = \frac{P}{B}$$

Le fait que tout diagramme de contrainte (σ , σ') passe par $\sigma_G = \frac{P}{B}$ s'exprime par:

$$\sigma_G = \frac{P}{B} = \frac{\sigma v' + \sigma' v}{h} \quad (3)$$

4.4.2 Respect des contraintes

Compte tenu de l'expression (2) des contraintes, il s'exprime, dans une section droite, par les conditions suivantes:

- sur la fibre supérieure (y = +v):

$$\bar{\sigma}_1 \leq \frac{P}{B} \left(1 + \frac{e}{\rho v'} \right) \leq \bar{\sigma}_2 \quad (4)$$

- sur la fibre inférieure (y = -v'):

$$\bar{\sigma}'_2 \leq \frac{P}{B} \left(1 - \frac{e}{\rho v} \right) \leq \bar{\sigma}'_1 \quad (5)$$

Les relations 4 et 5 peuvent se mettre sous la forme:

$$-c' = -\rho v' \left(1 - \frac{B \bar{\sigma}_1}{P} \right) \leq e \leq \rho v' \left(\frac{B \bar{\sigma}_2}{P} - 1 \right) = +\gamma \quad (6)$$

$$-\gamma' = -\rho v \left(\frac{B \bar{\sigma}'_1}{P} - 1 \right) \leq e \leq \rho v \left(1 - \frac{B \bar{\sigma}'_2}{P} \right) = +c \quad (7)$$

Le segment $[-c', +c]$ de G_y (**figure 4**) est le noyau limite de traction (car c et c' sont définis à partir des **contraintes limites de traction** $\sigma'_{2(\text{barre})}$ et $\sigma_{1(\text{barre})}$).

De même, le segment $[-\gamma', +\gamma]$ de G_y est le **noyau limite de compression**.

les doubles inégalités (6) et (7) expriment que le centre de pression doit appartenir à l'intersection $[-\tau', +\tau]$ de des deux segments:

$$[-\tau', +\tau] = [-c', +c] \cap [-\gamma', +\gamma]$$

ces différents noyaux engendrent, lorsque la section décrit la poutre, des fuseaux limites de traction, de compression, au sens strict (intersection des deux précédents). En tout cas de charge **la ligne de pression doit demeurer à l'intérieur du fuseau limite au sens strict**.

$$-\tau' \leq e \leq +\tau \quad (8)$$

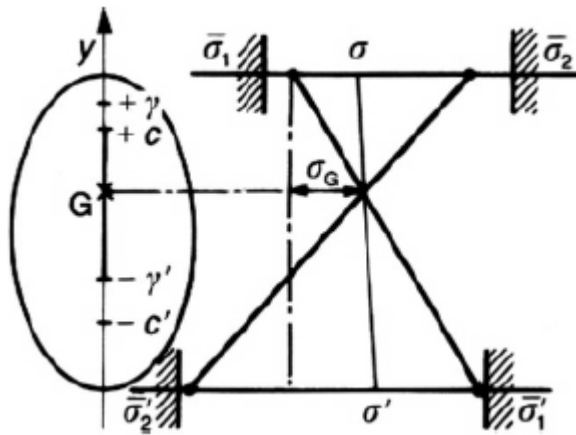


Figure 4 . Contraintes et noyau limites

Dans une section donnée, l'excentricité du centre de pression vaut $e = \frac{m}{n} = e_0 + \frac{M}{P}$, M étant susceptible de varier, selon le cas de charge, entre M_m et M_M . On doit avoir:

$$\begin{aligned} -\Gamma' &\leq e_0 + \frac{M_m}{P} \leq e \leq e_0 + \frac{M_M}{P} \leq +\Gamma \\ -\Gamma' - \frac{M_m}{P} &\leq e_0 \leq \Gamma - \frac{M_M}{P} \end{aligned} \quad (9)$$

Le segment $[-\tau' - M_m/P, +\tau - M_M/P]$ de Gy est le noyau de passage au sens strict,

intersection du noyau de passage de traction $[-c - M_m/P, +c - M_M/P]$ et du noyau de compression $[-\gamma' - M_m/P, +\gamma - M_M/P]$.

