MINISTER DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
Centre Universitaire Ahmed ZABANA Relizane

Cours Mathématiques 3, 2 année LMD-Sciences et Techniques avec les fiches TD corrigées

Par: Beddani Abdallah
Djebar Samir
baddanixabd@yahoo.fr

Ce travail pour mes étudiants(e)
Départements - Génie Mécanique
- Génie Electrique
- Génie Civile
- Génie Procédés

2017/2018

Table des matières

1 Intégrales simples et multiples **3**

1.1 Rappels sur l'intégrale de Riemann et sur le calcul de primitives 3

1.1.1 Intégrale de Riemann 3

1.1.2 Sommes de Darboux 5

1.1.3 Propriétés de l'intégrale de Riemann 6

1.2 Calcul de primitives (Intégrale indéfinie) 7

1.2.1 Primitives des fonctions usuelles 8

1.2.2 Intégration par parties – Changement de variable 8

1.3 Intégrale doubles 10

1.3.1 Théorème de Fubini 10

1.3.2 Changement de variable 10

1.3.3 Coordonnées polaires 11

1.4 Intégrales triples 11

1.4.1 Théorème de Fubini 12

1.4.2 Changement de variable 13

1.4.3 Coordonnées cylindriques 13

1.4.4 Coordonnées sphériques 14

1.5 Application au calcul d'aires, de volumes 15

1.5.1 Calcul l'aire 15

1.5.2 Calcul de volume 15

2 Intégrale impropres **16**

2.1 Intégrales impropres de fonctions définies sur un intervalle non borné . . 16

2.1.1 Intégrale impropre de fonctions positives 17

2.2 Intégrales impropres de fonctions définies sur un intervalle borné 18

2.2.1 Intégrale absolument convergente 20

3 Equations différentielles **21**

3.1 Rappel sur les équations différentielles ordinaires 21

3.1.1 Equations différentielles ordinaires d'ordre 1 21

3.1.2 Equations differentièlles de variables séparées 22

3.2 Equation différentielle ordinaires linéaire 23

3.2.1 Equation différentielle linéaire du premier ordre 1 23

3.2.2 Equation de Bernoulli 26

3.2.3 Equations différentièlles linéaires d'ordre 2 (EDL d'ordre2) 26

3.3 Equation aux dérivées partielles 29

3.3.1 Dérivées d'une fonction composées de deux variables 30

3.3.2 Différentielles totales 31

3.3.3 Formes différentielles totales exactes 31

3.3.4 Application à l'intégration d'équation diff de premier ordre 33

3.3.5 Facteur intégrant 35

3.3.6 Détermination de facteur intégrant 36

4 Séries numériques **39**

4.1 Généralités 39

4.1.1 Séries convergentes 39

4.1.2 Reste d'une série convergente 40

Bibliographie **59**

Chapitre 1

Intégrales simples et multiples

1.1 Rappels sur l'intégrale de Riemann et sur le calcul de primitives

Soit f une fonction définie sur $[a,b]$, tel que pour tout $x \in [a,b]$, $f(x) \geq 0$.

1.1.1 Intégrale de Riemann

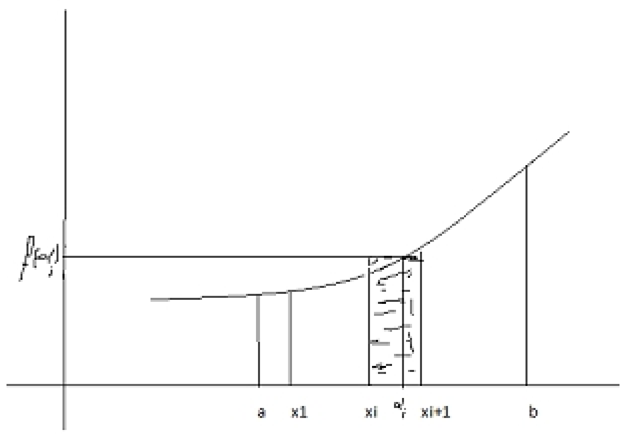
On appelle subdivision $\triangle$ de l'intervalle $[a,b]$ un ensemble fini de $n+1$ réels $\{x_p \in [a,b] \,/ 0 \leq p \leq n\}$, avec $x_0 = a, x_n = b, \forall p, x_p \leq x_{p+1}$.

$\delta(\triangle) = \max\limits_{0 \leq p \leq n-1} (x_{p+1} - x_p)$ s'appelle le "pas" de $\triangle$.

Définition 1.1.1 *On considère une subdivision $\triangle$ sur $[a,b]$ et on choisit $\alpha_i \in [x_i, x_{i+1}[$,on appelle somme de riemann relative a la subdivision $\triangle$ au choix des $\alpha = (\alpha_i)_{0 \leq i \leq n-1}$ la somme:*

$$\mathfrak{R}(f, \triangle, \alpha) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\alpha_i)(x_{i+1} - x_i)$$

Géométriquement



Définition 1.1.2 *On dit la fonction f est intégrable au sens de Riemann si* $\lim\limits_{\delta(\triangle)\to 0} \Re(f, \triangle, \alpha) = I$ *est finie* $\forall \alpha$,

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f$$

Exemple 1.1.3 $\left\{x_i = \frac{i}{n}, i = 0, ..., n\right\}$ *est une subdivision de l'intervalle* $[0,1]$

$f(x) = x$ *sur l'intervalle* $[0,1]$, *on a*

$$(x_{i+1} - x_i) = \frac{1}{n}, \forall i = 0, ..., n$$

la somme

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{i}{n}\left(\frac{i+1}{n} - \frac{i}{n}\right) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i}{n^2} = \frac{n(n-1)}{2n^2},$$

est une somme de Riemann da la fonction $f(x) = x$ *sur l'intervalle* $[0,1]$.

1.1.2 Sommes de Darboux

Définition 1.1.4 *On considère une subdivision* $\triangle$ *sur* $[a,b]$ *et on choisit* $I_i + [x_i, x_{i+1}[$ *,on choisit*

$$\begin{aligned} m_i &= \inf_{x\in[x_i,x_{i+1}[} |f(x)| \\ M_i &= \sup_{x\in[x_i,x_{i+1}[} |f(x)| \end{aligned}$$

Les deux sommes suivantes

$$\begin{aligned} S(f,\triangle) &= \sum_{i=0}^{n-1} M_i (x_{p+1} - x_p) \\ s(f,\triangle) &= \sum_{i=0}^{n-1} m_i (x_{p+1} - x_p) \end{aligned}$$

appelées respectivement sommes de Darboux inférieure et supérieure.

Théorème 1.1.5 *Si* $\lim\limits_{\delta(\triangle)\to+\infty} S(f,\triangle) = \lim\limits_{\delta(\triangle)\to+\infty} s(f,\triangle)$ *alors* f *est intégrable en sens de Riemann.*

Proposition 1.1.6 *Toute fonction continue sur un intervalle* I *est une fonction intégrable en sens de Riemann sur* I*.*

Exemple 1.1.7 $\left\{x_i = \frac{i}{n}, i = 0, ..., n\right\}$ *est une subdivision de l'intervalle* $[0,1]$

$f(x) = x$ *sur l'intervalle* $[0,1]$, *on a*

$$(x_{i+1} - x_i) = \frac{1}{n}, \forall i = 0, ..., n$$

$$\begin{aligned} m_i &= \inf_{x\in[x_i,x_{i+1}[} |f(x)| = \frac{i}{n} \\ M_i &= \sup_{x\in[x_i,x_{i+1}[} |f(x)| = \frac{i+1}{n} \end{aligned}$$

on calcule les deux sommes de Darboux

$$\begin{aligned} S(f,\triangle) &= \sum_{i=0}^{n-1} M_i\left(x_{p+1}-x_p\right) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i+1}{n^2} = \frac{n(n+1)}{2n^2} \\ s(f,\triangle) &= \sum_{i=0}^{n-1} m_i\left(x_{p+1}-x_p\right) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i}{n^2} = \frac{n(n-1)}{2n^2} \end{aligned}$$

On remarque que $\lim\limits_{n\to+\infty} S(f,\triangle) = \lim\limits_{n\to+\infty} s(f,\triangle) = \frac{1}{2}$

donc f est intégrable en sens de Riemann.

1.1.3 Propriétés de l'intégrale de Riemann

Soient f et g deux fonctions, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $a, b, c \in \mathbb{R}\,(a \leq c \leq b)$ on a:

1) Si la fonction f intégrable sur les intervalles $[a, c]$ et $[c, b]$ elle est intégrable sur l'intervalle $[a, b]$ et on a

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x) + \int_c^b f(x)\,dx$$

2) Si la fonction f est intégrable sur l'intervalle $[a, b]$ et $f \geq 0$ alors

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$$

3) Si les fonctions f est intégrable sur l'intervalle $[a, b]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors la fonction λf est intégrable sur l'intervalle $[a, b]$

$$\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx$$

4) Si les fonctions f et g sont intégrables sur l'intervalle $[a, b]$

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x) + \int_a^b g(x)\,dx$$

Soit$f$ une fonction intégrable sur $[a, b]$

Valeur moyenne

On appelle moyen de f dans $[a, b]$ le nombre $m = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\, dx$.

Exemple 1.1.8 *On calcule le moyen des carrés des réels copmris entre 0 et 1.*
$\int\limits_0^1 x^2 dx = \int\limits_0^1 m dx \Longrightarrow m = \frac{1}{3}$

Valeur efficace

On appelle valeur efficace de f dans $[a, b]$ le nombre v tel que $v^2 = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b (f(x))^2\, dx$.

Exemple 1.1.9 *On calcule la valeur efficace de la fonction* $f(x) = \sqrt{x}$ *dans* $[0, 1]$
$\int\limits_0^1 x dx = \int\limits_0^1 v^2 dx \Longrightarrow v = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

1.2 Calcul de primitives (Intégrale indéfinie)

Définition 1.2.1 *Soit f une fonction continue sur I.*

On dit que $F : I \to \mathbb{R}$ est une primitive de f sur I ssi la dérivée de F donne f ($F\prime = f$). On prend alors l'habitude de noter toute primitive de f sous forme

$$F(x) = \int f(x)\, dx$$

et s'appelle aussi intégrale indéfinie de f.

Remarque 1.2.2 *La primitive d'une fonction s'il existe n'a pas unique.*

Exemple 1.2.3 *1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x$. Alors $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $F(x) = \frac{x^2}{2}$ est une primitive de f,*

aussi la fonction définie par $F(x) = \frac{x^2}{2} + 2$ est une primitive de f .

1.2.1 Primitives des fonctions usuelles

La fonction f	La primitive de f définie par: $(k \in \mathbb{R})$	l'intervalle I
$f(x) = c$	$F(x) = cx + k$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R} \diagup \{-1\}$	$F(x) = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + k$	$\mathbb{R} / \{0\}$ si $\alpha \lneqq -1$ $\mathbb{R}$ si $\alpha \gneqq -1$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = In\|x\| + k$	$]-\infty, 0[\, ou\,]0, +\infty[$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x + k$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x + k$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x + k$	$\mathbb{R}$

Proposition 1.2.4 *Soient f et g deux fonctions continues et $\lambda \in \mathbb{R}$ on a:*

$$\int f(x) + g(x)\, dx = \int f(x) + \int g(x)\, dx, \int \lambda f(x)\, dx = \lambda \int f(x)\, dx.$$

1.2.2 Intégration par parties – Changement de variable

Intégration par parties

Théorème 1.2.5 *Soient u et v deux fonctions dérivables. On a*

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$$

Preuve. On a $(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$
alors $\int (u(x)v(x))'\, dx = \int u'(x)v(x)dx + \int u(x)v'(x)dx$
donc

$$u(x)\, v(x) = \int u'(x)v(x)dx + \int u(x)v'(x)dx$$

c'est à dire

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$$

□

Exemple 1.2.6 *calculons* $\int x^2e^x dx$

On a

$$\int x^2e^x dx = x^2e^x - \int 2xe^x dx = \int x^2e^x dx = x^2e^x - 2 \int xe^x dx$$

$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - \ e^x dx$

alors $\int x^2e^x dx = x^2e^x - 2 \int xe^x dx = x^2e^x - 2\ xe^x + 2e^x + c, c \in \mathbb{R}$

Changement de variable

Théorème 1.2.7 *Soient u une fonction dérivable et f une fonction continue avec*

$$F(x) = \int f(x)\, dx$$

On a $\int u' f(u)\, dx = \int f(u)\, du = F(u)$

Exemple 1.2.8 *Calculons la primitive*

$$K(x) = \int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx.$$

on choisit $u(x) = \cos x, f(x) = \frac{1}{x}, u'(x) = -\sin x, F(x) = In\ |x| + c, c \in \mathbb{R}.$

$\int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int u' f(u)\, dx = \int f(u)\, du = F(u) = -\ln|\cos x| + c, c \in \mathbb{R}.$

$$K(x) = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\ln|\cos x| + c, c \in \mathbb{R}.$$

1.3 Intégrale doubles

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un domaine $D \subset \mathbb{R}^2$

L'intégrale sur D de $f : D \to \mathbb{R}$, s'appelle une intégrale double, on la note $\iint_D f = \iint_D f(x,y)dxdy$.

1.3.1 Théorème de Fubini

Théorème 1.3.1 *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction continue.*

1) Cas où $D = [a,b] \times [c,d]$, $a \leq b$ et $c \leq d$, on a:

$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)dy \right] dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)dx \right] dy.$

2)Cas où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; a \leq x \leq b, u(x) \leq y \leq v(x)\}$, où $u, v : [a,b] \to \mathbb{R}$ sont continues, alors:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left[\int_{u(x)}^{v(x)} f(x,y)dy \right] dx$$

Proposition 1.3.2 *Si $f(x,y) = g(x)h(y)$ avec $D = [a,b] \times [c,d]$, $a \leq b$ et $c \leq d$, on a:*

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \left[\int_a^b g(x)\,dx \right] \times \left[\int_c^d h(y)dy \right].$$

Exemple 1.3.3 *On calcule $I = \iint_D (xy)\,dxdy$, où $D = [1,2] \times [3,5]$*

$I = \left[\int_1^2 xdx \right] \times \left[\int_3^5 ydy \right] = \frac{3}{2} \times \frac{16}{2} = 12.$

Exemple 1.3.4 *On calcule $I = \iint_D dxdy$, où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x\}$*

$\iint_D dxdy = \int_0^1 \left[\int_0^{1-x} dy \right] dx = \int_0^1 (1-x)\,dx = \frac{1}{2}$

1.3.2 Changement de variable

Soient$U$ et V deux ouverts de $\mathbb{R}^2$ et

$$\varphi : U \to V$$
$$(u,v) \to (x,y)$$

une application de classe C^1, et $\triangle \subset U$ et $D \subset V$

La matrice jacobien de φ est $j(\varphi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$

$\det(j(\varphi)) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$

Si $\varphi(\triangle) = D$, on obtient:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_\triangle f(\varphi(u,v)) \det(j(\varphi))\, dudv$$

1.3.3 Coordonnées polaires

$\varphi : (r,\theta) \to (x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$

La matrice jacobien de φ est $\frac{D(x,y)}{D(r,\theta)} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$

et $\left|\frac{D(x,y)}{D(r,\theta)}\right| = r$

Si $\varphi(\triangle) = D$, on obtient:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_\triangle f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, |r|\, drd\theta$$

Exemple 1.3.5 *On calcule* $I = \iint_D \dfrac{1}{1+x^2+y^2}dxdy$ *où* $D = \{(x,y)\,/x^2+y^2 \le 1\}$

et $\triangle = \{(r,\theta)\,/0 \le r \le 1$ *et* $0 \le \theta \le 2\pi\}$

$I = \iint_D \dfrac{1}{1+x^2+y^2}dxdy = \iint_\triangle \dfrac{r}{1+r^2}drd\theta = \pi \ln 2$

1.4 Intégrales triples

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un domaine $D \subset \mathbb{R}^3$

L'intégrale sur D de $f : D \to \mathbb{R}$, s'appelle une intégrale double, on la note $\iiint_D f = \iiint_D f(x,y,z)dxdydz$.

1.4.1 Théorème de Fubini

Théorème 1.4.1 *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction continue.*

1) Cas où $D = [a,b] \times [c,d] \times [s,t]$, $a \leq b$, $c \leq d$ et $s \leq t$, on a:
$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_a^b \left[\int\limits_c^d f(x,y)dy\right] dx = \int\limits_a^b \left[\int\limits_c^d \left[\int\limits_s^t f(x,y,z)dz\right] dy\right] dx.$

2)Cas où $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; (x,y) \in \triangle, u(x,y) \leq z \leq v(x,y)\}$, où $u,v : D \to \mathbb{R}$ sont continues, D est un ensemble fermé borné de $\mathbb{R}^2$, alors:

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz = \iint_\triangle \left[\int\limits_{u(x,y)}^{v(x,y)} f(x,y,z)dz\right] dxdy.$$

3)Cas où $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; a \leq z \leq b, (x,y) \in \triangle(z)\}$, où $u,v : D \to \mathbb{R}$ sont continues, $D(z)$ est un ensemble fermé borné de $\mathbb{R}^2, \forall z \in [a,b]$, alors:

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_a^b \left[\iint_{\triangle(z)} f(x,y,z)dxdy\right] dz.$$

Proposition 1.4.2 *Si $f(x,y) = g(x)h(y)k(z)$ avec $D = [a,b] \times [c,d] \times [s,t]$, $a \leq b$, $c \leq d$ et $s \leq t$ on a:*

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz = \left[\int\limits_a^b g(x)\,dx\right] \times \left[\int\limits_c^d h(y)dy\right] \times \left[\int\limits_s^t k(z)dz\right].$$

Exemple 1.4.3 *On calcule $\iiint_D (xyz)\,dxdydz, D = [0,1]^3$*
$\iiint_D (xyz)\,dxdydz = \left[\int\limits_0^1 xdx\right] \times \left[\int\limits_0^1 ydy\right] \times \left[\int\limits_0^1 zdz\right] = \frac{1}{8}.$

Exemple 1.4.4 *On calcule $\iiint_\triangle dxdydz, \triangle = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; (x,y) \in D = [0,1]^2, 0 \leq z \leq x\}$*

$$\begin{aligned}
\iiint_{\triangle} dxdydz &= \iint_{D}\left[\int_{x}^{y} dz\right] dxdy \\
&= \iint_{D} xdxdy \\
&= \left[\int_{0}^{1} xdx\right] \times \left[\int_{0}^{1} dy\right] \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

1.4.2 Changement de variable

Soient$U$ et V deux ouverts de $\mathbb{R}^3$ et

$$\begin{aligned}
\varphi &: U \to V \\
&(u, v, w) \to (x, y, z)
\end{aligned}$$

une application de classe C^1, et $\triangle \subset U$ et $D \subset V$

La matrice jacobien de φ est $j(\varphi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix}$

$\det(j(\varphi)) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$

Si $\varphi(\triangle) = D$, on obtient:

$$\iiint_{D} f(x, y, w)dxdy = \iiint_{\triangle} f(\varphi(u, v, w)) \det(j(\varphi))\, dudvdw$$

1.4.3 Coordonnées cylindriques

$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (r, \theta, z) \to (x, y, z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, z)$

La matrice jacoblien de φ est $j(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \text{-}r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$\det(j(\varphi)) = r$.