Ces différents noyaux de passage définissent, pour l'ensemble de la poutre, des fuseaux de passage de compression, de traction au sens strict.

L'équation (9) exprime que, pour que les contraintes limite soient respectées partout et sous tout cas de charge, il faut que le câble soit à l'intérieur du fuseau de passage au sens strict.

Dans la pratique, le concept de noyau ou (fuseau) au sens strict est lourd à manier. Au niveau du pré dimensionnement, seule est facilement exploitable la notion de noyau (Fuseau) de traction qui permet de définir la précontrainte P et son excentricité e_0 .

Le noyau (ou fuseau) de compression conditionne pour sa part, les caractéristiques à donner aux sections droites (I/v , I/v'), mais pour effectuer leur dimensionnement, il est beaucoup plus simple d'écrire directement, dans les zones déterminantes, le respect des contraintes limites de compression $\sigma_{2(\text{barre})}$ et $\sigma'_{1(\text{barre})}$. C'est pourquoi, dans ce qui suit, nous ne conserverons que la notion de noyau (ou fuseau) de traction).

4.5. Valeur minimale de la précontrainte dans une section

Nous supposons ici que la géométrie de la section est donnée et que ses modules d'inertie (I/v et I/v') sont suffisants, voire surabondante, de telle sorte qu'aucun problème ne se pose du côté des compressions.

Il s'agit simplement, dans ces conditions, de satisfaire à:

$$e_2 = c' - \frac{M_m}{P} \leq e_0 \leq c - \frac{M_M}{P} = e_1 \quad (10)$$

Pour que la double inégalité (10) soit possible, il faut que $e_2 \leq e_1$, autrement dit, que le fuseau de passage soit ouvert, ce qui vaut encore:

$$P \geq \frac{M_M - M_m}{c + c'} = \frac{\Delta M}{c + c'} \quad (11)$$

La valeur minimale absolue possible pour P est donc:

$$P_1 = \frac{\Delta M}{c + c'} \quad (12)$$

Si l'on adopte $P = P_1$, le fuseau de passage, au niveau de la section considérée, se referme en un point ($e_1 = e_2$) par lequel doit passer obligatoirement le câble ($e_0 = e_1 = e_2$). En d'autres termes, l'excentricité du câble est imposée:

$$e_0 = c - \frac{M_M}{P_1} = -c' - \frac{M_m}{P_1} \quad (13)$$

Il reste à vérifier qu'elle satisfait aux condition pratiques définies par (1). C'est presque toujours le cas lorsque les moments extrêmes sont de signes contraires ($M_M \geq 0, M_m \leq 0$).

La double expression de e_0 donnée par (13) nous montre en effet qu'alors:

$$-c' \leq e_0 \leq c$$

Comme le plus souvent: $c \leq v - d$; $c' \leq v' - d$, la double inégalité (1) est bien respectée.

4.5.1 Section sous-critique

C'est une section où la solution $P = P_1$ est possible du fait que l'excentricité e_0 donnée par **13** satisfait (1).

La double expression **(13)** de l'excentricité nous montre que **(Figure 5)**:

- Le centre de pression est à l'ordonnée $+c$ lorsqu'on applique à la section le moment extérieur M_M , ce qui signifie que, sous cette sollicitation, la contrainte limite de traction $\sigma'_{2(\text{barre})}$ est atteinte sur la fibre inférieure.
 - Le centre de pression est à l'ordonnée $-c'$ lorsqu'on applique à la section le moment extérieur M_m , ce qui signifie que, sous cette sollicitation, la contrainte limite de traction $\sigma_{1(\text{barre})}$ est atteinte sur la fibre supérieure.
- Dans une section sous critique, on atteint donc les contraintes limites de traction sous les deux cas de charge extrême.