Si $\varphi(\triangle) = D$ la formule du changement de variables s'écrit alors:

$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz = \iiint_\triangle f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)) \det(j(\varphi))\, drd\theta dz$

Exemple 1.4.5 $\iiint_D dxdydz, D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3/x^2+y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 2\}$

$\triangle = \{(r,\theta,z)/0 \leq r \leq 1 \ \ et\ 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z \leq 2\}$

$\iiint_D dxdydz = \iiint_\triangle rdrd\theta dz = \left[\int_0^1 rdr\right] \times \left[\int_0^{2\pi} d\theta\right] \times \left[\int_0^2 dz\right] = \frac{1}{2}2\pi 2 = 2\pi$

1.4.4 Coordonnées sphériques

$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (r,\theta,\beta) \to (x,y,z) = (r\cos\theta\cos\beta, r\sin\theta\cos\beta, r\sin\beta)$

La matrice jacoblien de φ est $j(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\beta & \text{-}r\sin\theta\cos\beta & \text{-}r\cos\theta\sin\beta \\ \sin\theta\cos\beta & r\cos\theta\cos\beta & \text{-}r\sin\theta\sin\beta \\ \sin\beta & 0 & r\cos\beta \end{pmatrix}$

$\det(j(\varphi)) = r^2\cos\beta$

La formule du changement de variables s'écrit alors:

$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz = \iiint_\triangle f(r\cos\theta\cos\beta, r\sin\theta\cos\beta, r\sin\beta)\, r^2 |\cos\beta|\, drd\theta d\beta$

Exemple 1.4.6 *On calcule* $\iiint_D dxdydz, D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3/x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$

$\triangle = \left\{(r,\theta,\beta)/0 \leq r \leq 1 \ \ et\ 0 \leq \theta \leq 2\pi, \frac{-\pi}{2} \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}\right\}$

$$\begin{aligned} \iiint_D f(x,y,z)dxdydz &= \iiint_\triangle r^2|\cos\beta|\, drd\theta d\beta \\ &= \left[\int_0^1 r^2dr\right] \times \left[\int_0^{2\pi} d\theta\right] \times \left[\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\beta d\beta\right] \\ &= \frac{4}{3}\pi \end{aligned}$$

1.5 Application au calcul d'aires, de volumes

1.5.1 Calcul l'aire

Soit D un sous ensemble de $\mathbb{R}^2$.

L'intégrale $\iint_D dxdy$ nous donne l'aire du domaine D.

Exemple 1.5.1 *On calcule l'aire délimitée par*

$y + x^2 = 4$ *et* $y = 0$

C"est a dire

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq y \leq 4 - x^2 \text{ } et \text{ } -2 \leq x \leq 2\right\}$$

$$\begin{aligned}
\iint_D dxdy &= \int_{-2}^{2} \left[\int_{0}^{4-x^2} dy\right] dx \\
&= \int_{-2}^{2} \left(4 - x^2\right) dx \\
&= \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{2} \\
&= 32 - \frac{16}{3} = \frac{80}{3}
\end{aligned}$$

1.5.2 Calcul de volume

Soit D un sous enseble de $\mathbb{R}^3$.

L'intégrale $\iiint_D dxdydz$ nous donne le volume du domaine D.

Exemple 1.5.2 *Calculons le volume du cylindrque de rayon a et l'hauteur h*

$\iiint_D dxdydz, D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 \leq a^2, 0 \leq z \leq h\}$

$\triangle = \{(r, \theta, z) / 0 \leq r \leq a \text{ } et \text{ } 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z \leq 2\}$

$\iiint_D dxdydz = \iiint_\triangle rdrd\theta dz = \left[\int_0^a rdr\right] \times \left[\int_0^{2\pi} d\theta\right] \times \left[\int_0^h dz\right] = \frac{a^2}{2} 2\pi h = a^2 \pi h.$

Chapitre 2

Intégrale impropres

2.1 Intégrales impropres de fonctions définies sur un intervalle non borné

Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction intégrable (au sens de Riemann) sur $[a, x]$,pour tout x dans $[a, +\infty[$, On pose

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

Définition 2.1.1 *On dit que f admet une intégrale impropre convergente sur $[a, +\infty[$ si $F(x)$ admet une limite lorsque x tend vers $+\infty$ et on note*

$$\lim_{x \to -\infty} \int_a^x f(t)\, dt = \int_a^{+\infty} f(t)\, dt$$

Dans ce cas, on dit que f est semi-intégrable sur $[a, +\infty[$.

Exemple 2.1.2 *Soit $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction définie par $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$, on a*
$\int_1^x f(t)\, dt = \dfrac{\ln x}{x} + 1 - \dfrac{1}{x}$

c'est à dire $\lim_{x\to+\infty}\int_1^x f(t)\,dt = 1$
donc l'intégrale impropre de f *est convergente sur* $[1,+\infty[$.

Remarque 2.1.3 *Si la fonction* $f :]-\infty,b] \to \mathbb{R}$ *est intégrable(au sens de Riemann) sur* $[x,b]$,*pour tout* x *dans* $]-\infty,b]$, *on dit qu'elle admet une intégrale impropre convergente (ou qu'elle est semi-intégrable) sur* $]-\infty,b]$ *si la fonction* $F(x) = \int_x^b f(t)\,dt$ *admet une limite quand* x *tend vers* $-\infty$ *et on note*

$$\lim_{x\to-\infty}\int_x^b f(t)\,dt = \int_{-\infty}^b f(t)\,dt$$

Remarque 2.1.4 *Pour une fonction définie sur un intervalle ouvert* $]-\infty,+\infty[$ *et intégrable sur tout intervalle* $[x,y], -\infty < x < y < +\infty$, *on dit que son intégrale impropre sur* $]-\infty,+\infty[$ *converge si, pour* $-\infty < c < +\infty$, *ses intégrales impropres sur* $]-\infty,c]$ *et* $[c,+\infty[$ *existent.*

2.1.1 Intégrale impropre de fonctions positives

Proposition 2.1.5 *Soient* f *et* $g : [a,+\infty[\to \mathbb{R}$ *deux fonctions à valeurs positives et intégrables sur tout intervalle borné de la forme* $[a,\beta], \forall\beta \in [a,+\infty[$. *On suppose que* $f \leq g$, *alors*

1) Si l'intégrale impropre de g *est convergente sur* $[a,+\infty[$, *implique que l'intégrale impropre de* f *est convergente et on a*

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,dt \leq \int_a^{+\infty} g(t)\,dt$$

2) Si l'intégrale impropre de f *est divergente sur* $[a,+\infty[$, *implique que l'intégrale impropre de* g *est divergente.*

Corollaire 2.1.6 *Soient f et $g : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ deux fonctions à valeurs positives et intégrables sur tout intervalle borné de la forme $[a, \beta], \forall \beta \in [a, +\infty[$. On suppose qu'il existe deux constantes c_1 et c_2 strictement positives telles que*

$$c_1 f \leq g \leq c_2 f$$

Alors, l'intégrale impropre de f est convergente si et seulement si l'intégrale impropre de g est convergente.

Corollaire 2.1.7 *Soient f et $g : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ deux fonctions à valeurs positives et intégrables sur tout intervalle borné de la forme $[a, \beta], \forall \beta \in [a, +\infty[$. On suppose qu'il existe $c \geq 0$ telle que*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = c$$

Alors, l'intégrale impropre de f sur $[a, +\infty[$ est convergente si et seulement si celle de g est convergente.

Exemple 2.1.8 $f(x) = \frac{1}{t\sqrt{1+t^2}}, g(x) = \frac{1}{t^2}$ *deux fonctiond définies sur $[1, +\infty[$ et*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

comme l'intégrale impropre de g sur $[1, +\infty[$ est convergente alors l'intégrale impropre de f sur $[1, +\infty[$ est convergente.

2.2 Intégrales impropres de fonctions définies sur un intervalle borné

Soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction intégrable (au sens de Riemann) sur $[a, x]$,pour tout x dans $[a, b[$, On pose

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$$

Définition 2.2.1 *On dit que f admet une intégrale impropre convergente sur $[a,b[$ si $F(x)$ admet une limite lorsque x tend vers b et on note*

$$\lim_{x\to b}\int_a^x f(t)\,dt=\int_a^b f(t)\,dt$$

Dans ce cas, on dit que f est semi-intégrable sur $[a,b[$.

Exemple 2.2.2 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{-x}}$ *une fonction définie sur $[-1,0[$, et on remarque que cette fonction est intégrable en sens Riemann sur $[-1,\alpha]$, $\forall\alpha\in[-1,0[$, et $\int_{-1}^x f(t)\,dt=-2\sqrt{-x}+2$ alors $\lim_{x\to 0}\int_{-1}^x f(t)\,dt=2$*

donc f admet une intégrale impropre convergente sur $[-1,0[$.

Remarque 2.2.3 *Si la fonction $f:]a,b]\to\mathbb{R}$ est intégrable(au sens de Riemann) sur $[x,b]$,pour tout x dans $]a,b]$, on dit qu'elle admet une intégrale impropre convergente (ou qu'elle est semi-intégrable) sur $]a,b]$ si la fonction $F(x)=\int_x^b f(t)\,dt$ admet une limite quand x tend vers a et on note*

$$\lim_{x\to a}\int_x^b f(t)\,dt=\int_a^b f(t)\,dt$$

Remarque 2.2.4 *Pour une fonction définie sur un intervalle ouvert $]a,b[$ et intégrable sur tout intervalle $[x,y]$, $a<x<y<b$, on dit que son intégrale impropre sur $]a,b[$ converge si, pour $a<c<b$, ses intégrales impropres sur $]a,c]$ et $[c,b[$ existent.*

Exemple 2.2.5 *L'intégrale impropre $\int_{-1}^{+1}\frac{1}{1-t^2}dt$ est divergente car $\int_{-1}^{0}\frac{1}{1-t^2}dt$ est divergente.*

2.2.1 Intégrale absolument convergente

Définition 2.2.6 *Soit* $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ *une fonction intégrable sur tout intervalle de la forme* $[a, \alpha], \forall \alpha < b$. *On dit que l'intégrale impropre de f est absolument convergente sur* $[a, b[$ *si l'intégrale impropre de* $|f|$ *est convergente sur* $[a, b[$.

Exemple 2.2.7 *L'intégrale impropre sur* $]0, 1]$ *de la fonction* $f : x \to \dfrac{\cos x}{\sqrt{x}}$ *est absolument convergente.*

car

$$0 \leq \int_0^1 \frac{|\cos x|}{\sqrt{x}} dx \leq \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

et $\int_x^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt = 2 - 2\sqrt{x}$ *et* $\lim\limits_{x \to 0} \int_x^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt = 2.$

Chapitre 3

Equations différentielles

3.1 Rappel sur les équations différentielles ordinaires

3.1.1 Equations différentielles ordinaires d'ordre 1

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On appelle équation différentielle ordinaire du premier ordre une équation de la forme

$$y' = f(t, y)$$

on dit que la fonction dérivable, $y_0 : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une solution de l'equation différentielle d'ordre1

$$y' = f(t, y)$$

sur I si

$$y_0'(t) = f(t, y_0(t)), \forall t \in I.$$

Exemple 3.1.1 *La fonction $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x(t) = e^t$ est une solution de l'equation différentielle d'ordre1 suivante:*

$$y' = y$$

sur $\mathbb{R}$ *,car* $x'(t) = e^t = x(t), \forall t \in \mathbb{R}$.

3.1.2 Equations différentièlles de variables séparées

Une équation différentielle de 1^{er} ordre est dite à variables séparées si elle peut s'écrire sous la forme

$$f(y)y' = g(x)$$

donc

$$F(y) = G(x) + k, k \in \mathbb{R}.$$

(F est une primitive de f et G est une primitive de g)

donc

$$y = F^{-1}(G(x) + c)$$

Exemple 3.1.2 *Résoudre sur* $I = [2, +\infty[$ *l'équation différentielle*

$$xy' \ln x = (3 \ln x + 1)y$$

On peut séparer les variables (x *et* y*) en divisant par* $yx \ln x$*,*

$$\frac{y'}{y} = \frac{(3 \ln x + 1)}{x \ln x}$$

donc

$$\ln y = \int \frac{(3 \ln x + 1)}{x \ln x} dx + c, c \in \mathbb{R}.$$

c'est a dire

$$y = e^{\int \frac{(3 \ln x + 1)}{x \ln x} dx + c}, c \in \mathbb{R}.$$

3.2 Equation différentielle ordinaires linéaire

Définition 3.2.1 *Une équation différentielle linéaire est une équation de la forme*

$$a_0(x)y + a_1(x)y' + ... + a_n(x)y^{(n)} = f(x) \tag{3.1}$$

l'équation homogéne associée est

$$a_0(x)y + a_1(x)y' + ... + a_n(x)y^{(n)} = 0 \tag{3.2}$$

Proposition 3.2.2 *Si y_1 et y_2 deux solutions de (3.2). Alors $y_1 + y_2$ et αy_1 sout aussi deux solutions de (3.2).*

Exemple 3.2.3 *$y_1(x) = x$ et $y_2(x) = 5$ deux solutions de l'équation $y''' + y'' = 0$, alors $y_3(x) = x + 5$ et $y_4(x) = 10x$ sont aussi des solutions.*

Proposition 3.2.4 *Si S_0 est l'ensemble des solutions de (3.2) et y_p une solution particuière de (3.1), alors l'ensemble des solutions de (3.1) est donné par $S = \{y + y_p / y \in S_0\}$.*

3.2.1 Equation différentielle linéaire du premier ordre 1

Définition 3.2.5 *Une équation différentielle linéaire du premier ordre est une équation différentielle du premier ordre avec*

$$x' = f(t).x + g(t)$$

avec f, g des fonctions continues sur $\mathbb{R}$. L'équation différentielle homogène associée est

$$x' = f(t).x$$

Exemple 3.2.6 *L'équation différentielle*

$$y' = t^2y + t$$

est une equation différentielle linéaire d'ordre1. L'équation différentielle homogène associée est

$$y' = t^2 y$$

Résolution d'une équation différentièlle linéaire homogène

$$x' = f(t).x$$

c'est a dire $\frac{x'}{x} = f(t)$ donc

$$\ln|x| = \int f(t)dt + c, c \in \mathbb{R}$$

alors

$$x = ke^{\int f(t)dt}, k \in \mathbb{R}$$

Résolution d'une équation différentièlle linéaire non homogène

$$x' = f(t).x + g(t)$$

Si x_p est une solution particulière de cette équation

alors

$$x(t) = ke^{\int f(t)dt} + x_p(t), k \in \mathbb{R}$$

Exemple 3.2.7 *On considère l'equation*

$$xy' + 2y = \frac{x^2}{x^2+1}$$

L'équation homogène associée est

$$xy' + 2y = 0$$

la solution générale de l'équation homogène est

$$y(x) = \frac{k}{x^2}, k \in \mathbb{R}$$

Solution particulière de l'équation non homogène

$$y_p(x) = \frac{k(x)}{x^2}$$

donc $y_p'(x) = \dfrac{k'(x)\, x^2 - 2k(x)\, x}{x^4}$
et on a aussi

$$xy_p' + 2y_p = \frac{x^2}{x^2+1}$$

on trouve

$$\begin{aligned}
\frac{k'(x)\, x^2 - 2k(x)\, x}{x^3} + \frac{2k(x)}{x^2} &= \frac{x^2}{x^2+1} \Longrightarrow \frac{k'(x)}{x} = \frac{x^2}{x^2+1} \\
&\Longrightarrow k'(x) = \frac{x^3}{x^2+1} \\
&\Longrightarrow k'(x) = \frac{x^3+x-x}{x^2+1} \\
&\Longrightarrow k'(x) = x - \frac{1}{2}\frac{2x}{x^2+1} \\
&\Longrightarrow k(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)
\end{aligned}$$

donc $y_p(x) = \dfrac{k(x)}{x^2} = \frac{1}{2} - \dfrac{1}{2x^2}\ln(x^2+1)$
finalement la solution générale l'équation non homogène est

$$y(x) = \frac{k}{x^2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2x^2}\ln\left(x^2+1\right), k \in \mathbb{R}.$$

3.2.2 Equation de Bernoulli

Définition 3.2.8 *On appelle équation de Bernoulli une équation de la forme*

$$x' = p(t)x + q(t)x^{\alpha}$$

avec $\alpha \in \mathbb{R}/\{1\}$ *et* p , q *sont des fonctions continues.*

On se place sur les intervalles où x ne s'annule pas. On peut alors diviser par x^{α}, et poser $z = x^{1-\alpha}$, on obtient alors

$$z' = (1-\alpha)(p(t)z + q(t))$$

est une équation linéaire en z.

3.2.3 Equations différentièlles linéaires d'ordre 2 (EDL d'ordre2)

Définition 3.2.9 *Une EDL du* $2^{\grave{e}me}$ *ordre à coefficients constants est une équation différentielle de la forme*

$$ay'' + by' + cy = f(x) \tag{E}$$

ou $a, b, c \in \mathbb{R}(a \neq 0)$ *et* $f \in C^0(I)$ *(*I *ouvert de* $\mathbb{R}$*). L'équation homogène (ou sans second membre) associée est*

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{EH}$$

Proposition 3.2.10 *Si* y_h *est une solution générale de (EH) et* y_p *est une solution particulière de (E). Alors* $y_p + y_h$ *est une solution générale de (E)*

Résolution de l'équation homogène associée (E.H.)

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{EH}$$

On cherche la solution sous la forme $y(x) = e^{rx}$, $r \in \mathbb{R}$. On a donc $y'(x) = ry(x)$ et $y''(x) = r^2 y(x)$, donc (EH) devient

$$y(ar^2 + br + c) = 0$$

Définition 3.2.11 *L'équation*

$$ar^2 + br + c = 0 \tag{EC}$$

se nomme équation caractéristique de (E.H.).

Proposition 3.2.12 *Suivant le signe de $\triangle = b2 - 4ac$, on a les résultats suivants :*

1)$\triangle > 0$: (EC) admet 2 racines réelles distinctes $r_1 \neq r_2$, et

$$y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

est une solution générale de (EH)

2)$\triangle = 0$: (EC) admet une racine double $r \in \mathbb{R}$

$$y(x) = (c_1 x + c_2)e^{rx}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

3) $\triangle < 0$: (EC) admet deux racines complexes conjuguées $r_1 = \alpha + i\beta$ et $\mathrm{r}_2 = \alpha - i\beta$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \beta \neq 0)$ et

$$y(x) = (c_1 cos\beta x + c_2 sin\beta x)e^{\alpha x}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Exemple 3.2.13 *$y - 4y + 3y = 0$ l'équation caractéristique est $r^2 - 4r + 3 = 0$ admet 2 racines réelles distinctes $r_1 = 1, r_2 = 3$, l'ensemble des solutions de (E) sont : $y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{3x}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$*

Exemple 3.2.14 *$y + 2y + y = 0$; l'équation caractéristique est $r^2 + 2r + 1 = 0$; $r = -1$ racine double, l'ensemble des solutions de (E) sont :*

$$y(x) = (c_1 x + c_2)e^{-x}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Exemple 3.2.15 *$y''+2y'+4y=0$; l'équation caractéristique est $r^2+2r+4=0, \triangle=-12$ donc $r_1=-1+\sqrt{3}i$, $r_2=-1-\sqrt{3}i$, d'où l'ensemble des solutions de (E) sont :*

$$y(x)=(c_1 cos\sqrt{3}x+c_2 sin\sqrt{3}x)e^{-x}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Résolution de l'équation non homogène

$$ay''+by'+cy=f(x) \tag{E}$$

Solution particulière à (E)

1) Si $f(x)=P(x)$ tel que $\alpha \in \mathbb{R}$ et P un polynôme.

On cherche la solution sous la forme$y=x^k Q(x)$ tel que Q est un polynôme et $degQ = degP$

$k=0$, si 0 n'est pas racine de (EC)

$k=1$, si 0 est l'une des deux racines de (EC)

$k=2$, si 0 est racine double de (EC)

2) Si $f(x)=e^{\alpha x}P(x)$ tel que $\alpha \in \mathbb{R}$ et P un polynôme.

On cherche la solution sous la forme$y=x^k e^{\alpha x}Q(x)$ tel que Q est un polynôme et $degQ=degP$

$k=0$, si α n'est pas racine de (EC)

$k=1$, si α est l'une des deux racines de (EC)

$k=2$, si α est racine double de (EC)

Exemple 3.2.16

$$y''-4y'+4y=(x^2+1)e^x$$

l'équation homogéne est

$$y''-4y'+4y=0$$

l'équation caractéristique : $r^2-4r+4=0$;on a $\triangle=0$; $r=2$ racine double donc la *solution générale de l'équation homogène est donne par*

$$y_h = (c_1 x + c2)e^{2x}; c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

2) On cherche une solution particulière de l'équation non homogène, comme 1 n'est pas une solution de l'équation caractéristique, alors $y_p(x) = q(x)e^x$ *tel que* $degq = 2$;

$y_p(x) = (ax^2 + bx + c)e^x$ *donc*

$y_p'(x) = (2ax + b)e^x + (ax^2 + bx + c)e^x$

$y_p''(x) = 2ae^x + 2(2ax + b)e^x + (ax^2 + bx + c)e^x$

En remplaçant dans (E), *on trouve*

$2ae^x + 2(2ax+b)e^x + (ax^2+bx+c)e^x - 4(2ax+b)e^x - 4(ax^2+bx+c)e^x + 4(ax^2+bx+c)e^x = (x^2+1)e^x$

$((a-1)x^2 + (b-4a)x + c + b + 2a - 1)e^x = 0$

$$\begin{cases} a - 1 = 0 \\ b - 4a = 0 \\ c - 2b + 2a - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \\ c = 7 \end{cases}$$

donc la solution particulière $y_p(x) = (x^2 + 4x + 7)e^x$

finalement la solution générale de l'équation non homogène est

$y(x) = y_h = (c_1 x + c2)e^{2x} + (x^2 + 4x + 7)e^x; c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

3.3 Equation aux dérivées partielles

Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables réelles définié au voisinage de $A(a, b)$

Si la fonction $x \to f(x, b)$ a une dérivée par rapport x, on la note $f_x'(a, b)$.