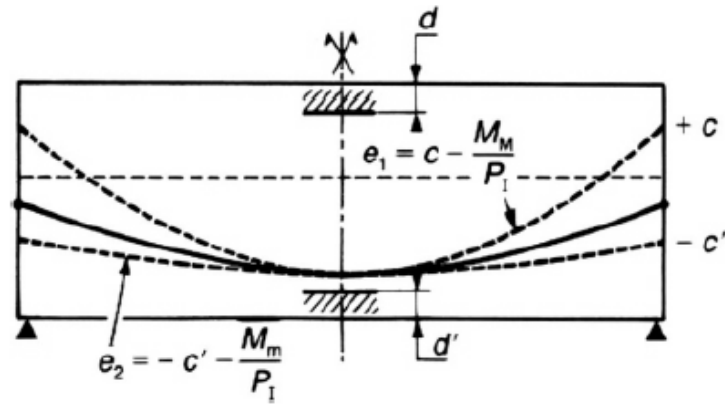


Figure 5. Fuseau de passage dans le cas ou la section la plus sollicitée est sous critique

4.5.2 Section sur-critique soumise à des moments extérieurs positifs (M_m et $M_M \geq 0$)

Supposons les conditions (1) non satisfaites. L'expression:

$$e_0 = -c' - \frac{M_m}{P_I}$$

Montre que $e_0 < 0$ et que c'est donc la valeur plancher: $-(v' - d')$ qui n'est pas respectée par e_0 , ce qui s'écrit encore:

$$e_0 = c - \frac{M_M}{P_I} \leq -(v' - d')$$

ou

$$P_I \leq \frac{M_M}{v' + c - d'} \quad (14)$$

Le fuseau de passage sort de la zone autorisée vers le bas (Figure 6).

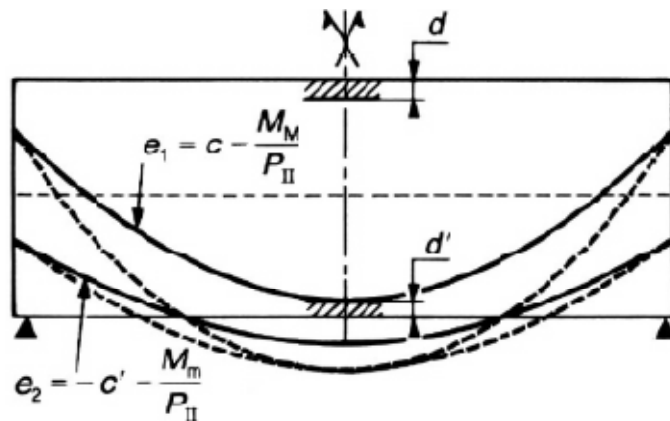


Figure 6: Determination de la precontrainte pour une section sur-critique soumise à des moments positifs

Pour l'y faire remonter, il suffit d'augmenter P . Le fuseau s'ouvre $e_1 > e_2$ pour $P > P_I$ et la valeur P_{II} à retenir est celle qui amène la ligne e_1 à tangenter la ligne d'enrobage minimal, soit:

$$c - \frac{M_M}{P_{II}} = -(v' - d')$$

ou

$$P_{II} = \frac{M_M}{v' + c - d'} \quad (15)$$

La valeur associée de l'excentricité est: $e_0 = - (v' - d')$ (16)

Dans la section considérée, on a:

$$e_2 = -c' - \frac{M_m}{P_{II}} < e_0 = c - \frac{M_M}{P_{II}}$$

Quand agit le moment extérieur M_M , le centre de pression remonte depuis le cable de la quantité M_M/P_{II} et se trouve à l'ordonnée $+c$; on atteint donc la contrainte limite de traction $\sigma'_{2(\text{barre})}$.

Par contre lorsqu'on applique M_m , l'ordonnée du centre de pression $e_0 + M_m/P_{II}$ est supérieure à $-c'$ et la contrainte σ_1 qui apparaît sur la fibre supérieure est plus grande que $\sigma_{1(\text{barre})}$.