On peut définit la dérivée partielle par rapport a x par

$$f_x' : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (x, y) \to f_x'(x, y)$$

on définit la dérivée partielle par rapport a y par meme méthode, on note

$$f'_x = \frac{\partial f}{\partial x}, f'_y = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Dérivées successives

De la meme façon, on peut définie la dérivée de la fonction f'_x par rapport a x, on la note f''_{x^2} ou $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$.

aussi la dérivée de la fonction f'_x par rapport a y, on la note f''_{xy} ou $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

la dérivée de la fonction f'_y par rapport a y, on la note f''_{y^2} ou $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

la dérivée de la fonction f'_y par rapport a x, on la notef''_{yx} ou $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

Théorème 3.3.1 *de Schwarz*

Si les dérivées partielles f''_{xy} et f''_{yx} sont continues, alors ces dérivées sont égales

$$f''_{xy} = f''_{yx}$$

Exemple 3.3.2 *Déterminer* $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ *pour la fonction* $f(x, y) = x^2 + xy^2 - y$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + y^2, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 2, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = 2y,$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2xy, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 2x, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 2y$

3.3.1 Dérivées d'une fonction composées de deux variables

Soit la fonction $F(x, y) = f(u, v)$, tel que u, v des fonctions de x et y admettant des dérivées partiellles, si f admet des dérivées partiellles, alors F dmet des dérivées partiellles et

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial v}\\ \frac{\partial F}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial v}\end{aligned}$$

Exemple 3.3.3 *Soit* $f(u,v)=u^2+uv+v$

$u(x,y)=2x-y$

$v(x,y)=x+y$

$F(x,y)=f(u(x,y),v(x,y))$

....

3.3.2 Différentielles totales

Soit $U:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction de deux variables possédant des dérivées partielles continues

La differentielle totales de U s'écrit par

$$dU=\frac{\partial U}{\partial x}dx+\frac{\partial U}{\partial y}dy$$

Si $U(x,y)=Cte$ alors $dU=0$.

Exemple 3.3.4 $U\frac{\partial U}{\partial x}dx+\frac{\partial U}{\partial y}dy=x^2+xy$

$\frac{\partial U}{\partial x}(x,y)=2x+y$, $\frac{\partial U}{\partial y}(x,y)=x$

$dU=(2x+y)\,dx+xdy$

3.3.3 Formes différentielles totales exactes

On considère l'équation différentielle suivante

$$M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy=0$$

Si on peut trouver une fonction $U : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tel que

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x,y) = M(x,y), \frac{\partial U}{\partial y}(x,y) = N(x,y)$$

Alors la solution :

$$U(x,y) = Cte$$

Proposition 3.3.5 *Soit $U : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction tel que*

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x,y) = M(x,y), \frac{\partial U}{\partial y}(x,y) = N(x,y)$$

Si M, N des fonctions continues alors

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

Preuve. On a

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x,y) = M(x,y), \frac{\partial U}{\partial y}(x,y) = N(x,y)$$

donc

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}(x,y) \text{ et } \frac{\partial N}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}(x,y)$$

et M, N des fonctions continues alors d'aprés théorème de Schwarz on trouve

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

□

Remarque 3.3.6 *On a*

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x,y) = M(x,y), \frac{\partial U}{\partial y}(x,y) = N(x,y)$$

danc $U(x,y)=\int M(x,y)\,dx+k(y)$

aussi $\frac{\partial U}{\partial y}(x,y)=\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)\,dx\right)+k'(y)=N(x,y)$ *c'est à dire*

$$k'(y)=N(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)\,dx\right)$$

3.3.4 Application à l'intégration d'équation diff de premier ordre

On considère l'équation différentielle suivante

$$M(x,y)+N(x,y)\,y'=0$$

On peut écrire cette équation sous la forme

$$M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy=0$$

Si on peut trouver une fonction $U:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tel que

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x,y)=M(x,y)\,,\ \frac{\partial U}{\partial y}(x,y)=N(x,y)$$

Alors la solution :

$$U(x,y)=Cte$$

Exemple 3.3.7 *Résoudre l'équation*

$$y'=-\frac{1+2xy^3}{3x^2y^2}$$

donc

$$\left(1+xy^3\right)+\left(3x^2y^2\right)y'=0$$

c'est à dire

$$\left(1+xy^3\right)dx+\left(3x^2y^2\right)dy=0$$

on pose

$M\left(x,y\right)=1+2xy^3,\ N\left(x,y\right)=3x^2y^2$ *on obtient*

$$\frac{\partial M\left(x,y\right)}{\partial y}=\frac{\partial N\left(x,y\right)}{\partial x}=6xy^2$$

Alors il existe une fonction U tel que

$$\frac{\partial U}{\partial x}\left(x,y\right)=1+2xy^3,\frac{\partial U}{\partial y}\left(x,y\right)=3x^2y^2$$

$U\left(x,y\right)=x+x^2y^3+k\left(y\right)$

$\frac{\partial U}{\partial y}\left(x,y\right)=3x^2y^2+k'\left(y\right)=3x^2y^2$

donc $k'\left(y\right)=0\Longrightarrow k\left(y\right)=Cte.$

finalement

$x+x^2y^3=Cte\Longrightarrow y=\sqrt[3]{\dfrac{c-x}{x^2}},$

$c=0:y\left(x\right)=-x^{\frac{-1}{3}},y'\left(x\right)=\frac{1}{3}x^{\frac{-4}{3}}$

$y'=-\frac{1+2xy^3}{3x^2y^2}=-\frac{1-2xx^{-1}}{3x^2x^{\frac{-2}{3}}}=-\frac{-1}{3x^{\frac{4}{3}}}=\frac{1}{3}x^{\frac{-4}{3}}.$

Exemple 3.3.8 *Résoudre l'équation*

$$y'=-\frac{1+2xy}{x^2}$$

donc

$$1+2xy+x^2y'=0$$

c'est à dire

$$\left(1+2xy\right)dx+x^2dy=0$$

on pose

$M(x,y) = 1 + 2xy,\ N(x,y) = x^2$ *on obtient*

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 2x$$

Alors il existe une fonction U *tel que*

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x,y) = 1 + 2xy, \frac{\partial U}{\partial y}(x,y) = x^2$$

$U(x,y) = x + x^2y + k(y)$

$\frac{\partial U}{\partial y}(x,y) = x^2 + k'(y) = x^2$

donc $k'(y) = 0 \Longrightarrow k(y) = Cte.$

finalement

$x + x^2y = Cte \Longrightarrow y = \dfrac{c-x}{x^2}$

3.3.5 Facteur intégrant

Soit une differentielle de la forme

$$dV = M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy$$

tel que

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} \neq \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

cette différentielle n'est pas totales.

On cherche alors une fonction $F(x,y)$ tel que

$$dU = F(x,y)\,M(x,y)\,dx + F(x,y)\,N(x,y)\,dy$$

est une diff totales

cette fonction est appelée facteur intégrant de la diff dV.

3.3.6 Détermination de facteur intégrant

Il suffit de trouver la fonction F qui vérifie la relation

$$\frac{\partial (FM)}{\partial y} = \frac{\partial (FN)}{\partial x}$$

c'est à dire

$$F\frac{\partial M}{\partial y} + M\frac{\partial F}{\partial y} = F\frac{\partial N}{\partial x} + N\frac{\partial F}{\partial x}$$

Facteur intégrant de la forme $F(x)$

Donc dans ce cas on a

$$F\frac{\partial M}{\partial y} = F\frac{\partial N}{\partial x} + N\frac{\partial F}{\partial x}$$

ce qui inplique

$$N\frac{\partial F}{\partial x} = F\frac{\partial M}{\partial y} - F\frac{\partial N}{\partial x}$$

alors

$$\frac{1}{F}\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)$$

donc $F(x) = e^{\int \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)dx}$

Facteur intégrant de la forme $F(y)$

Donc dans ce cas on a

$$F\frac{\partial M}{\partial y} + M\frac{\partial F}{\partial y} = F\frac{\partial N}{\partial x}$$

ce qui inplique

$$M\frac{\partial F}{\partial y} = F\frac{\partial N}{\partial x} - F\frac{\partial M}{\partial y}$$

alors

$$\frac{1}{F}\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)$$

donc $F(y)=e^{\int \frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)dy}$

Exemple 3.3.9 *Résoudre*

$$y-xy'=0 \tag{E}$$

on peut écrire cette équation sous la forme

$$dV=ydx-xdy=0$$

cette différentielle n'est pas totales.

On cherche alors une fonction $F(x)$ tel que

$$dU=F(x)\,dV=F(x)\,ydx-F(x)\,xdy$$

est une diff totales

donc

$$F(x)=e^{\int \frac{1}{-x}(1+1)dx}$$

c'est a dire $F(x)=\frac{1}{x^2}+c,c\in\mathbb{R}$

et on a

$$dU=\frac{1}{x^2}(ydx-xdy)$$

Donc on a $\frac{\partial U}{\partial x}(x,y)=\frac{y}{x^2}$ et $\frac{\partial U}{\partial y}(x,y)=\frac{-1}{x}$

alors $U(x,y)=\frac{-y}{x}+k(y)$

ce qui implique $\frac{\partial U}{\partial y}(x,y)=\frac{-1}{x}+k'(y)=\frac{-1}{x}$

c'est à dire $k'(y)=0\Longrightarrow k(y)=Cte.$

$U(x,y)=\frac{-y}{x}+Cte.$

donc la solution est $\frac{-y}{x}=Cte.\Longrightarrow y=cx,c\in\mathbb{R}$

finalement la solution de (E)*est* $y = cx, c \in \mathbb{R}$

Chapitre 4

Séries numériques

4.1 Généralités

Définition 4.1.1 *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite des nombres complexes ou réels, on appelle série de terme général* u_n*, et on note* $\sum u_n$ *la suite des sommes partielles* $S_n = \sum\limits_{i=0}^{i=n} u_i$*.*

Remarque 4.1.2 *1)On remarque que* $S_n - S_{n-1} = u_n, \forall n \geq 1$

2) Si la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ *définie a partir de rang* n_0*, la série de terme général* u_n *est donnée par la suite des sommes partielles* $S_n = \sum\limits_{i=n_0}^{i=n} u_i$*.*

4.1.1 Séries convergentes

Définition 4.1.3 *Une série* $\sum u_n$ *à valeurs complexes ou réels est dite convergente si et seulement si la suite* $(S_n)_n$ *de ses sommes partielles est convergente.*

Remarque 4.1.4 *1) la série* $\sum u_n$ *est diverge sinon.*

2) Si la série $\sum u_n$ *est converge vers* S *c'est à dire la suite* $(S_n)_n$ *de ses sommes partielles est convergente vers* S*, qui est appeleé somme de la série et on note* $S = \sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$*.*

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \Leftrightarrow S = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=0}^{i=n} u_i$$

Exemple 4.1.5 *Série géométrique*

Le terme général de la série géométrique est $u_n = ar^n$ *(r le raison, a le premier terme)*
$\sum\limits_{i=0}^{i=n} u_i = \sum\limits_{i=0}^{i=n} ar^n = a\left(1 + r + r^2 + ... + r^n\right)$
Si $r = 1$ *on a* $S_n = \sum\limits_{i=0}^{i=n} u_i = a\left(n+1\right)$
Dans ce cas la série est diverge.
Si $r \neq 1$ *on a* $S_n = \sum\limits_{i=0}^{i=n} u_i = \frac{a\left(1-r^{n+1}\right)}{1-r}$.
$\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \frac{a}{1-r}$, *si* $0 \leq r \lneqq 1$.
$\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = -\infty$ *si* $r \geq 1$.

Exemple 4.1.6 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = 1$
car $\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$
et $S_n = \sum\limits_{i=0}^{i=n} \left(\frac{1}{i+1} - \frac{1}{i+2}\right) = 1 - \frac{1}{n+2}$

Exemple 4.1.7 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$

Sachant que $\frac{1}{k} = \int\limits_0^1 t^{k-1}dt,\ k \in \mathbb{N}^*$

donc $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\int\limits_0^1 t^{k-1}dt\right) = \int\limits_0^1 \sum\limits_{k=1}^{n} \left(-t\right)^{k-1} dt = \int\limits_0^1 \frac{1-(-t)^n}{1+t}dt$
$\int\limits_0^1 \frac{1}{1+t}dt = \ln 2$ *et* $\left|\int\limits_0^1 \frac{(-t)^n}{1+t}dt\right| =\leq \int\limits_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}$

Cas particulier

Une série $\sum u_n$ à termes complexes est convergente si et seulement si la série de parties réelles et la série des parties imaginaires sont convergentes et
$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(a_n + ib_n\right) = \left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\right) + i\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n\right)$

4.1.2 Reste d'une série convergente

Soient $\sum u_n$ une série convergente et $p \in \mathbb{N}$

on appelle reste d'ordre p la somme de la série $R_p = \sum\limits_{n=p+1}^{\infty} u_n$

Proposition 4.1.8 *Si* $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} u_k$ *le reste d'ordre* n *pour la série* $\sum u_n$.
alors

$$\lim_{n\to\infty} R_n = 0$$

Opérations sur les séries

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à valeurs dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Si $\sum u_n$ converge. alors $\sum \lambda u_n$ converge et on a :
$\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \lambda u_n = \lambda \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$
- Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergents, alors $\sum u_n + v_n$ converge, et on a :

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n + \sum_{n=0}^{\infty} v_n = \sum_{n=0}^{\infty} (u_n + v_n)$$

Centre Universitaire Ahmed ZABANA Relizane

Maths 3 -2017/2018

2 année LMD-Sciences et Techniques

Fiche TD 1

Exercice 1: Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction définie par

$$f(x) = 2x + 1 \text{ sur } [a, b]$$

Montrer que la fonction f est intégrable en sens de Riemann.

Exercice 2

Soit la fonction f définie pour tout $x \in [0, 1]$ par:

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Vérifier que la fonction f est non intégrable en sens de Riemann.

Exercice 3: Calculer les intégrales suivantes

$$\begin{aligned} I_1(x) &= \int \frac{x}{(x^2+1)^6} dx, \; I_2(x) = \int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx, \\ I_3(x) &= \int \frac{\cos x}{\sin x + 1} dx. \end{aligned}$$

Exercice 4:

1) Calculer l'intégrale suivante

$$I_1(x) = \int x \operatorname{arctg}(x) \, dx,$$

sachant que $\operatorname{arctg}'(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$.

2) Montrer que, pour tous les entiers strictement positifs, on a l'égalité suivante:

$$\int_0^1 \frac{x^n}{(x^n+1)}dx = \frac{\ln 2}{n} - \frac{1}{n}\int_0^1 \ln(x^n+1)\,dx.$$

Exercice 5: Calculer les intégrales suivantes

$$1)\int_0^1 \frac{x^2-1}{x^2+1}dx \ , \ 2)\int_0^1 \frac{2x+5}{x^3-x}dx.$$

Correction Fiche TD 1

Exercice 1:

1) On a $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ et $f(x)=2x+1$ sur $[a,b]$

On choisit $\triangle = \left\{x_i = a + \dfrac{i(b-a)}{n}, i=0,...,n\right\}$ une subdivision de l'intervalle $[a,b]$ et $I_i = [x_i, x_{i+1}[\,,, i=0,...,n.$

Calculons maintenant les deux sommes de Darboux

$S(\triangle, f) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} M_i (x_{i+1}-x_i)$ tel que $M_i = \sup\limits_{x\in I_i} f(x) = 2\left(a+\dfrac{(i+1)(b-a)}{n}\right)+1$

$s(\triangle, f) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} m_i (x_{i+1}-x_i)$ tel que $m_i = \inf\limits_{x\in I_i} f(x) = 2\left(a+\dfrac{i(b-a)}{n}\right)+1$

on remarque que $x_{i+1}-x_i = \dfrac{(b-a)}{n}$

Donc

$$\begin{aligned}S(\triangle, f) &= \sum_{i=0}^{n-1}\left[\left(2\left(a+\frac{(i+1)(b-a)}{n}\right)+1\right)\frac{(b-a)}{n}\right]\\ &= \frac{(b-a)}{n}\left[2a\sum_{i=0}^{n-1}1 + 2\frac{(b-a)}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(i+1) + \sum_{i=0}^{n-1}1\right]\\ &= \frac{(b-a)}{n}\left[2a.n + 2\frac{(b-a)}{n}\frac{n(n+1)}{2} + n\right]\end{aligned}$$

$$=2a\left(b-a\right)+\left(b-a\right)^{2}\frac{n\left(n+1\right)}{n^{2}}+\left(b-a\right)$$

alors

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}S\left(\triangle,f\right) &= 2a\left(b-a\right)+\left(b-a\right)^{2}+\left(b-a\right)\\ &= b^{2}-a^{2}++\left(b-a\right)\end{aligned}$$

Et on a aussi

$$\begin{aligned}s\left(\triangle,f\right)=&\sum_{i=0}^{n-1}\left[\left(2\left(a+\frac{i\left(b-a\right)}{n}\right)+1\right)\frac{\left(b-a\right)}{n}\right]\\ &=\frac{\left(b-a\right)}{n}\left[2a\sum_{i=0}^{n-1}1+2\frac{\left(b-a\right)}{n}\sum_{i=0}^{n-1}i+\sum_{i=0}^{n-1}1\right]\\ &=\frac{\left(b-a\right)}{n}\left[2a.n+2\frac{\left(b-a\right)}{n}\frac{n\left(n-1\right)}{2}+n\right]\\ &=2a\left(b-a\right)+\left(b-a\right)^{2}\frac{n\left(n-1\right)}{n^{2}}+\left(b-a\right)\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}s\left(\triangle,f\right) &= 2a\left(b-a\right)+\left(b-a\right)^{2}+\left(b-a\right)\\ &= b^{2}-a^{2}++\left(b-a\right)\end{aligned}$$

finalement $\lim\limits_{n\to+\infty}S\left(\triangle,f\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}s\left(\triangle,f\right)$

c'est a dire intégrable en sens de Riemann.

Exercice 2

Soit la fonction f définie pour tout $x\in[0,1]$ par :

$$f\left(x\right)=\begin{cases}1 \text{ si } x\in\mathbb{Q}\\ 0 \text{ sinon}\end{cases}$$

Vérifions que la f non intégrable en sens de Riemann

On choisit $\triangle=\left\{x_{i}=\dfrac{i}{n},i=0,...,n\right\}$ une subdivision de l'intervalle $[0,1]$ et $I_{i}=\left[x_{i},x_{i+1}\right[,,i=0,...,n.$

Calculons maintenant les deux sommes de Darboux

$S(\triangle, f) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} M_i (x_{i+1} - x_i)$ tel que $M_i = \sup\limits_{x \in I_i} f(x) = 1$

$s(\triangle, f) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} m_i (x_{i+1} - x_i)$ tel que $m_i = \inf\limits_{x \in I_i} f(x) = 0$

donc

$S(\triangle, f) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} = 1$

$s(\triangle, f) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} 0 = 0$

C'est a dire f est non intégrable en sens de Riemann

Exercice 3: Calculer les intégrales suivantes

1) Calculons $I_1(x) = \displaystyle\int \frac{x}{(x^2+1)^6} dx$

$I_1(x) = \frac{1}{2} \displaystyle\int \frac{2x}{(x^2+1)^6} dx$

on choisit $u(x) = x^2 + 1$ alors $u'(x) = 2x$

donc $I_1(x) = \frac{1}{2} \displaystyle\int \frac{u'(x)}{(u(x))^6} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{u^6} du = \frac{1}{-10} u^{-5} + c, c \in \mathbb{R}$

finalement $I_1(x) = \frac{1}{-10} (x^2+1)^{-5} + c, c \in \mathbb{R}$

2) On calcule $I_2(x) = \displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}} dx,$