Ainsi dans une telle section sur-critique, on ne peut obtenir qu'une contrainte limite de traction: la contrainte limite de traction sur la fibre inférieure (fibre vers laquelle le cable est excentré).

4.5.3 Section sur critique soumise à des moments extérieurs négatifs (M_m et $M_M \leq 0$)

Si cette fois-ci les conditions (1) ne sont pas satisfaites, c'est que le cable associé à P_I sort de la poutre vers le haut (Figure 7). On:

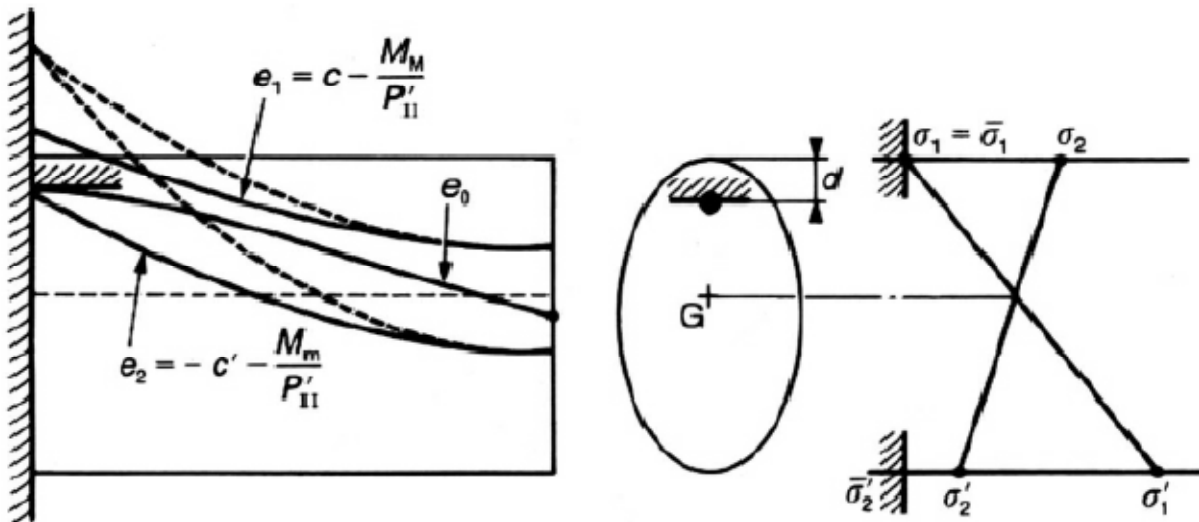


Figure 7: Section sur critique soumise à des moments négatifs. Contrainte limite de traction associée $\sigma_{1(\text{barre})}$

$$e_0 = -c' - \frac{M_m}{P_I} \geq v - d$$

Soit

$$P_I \leq \frac{-M_m}{v + c' - d} \quad (16)$$

On démontre, comme précédemment, qu'il faut augmenter P jusqu'à la valeur:

$$P'_{II} \leq \frac{-M_m}{v + c' - d} \quad (17)$$

Le cable correspondant etant excentré au maximum vers le haut dans la section considerée:

$$e_0 = v - d \quad (18)$$

La seule contrainte limite de traction que l'on atteint, dans ce cas, c'est la contrainte $\sigma_{1(\text{barre})}$ sur la fibre superieure (fibre vers laquelle le cable est excentré) sous l'effet du moment exterieur M_m .

4.5.4 Caractère d'une section

Pour determiner le caractère d'une section, autrement dit pour savoir si elle, est **sous-critique** ou **sur-critique** on peut operer de deux facons differentes.

- On peut calculer P_I par l'équation (12) et l'excentricité associée e_0 par (13).

Si cette excentricité satisfait aux conditions pratiques (1), c'est que la section est sous-critique et l'on prend $P = P_I$. Sinon, elle est sur-critique, et, selon le signe des moments, on adopte soit $P = P_{II}$, soit $P = P'_{II}$, le cable correspondant etant excentré au maximum vers le bas ou vers le haut.