$I_2(x) = \displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}} dx = \frac{1}{3} \int \frac{3x^2}{\sqrt{x^3+1}} dx$

on choisit $u(x) = x^3 + 1$ alors $u'(x) = 3x^2$

donc $I_2(x) = \frac{1}{3} \displaystyle\int \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}} dx = \frac{1}{3} \int \frac{1}{\sqrt{u}} du = \frac{2}{3} u^{\frac{1}{2}} + c, c \in \mathbb{R}$

$I_2(x) = \frac{2}{3} \sqrt{x^3+1} + c, c \in \mathbb{R}$

nous utilisons meme methode pour trouver:

$I_3(x) = \displaystyle\int \frac{\cos x}{\sin x + 1} dx = \ln|\sin x + 1| + c, c \in \mathbb{R}$

Exercice 4:

1) On calcule

$$I(x) = \int x \operatorname{arctg}(x)\, dx,$$

sachant que $\operatorname{arctg}'(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$

on utilise l'intégrale par partie

$u(x) = \text{arctg}(x), v'(x) = x \Longrightarrow u'(x) = \dfrac{1}{x^2+1}, v(x) = \frac{x^2}{2}$

donc

$I(x) = \frac{x^2}{2}\text{arctg}(x) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{x^2+1}\ dx$

et $\int \frac{x^2}{x^2+1}\ dx = \int 1 + \frac{1}{x^2+1}\ dx = x + \text{arctg}(x)$

.....

2) Montrons que, pour tous les entiers strictement positifs, on a l'égalité suivante:

$$\int_0^1 \frac{x^n}{(x^n+1)}dx = \frac{\ln 2}{n} - \frac{1}{n}\int_0^1 \ln(x^n+1)\,dx.$$

on utilise l'intégrale par partie

$\displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{(x^n+1)}dx = \int_0^1 \frac{1}{n}x\frac{nx^{n-1}}{(x^n+1)}dx$

$u(x) = \frac{1}{n}x, v'(x) = \dfrac{nx^{n-1}}{(x^n+1)} \Longrightarrow u'(x) = \frac{1}{n}, v(x) = \ln(x^n+1)$

....

Exercice 5: On calcule les intégrales suivantes

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2-1}{x^2+1}dx &= \int \frac{x^2+1-2}{x^2+1}dx \\ &= \int 1 + \frac{-2}{x^2+1}dx \\ &= x - 2\text{arctg}(x) + c, c \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{2x+5}{x^3-x}dx &= \int \frac{2x+5}{x(x-1)(x+1)}dx. \\ &= \int \frac{-5}{x} + \frac{3,5}{x-1} + \frac{1,5}{x+1}dx. \\ &= -5\ln|x| + 3,5\ln|x-1| + 1,5\ln|x+1|.\end{aligned}$$

Centre Universitaire Ahmed ZABANA Relizane

Maths 3 -2017/2018

2 année LMD-Sciences et Techniques

Fiche TD 2

Exercice 1: Calculer les intégrales suivantes

$$I = \iint_D \frac{x}{y} dxdy, \text{où } D = [1,3] \times [1,5]$$

$$I = \iint_D (x + 2y)\, dxdy, \text{où } D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$$

$$I = \iint_D \left(x^2 + y^2\right) dxdy, \text{où } D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 25\}$$

Exercice 2: Calculer les intégrales suivantes

$$I = \iint_D (yxz)\, dxdydz, où D = [1,3]^3$$

$$I = \iint_D (x + y + 2z)\, dxdydz, \text{où } D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; (x,y) \in [5,7]^2, y \leq z \leq x\}$$

$$I = \iint_D 5dxdydz, \text{où } D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$$

Exercice 3: Calculer l'aire délimitée par

$$x^2 + y^2 \leq 25, x \geq 0, y \geq 0.$$

Exercice 4: Calculer le volume du

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}.$$

Correction Fiche TD 2

Exercice 1:

1)$I=\left[\int\limits_1^3 xdx\right]\times\left[\int\limits_1^5 \frac{1}{y}dy\right]=4\ln 5.$

2)$I=\int\limits_0^1\left[\int\limits_0^x (x+2y)\,dy\right]dx=\int\limits_0^1 2x^2dx=\frac{2}{3}$

3) $I=\iint_D (x^2+y^2)\,dxdy$,où $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;x^2+y^2\leq 25\}$

$\varphi:(r,\theta)\to(x,y)=(r\cos\theta,r\sin\theta)$

La matrice jacobien de φ est $J(\varphi)=\begin{pmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{pmatrix}$

et $\left|\frac{D(x,y)}{D(r,\theta)}\right|=r$

$\triangle=\{(r,\theta)\,/0\leq r\leq 5 \text{ et } 0\leq\theta\leq 2\pi\}$

$\varphi(\triangle)=D$, on obtient:

$I=\iint_D (x^2+y^2)\,dxdy=I=\iint_\triangle r^2rdrd\theta=\left[\int\limits_0^5 r^3dr\right]\times\left[\int\limits_0^{2\pi} d\theta\right]=$

Exercice 2

1) $I=\iint_D (yxz)\,dxdydz$,où $D=[1,3]^3$

$I=\left[\int\limits_1^3 xdx\right]\times\left[\int\limits_1^3 ydy\right]\times\left[\int\limits_1^3 zdz\right]=64$

2) $I=\iint_D (x+y+2z)\,dxdydz$,où $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;(x,y)\in[5,7]^2,y\leq z\leq x\}$

$$\begin{aligned}I=\iint_D (x+y+2z)\,dxdydz&=\iint_{[5,7]^2}\left[\int\limits_y^x (x+y+2z)\,dz\right]dxdy\\&=\iint_{[5,7]^2} 2(x^2-y^2)\,dxdy\\&=2\int\limits_5^7\left[\int\limits_5^7 (x^2-y^2)\,dx\right]dy\\&=\end{aligned}$$

3) $I=\iint_D 5dxdydz$,où $D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;x^2+y^2+z^2\leq 4\}$

$\varphi:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3,(r,\theta,\beta)\to(x,y,z)=(r\cos\theta\cos\beta,r\sin\theta\cos\beta,r\sin\beta)$

La matrice jacoblien de φ est $j\left(\varphi\right) = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\beta & \text{-}r\sin\theta\cos\beta & \text{-}r\cos\theta\sin\beta \\ \sin\theta\cos\beta & r\cos\theta\cos\beta & \text{-}r\sin\theta\sin\beta \\ \sin\beta & 0 & r\cos\beta \end{pmatrix}$

$\det(j\left(\varphi\right)) = r^2\cos\beta$

$\triangle = \left\{ (r,\theta,z)\,/ 0 \leq r \leq 2 \text{ et } 0 \leq \theta \leq 2\pi, \frac{-\pi}{2} \leq \beta \leq \frac{\pi}{2} \right\}.$

$$\begin{aligned} \iiint_D f(x,y,z)dxdydz &= \iiint_\triangle r^2\left|\cos\beta\right| drd\theta d\beta \\ &= \left[\int_0^5 r^2 dr\right] \times \left[\int_0^{2\pi} d\theta\right] \times \left[\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\beta d\beta\right] \\ &= \frac{4}{3}\pi 2^3 \end{aligned}$$

Exercice 3: Calculons l'aire délimitée par

$$x^2+y^2 \leq 25, x \geq 0, y \geq 0$$

$\iiint_D dxdydz, D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x^2+y^2 \leq 25, x \geq 0, y \geq 0\}$

$\triangle = \left\{ (r,\theta,z)\,/ 0 \leq r \leq 5 \text{ et } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right\}$

$\iiint_D dxdydz = \iiint_\triangle rdrd\theta dz = \left[\int_0^5 rdr\right] \times \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\right] = \frac{25}{4}\pi$

Exercice 4: Calculons le volume du

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x^2+y^2+z^2 \leq 4\}$$

$\triangle = \left\{ (r,\theta,\beta)\,/ 0 \leq r \leq 2 \text{ et } 0 \leq \theta \leq 2\pi, \frac{-\pi}{2} \leq \beta \leq \frac{\pi}{2} \right\}$

$$
\begin{aligned}
\iiint_D f(x,y,z)dxdydz &= \iiint_\triangle r^2 \left|\cos\beta\right| drd\theta d\beta \\
&= \left[\int_0^2 r^2 dr\right] \times \left[\int_0^{2\pi} d\theta\right] \times \left[\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\beta d\beta\right] \\
&= \frac{4}{3}\pi 2^3
\end{aligned}
$$

Centre Universitaire Ahmed ZABANA Relizane

Maths 3 -2017/2018

2 année LMD-Sciences et Techniques

Fiche TD 3

Exercice 1: Déterminer la nature des intégrales impropres suivantes

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx, I_2 = \int_0^1 \frac{1}{e^x - 1}dx, \\ I_3 &= \int_0^1 \frac{(x^2-1)^2}{(x-1)^2}dx, I_4 = \int_0^3 \frac{\sin x}{x^{\frac{2}{3}}}dx \end{aligned}$$

Exercice 2:

1)Déterminer la nature des intégrales impropres suivantes

$$I_1 = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx,\ \ I_2 = \int_2^{+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^3}dx;\ \ I_3 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^3}dx, I_4 = \int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x}dx$$

2) Montrer que l'intégrale suivante $I_1 = \int_1^{+\infty} \frac{\sin x + 2\cos x}{x^2}dx$

est absolument convergente.

Exercice 3: Résoudre les équations différentielles suivantes

$$xy' = y + 1;\ \ yy' = -2;\ \ xy' = e^y;\ \ y' = y + x^2y^3$$

Exercice 4: Résoudre les équations différentielles suivantes

$$y'' + 2y' + y = x^2e^x$$

Correction

Exercice 1: Déterminons la nature des intégrales impropres suivantes

1) $I_1 = \int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ la fonction $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ n'est pas définie en 0

$F(t) = \int\limits_t^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int\limits_t^1 x^{-\frac{1}{2}} dx = \left[\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\right]_t^1 = [2\sqrt{x}]_t^1 = 2\sqrt{1} - 2\sqrt{t}$

$\lim\limits_{t \to 0} F(t) = 2$

donc l'intégrale I_1 est convergente.

2) $I_2 = \int\limits_0^1 \frac{1}{e^x - 1} dx$

la fonction $f(x) = \frac{1}{e^x - 1}$ n'est pas définie en 0

$F(t) = \int\limits_t^1 \frac{1}{e^x - 1} dx$

$y = e^x \Longrightarrow dy = e^x dx = y dx$

c'est à dire $dx = \frac{dy}{y}$

$\int \frac{1}{e^x - 1} dx = \int \frac{1}{y(y-1)} dy = \int \left(\frac{-1}{y} + \frac{1}{y-1}\right) dy = -\ln y + \ln(y-1) = -\ln e^x + \ln(e^x - 1)$

donc $F(t) = \int\limits_t^1 \frac{1}{e^x - 1} dx = [-\ln e^x + \ln(e^x - 1)]_t^1 = -1 + \ln(e - 1) + t - \ln(e^t - 1)$

$\lim\limits_{t \to 0} F(t) = +\infty$

donc l'intégrale I_2 divergente.

$I_3 = \int\limits_0^1 \frac{(x^2 - 1)^2}{(x - 1)^2} dx$

$F(t) = \int\limits_t^1 \frac{(x^2 - 1)(x^2 - 1)}{(x - 1)^2} dx = \int\limits_t^1 (x + 1)^2 dx = \left[\frac{(x+1)^3}{3}\right]_t^1 = \frac{8}{3} - \frac{(t+1)^3}{3}$

$\lim\limits_{t \to 0} F(t) = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$

donc l'intégrale I_3 est convergente.

4) $I_4 = \int\limits_0^3 \frac{\sin x}{x^{\frac{2}{3}}} dx$

on a $\int\limits_{0}^{3} \left| \frac{\sin x}{x^{\frac{2}{3}}} \right| dx \leq \int\limits_{0}^{3} \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} dx$

et $F(t) = \int\limits_{t}^{3} \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} dx = \int\limits_{0} x^{-\frac{2}{3}} dx = \left[\frac{x^{-\frac{2}{3}+1}}{-\frac{2}{3}+1} \right]_{t}^{3} = 3 \times 3^{\frac{1}{3}} - 3t^{\frac{1}{3}}$

$\lim\limits_{t \to 0} F(t) = 3 \times 3^{\frac{1}{3}}$

donc l'intégrale I_4 est convergente.

Exercice 2:

1)Déterminons la nature des intégrales impropres suivantes

1) $I_1 = \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$

$F(t) = \int\limits_{1}^{t} \frac{1}{x^2} dx = \left[\frac{-1}{x} \right]_{1}^{t} = \frac{-1}{t} - \left(\frac{-1}{1} \right) = \frac{-1}{t} + 1$

$\lim\limits_{t \to +\infty} F(t) = 1$

donc l'intégrale I_1 est convergente.

2)$I_2 = \int\limits_{2}^{+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^3} dx$

on pose $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^3}$ et $g(x) = \frac{1}{x^2}$

on a $\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

alors $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^3} dx$ et $I_1 = \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ de la meme nature.

donc l'intégrale I_2 est convergente.

3)$I_3 = \int\limits_{0}^{\infty} \frac{1}{x^3} dx$

on a $I_3 = \int\limits_{0}^{\infty} \frac{3}{x^3} dx$

$F_1(t) = \int\limits_{c}^{t} \frac{1}{x^3} dx = \int\limits_{c}^{t} x^{-3} dx = \left[\frac{-1}{2x^2} \right]_{1}^{t} = \frac{-1}{2t^2} - \left(\frac{-1}{2} \right) = \frac{-1}{2t^2} + \frac{1}{2c^2}$

$\lim\limits_{t \to +\infty} F_1(t) = \frac{1}{2c^2}$

$F_2(t) = \int\limits_t^c \frac{1}{x^3} dx = \int\limits_t^c x^{-3} dx = \left[\frac{-1}{2x^2}\right]_1^t = \frac{-1}{2t^2} - \left(\frac{-1}{2}\right) = -\frac{1}{2c^2} - \frac{-1}{2t^2}$

$\lim\limits_{t\to+\infty} F_2(t) = +\infty$

donc l'intégrale I_3 est divergente.

4) $I_4 = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x}{e^x} dx$

$\int \frac{x}{e^x} dx = \int xe^{-x} dx$

par la méthode de l'intégrale par parties on trouve

$\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = e^{-x} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -e^{-x} \end{cases}$

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{e^x} dx &= \int xe^{-x} dx = -xe^{-x} - \int -e^{-x} dx \\ &= -xe^{-x} - e^{-x} + c, c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

donc $F(t) = \int\limits_0^t \frac{x}{e^x} dx = \left[-xe^{-x} - e^{-x}\right]_1^t = -te^{-t} - e^{-t} + 1$

$\lim\limits_{t\to+\infty} F(t) = +1$

donc l'intégrale I_4 est convergente.

2) On montre que l'intégrale imprope

$$I_5 = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x + 2\cos x}{x^2} dx$$

est absolument convergente.

$\int\limits_1^{+\infty} \left|\frac{\sin x + 2\cos x}{x^2}\right| dx \leq \int\limits_1^{+\infty} \frac{3}{x^2} dx$

et $\int\limits_1^{+\infty} \frac{3}{x^2} dx = 3\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ est convergente

donc I_5 est convergente.

Exercice 3: Résoudre les équations différentielles suivantes

1) $xy' = y + 1 \Longrightarrow \frac{y'}{y+1} = \frac{1}{x}$

donc

$$\int \frac{y'}{y+1} dx = \int \frac{1}{x} dx$$

$\ln |y + 1| = \ln |x| + c, c \in \mathbb{R}$

alors $\mathrm{e}^{\ln|y+1|} = e^{\ln|x|+c}, c \in \mathbb{R}$

$$y(x) = kx - 1, k \in \mathbb{R}$$

donc $y'(x) = k$ et

$$\begin{aligned} xk &= kx - 1 + 1 \\ xy' &= y + 1 \end{aligned}$$

2)$yy' = -2$

alors $\int yy' dx = \int -2dx$

c'est à dire $\int ydy = \int -2dx$

donc $\frac{y^2}{2} = -2x + c, c \in \mathbb{R}$

$$y^2 = -4x + c, c \in \mathbb{R}$$

3) $xy' = e^y$

On peut écrire cette équation sous la forme

$$\frac{y'}{e^y} = \frac{1}{x}$$

$$\int y' e^{-y} dx = \int \frac{1}{x} dx$$

$$\int e^{-y}dy = \int \frac{1}{x}dx$$

$$-e^{-y} = \ln|x| + c, c \in \mathbb{R}$$

$$e^{-y} = -\left(\ln|x| + c\right), c \in \mathbb{R}$$

dans le cas

$-\left(\ln|x| + c\right) \geq 0$

on a:

$$y\left(x\right) = -\ln\left(-\left(\ln|x| + c\right)\right)$$

4)$y' = y + x^2y^3$

alors$\frac{y'}{y^3} = \frac{y}{y^3} + x^2 \Longrightarrow \frac{y'}{y^3} = \frac{1}{y^2} + x^2$

on pose $z = \frac{1}{y^2} \Longrightarrow z' = -3\frac{y'}{y^3}$

donc

$$\frac{z'}{-3} = z + x^2$$

c'est à dire $z' = -3z - 3x^2 \Longleftrightarrow z' + 3z = -3x^2$

on cherche une solution particulière $z_p = ax^2 + bx + c$

$z_p' = 2ax + b$

$z' + 3z = -3x^2$

$2ax + b + 3\left(ax^2 + bx + c\right) = -3x^2$

$$3ax^2 + \left(2a + 3b\right)x + 3c + b = -3x^2$$

$\left\{\begin{array}{c} 3a = -3 \\ 2a + 3b = 0 \\ 3c + b = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} a = -1 \\ b = \frac{2}{3} \\ c = \frac{-2}{9} \end{array}\right.$

donc la solution particulière est

$$z_p(x) = -x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{-2}{9}$$

Résoudre l'équation homogène:

$$z' + 3z = 0$$

c'est à dire

$$\frac{z'}{z} = -3$$

donc

$$\int \frac{z'}{z} dx = \int -3dx$$

$\ln z = -3x + c, c \in \mathbb{R}$ alors

$$z_h(x) = ke^{-3x}, k \in \mathbb{R}$$

la solution générale de l'équation non homogène est

$$z(x) = ke^{-3x} - x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{-2}{9}, k \in \mathbb{R}$$

Exercice 4: Résoudre les équations différentielles suivantes

$$y'' + 2y' + y = x^2 e^x$$

l'équation homogéne est

$$y'' + 2y' + y = 0$$

l'équation caractéristique : $r^2 + 2r + 1 = 0$;on a $\triangle = 0$; $r = -1$ racine double donc la solution générale de l'équation homogène est donne par

$$y_h = (c_1 x + c_2)e^{-x}; c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

2) On cherche une solution particulière de l'équation non homogène, comme 1 n'est pas une solution de l'équation caractéristique, alors $y_p(x) = q(x)e^x$ tel que $degq = 2$;

$y_p(x) = (ax^2 + bx + c)e^x$ donc

$y_p'(x) = (2ax + b)e^x + (ax^2 + bx + c)e^x$

$y_p''(x) = 2ae^x + 2(2ax + b)e^x + (ax^2 + bx + c)e^x$

En remplaçant dans (E), on trouve

$2ae^x + 2(2ax+b)e^x + (ax^2+bx+c)e^x - 4(2ax+b)e^x - 4(ax^2+bx+c)e^x + 4(ax^2+bx+c)e^x = x^2 e^x$

$((a-1)x^2 + (b-4a)x + c + b + 2a)e^x = 0$

$$\begin{cases} a - 1 = 0 \\ b - 4a = 0 \\ c - 2b + 2a = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \\ c = 6 \end{cases}$$

donc la solution particulière $y_p(x) = (x^2 + 4x + 6)e^x$

finalement la solution générale de l'équation non homogène est

$y(x) = y_h = (c_1 x + c_2)e^{-x} + (x^2 + 4x + 6)e^x; c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Bibliography

[1] Miloudi Yamina; *Analyse 3, Cours Détaillés et Exercices Corrigés,* (2016).

[2] Mustapha. Sadouki; *Cours mathématiques pour la Physique.*