- On calcule P_I puis, soit P_{II} soit P'_{II} selon le signe des moments exterieures appliqués. Comme le montre (14) et (15) d'une part, (17) et (18) d'autre part, la section est sous-critique si P_I est la plus grande de ces forces. Dans le cas contraire, elle est sur-critique.

4.5.5 Expression développée de P

Les formules (12) (15) et (18) ne sont guere pratiques à utiliser du fait que leurs second membres contiennent implicitement P par l'intermédiaire de c et c'.

En effet comme le montre (6) et (7):

$$\left. \begin{aligned} c &= \rho v \left(1 - \frac{B \bar{\sigma}'_2}{P} \right) \\ c' &= \rho v' \left(1 - \frac{B \bar{\sigma}_1}{P} \right) \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Mais il est très facile, dans tous les cas, d'expliciter P.

4.5.5.1 Section sous-critique

En remplaçant dans (12), c et c' par leurs expression (19) on obtient:

$$P = \frac{\Delta M}{c + c'} = \frac{\Delta M}{\rho h - \frac{\rho v B \bar{\sigma}'_2}{P} - \frac{\rho v' B \bar{\sigma}_1}{P}}$$

D'où l'on tire:

$$P = \frac{\Delta M}{\rho h} + \frac{B(v \bar{\sigma}'_2 + v' \bar{\sigma}_1)}{h}$$

Ou encore, puisque:

$$B = \frac{I}{\rho v v'} :$$

$$P = \frac{\Delta M + \frac{I}{v'} \bar{\sigma}'_2 + \frac{I}{v} \bar{\sigma}_1}{\rho h}$$

D'où les trois expressions équivalentes de la force sous-critique ($P = P_I$)

$$P = \frac{\Delta M}{c + c'} \quad (20)$$

$$P = \frac{\Delta M}{\rho h} + \frac{B (v \bar{\sigma}'_2 + v' \bar{\sigma}_1)}{h} \quad (21)$$

$$P = \frac{\Delta M + \frac{I}{v'} \bar{\sigma}'_2 + \frac{I}{v} \bar{\sigma}_1}{\rho h} \quad (22)$$

4.5.5.2 Section sur-critique

En opérant comme précédemment, on obtient:

- Pour une section sur-critique soumise à des moments positifs ($P = P_{II}$):

$$P = \frac{M_M}{v' + c - d'} \quad (23)$$

$$P = \frac{M_M + \frac{I}{v'} \bar{\sigma}'_2}{v' + \rho v - d'} \quad (24)$$

- Pour une section sur-critique soumise à des moments négatifs ($P = P'_{II}$):

$$P = \frac{-M_m}{v + c' - d} \quad (25)$$

$$P = \frac{-M_m + \frac{I}{v} \bar{\sigma}_1}{v + \rho v' - d} \quad (26)$$

4.5.6 Cas particulier

Si l'on suppose $\sigma_{1\text{barre}} = \sigma'_{2\text{barre}} = 0$, les formules (19) donnent:

$$c = \rho v$$

$$c' = \rho v'$$

Le noyau limite se réduit au noyau central (dit tiers central dans le cas d'une section rectangulaire puisque ρ vaut 1/3 pour une telle section).

Alors, dans l'hypothèse sous-critique, P vaut, d'après (20), (21) ou (22):

$$P = P_I = \frac{\Delta M}{\rho h} \quad (27)$$

Si la section est sur-critique, on obtient:

$$P = P_{II} = \frac{M_M}{v' + \rho v' - d'} \quad (28)$$

si les moments sont positifs

$$P = P'_{II} = \frac{-M_m}{v + \rho v' - d} \quad (29)$$

si les moments sont négatifs.

Par comparaison avec les formules (21) (24) et (26), on peut apprécier les économies que l'on fait sur P lorsqu'on tolère des contraintes de traction dans le béton ($\sigma_{1\text{barre}}$ et $\sigma'_{2\text{barre}} < 0$)