alg2. 18.19. ex

Université de Béjaia
Département d'Informatique
$1^{\text{ère}}$ Année Lic.
Durée : 1 h 30 min

19 juin 2019

Examen d'Algèbre 2

Exercice 1 *(7pts)*

Considérons les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 11 & -2 \\ -7 & 13 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer A^2, $A + B$, $-2A$.
2. Calculer $AD - A^2$.
3. En déduire A^{-1}.

Exercice 2 *(7pts)*

Considérons l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ donnée par :
$f(x, y, z) = (x - 2y + z, -2x + 4y - 2z)$.

1. Donner la définition d'une application linéaire.
2. Montrer que f est une application linéaire.
3. Trouver $\ker(f)$, $\text{Im}(f)$.
4. Donner une base de $\ker(f)$ et une base de $\text{Im}(f)$.
5. En déduire $\dim(\ker(f))$ et $\dim(\text{Im}(f))$.

Exercice 3 *(6pts)*

Soit $B = \{e_1, e_2\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$, et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire donnée par : $f(x, y) = (5x - 2y, 6x - 2y)$.
Soit $\acute{B} = \{a, b\}$ où $a = e_1 + 2e_2$, $b = 2e_1 + 3e_2$.

1. Donner la matrice A de f dans la base B.
2. Montrer que $\acute{B}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
3. Déterminer la matrice de passage P de B à $\acute{B}$.
4. Calculer P^{-1}.
5. Déterminer la matrice $\acute{A}$ de f dans la base $\acute{B}$.

Exo2 = Interrogation 2, pour les groupes A1, A2, A3, A4, B3.
Exo2 = Interrogation, pour les groupes B1, B2, B4.

Corrigé : Algèbre 2

19/06/2019

Exo 1

(1) $A^2 = \begin{bmatrix} 39 & 16 \\ 56 & 23 \end{bmatrix}$. (1)

$A + B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$ (1)

$-2A = \begin{bmatrix} -10 & -4 \\ -14 & -6 \end{bmatrix}$ (1)

(2) $AD - A^2 = \begin{bmatrix} 41 & 16 \\ 56 & 25 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -39 & -16 \\ -56 & -23 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ (2)

$AD - A^2 = 2I$

(3) Nous avons $AD - A^2 = 2I$.

Alors $A\left[\frac{1}{2}(D - A)\right] = I$.

On conclut que $A^{-1} = \frac{1}{2}(D - A)$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 5 \end{bmatrix}.$$ (2)

Exo 2

(1) Soit V et W deux $\mathbb{K}$-e.v.

Une application linéaire de V dans W est une application $g : V \longrightarrow W$ tq :

(1) (a) $g(v_1 + v_2) = g(v_1) + g(v_2) \quad \forall v_1, v_2 \in V$;

(b) $g(\alpha v) = \alpha\, g(v) \quad \forall \alpha \in \mathbb{K} \quad \forall v \in V$.

(2) Identifiant (x,y,z) avec $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, f peut s'écrire comme

$$f(\underline{v}) = A\underline{v}; \quad \text{où } \underline{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ et } A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \end{bmatrix}.$$

Nous avons $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\forall \underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{R}^3$ $f(\alpha \underline{v} + \beta \underline{w}) = A.(\alpha \underline{v} + \beta \underline{w})$

$$= \alpha A\underline{v} + \beta A\underline{w}$$

$$= \alpha f(\underline{v}) + \beta f(\underline{w}).$$

Donc f est une application linéaire. 1

(3) Considérons le système $f(\underline{v}) = \underline{w}$ où $\underline{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\underline{w} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$.

$$f(\underline{v}) = \underline{w} \Leftrightarrow A\underline{v} = \underline{w}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & \alpha \\ -2 & 4 & -2 & \beta \end{array}\right]$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 2\alpha+\beta \end{array}\right] \quad (L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1). \ 1$$

Alors $f(\underline{v}) = \underline{0} \Leftrightarrow \underline{v} = \begin{pmatrix} 2s-t \\ s \\ t \end{pmatrix}$ pour quelques $s, t \in \mathbb{R}$

(Car de L 1 nous avons $x = 2y - z + \alpha$

On pose $y = s$, $z = t$; s et t sont des paramètres).

Donc $\ker(f) = \{ \underline{v} \in \mathbb{R}^3 : f(\underline{v}) = \underline{0} \}$

$$\ker(f) = \left\{ s\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \ s, t \in \mathbb{R} \right\} \quad 1$$

$$\boxed{\ker(f) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)} \ 1$$

Par (1), $f(\underline{v}) = \underline{w}$ a une solution ssi $2\alpha + \beta = 0$

$\iff \beta = -2\alpha \ldots$ (*)

Donc $\mathrm{Im}(f) = \{ f(\underline{v}) : \underline{v} \in \mathbb{R}^3 \}$

$$= \{ \underline{w} \in \mathbb{R}^2 : \exists\, \underline{v} \in \mathbb{R}^3 \text{ et } f(\underline{v}) = \underline{w} \}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ -2\alpha \end{pmatrix} ; \alpha \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{par (*)}$$

$$= \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} ; \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\boxed{\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}} \ldots (2)$$

1

(4) Soit $\underline{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\underline{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\underline{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Nous avons $\ker(f) = \mathrm{Vect}(\underline{a}, \underline{b})$ 0,5 ... (3)

$\underline{a}$ et $\underline{b}$ sont linéairement indépendants car

$$s\underline{a} + t\underline{b} = \underline{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2s - t \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ 0,5

$$\Rightarrow s = t = 0 \ldots\ldots (4)$$

De (3) et (4), on conclut que $\{\underline{a}, \underline{b}\}$ est une base de $\ker(f)$.

Nous avons $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(\underline{c})$ et $\underline{c} \neq \underline{0}$.

Donc $\{\underline{c}\}$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$. 1

(5) On déduit que $\dim(\ker(f)) = 2$. (0,5)

$\dim(\operatorname{Im}(f)) = 1$. (0,5)

Exo3 $[f(e_1)]_\beta$ $[f(e_2)]_\beta$

(1) $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$. (1)

(2) Soit $\underline{w} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

$$\alpha \underline{a} + \beta \underline{b} = \underline{w} \iff \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x \\ 2 & 3 & y \end{array}\right]$$

$$\iff \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x \\ 0 & -1 & -2x+y \end{array}\right] \quad (L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1).$$

De (L_2), on a $\beta = 2x - y$ ..... (1)

De (L_1), on $\alpha = x - 2\beta$

$= x - 2(2x - y)$

$= -3x + 2y$ ..... (2)

Donc $\alpha \underline{a} + \beta \underline{b} = \underline{w} \iff \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3x + 2y \\ 2x - y \end{pmatrix}$ ..... (3)

Alors $\forall \underline{w} \in \mathbb{R}^2 \; \exists \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ tq $\underline{w} = \alpha \underline{a} + \beta \underline{b}$.

i.e $\mathbb{R}^2 = \operatorname{Vect}(\underline{a}, \underline{b})$ ..... (4) (1)

De (3), on a $\alpha \underline{a} + \beta \underline{b} = \underline{0} \Rightarrow \alpha = \beta = 0$

i.e. $\underline{a}$ et $\underline{b}$ sont lin. indépendants ..... (5) (1)

De (4) et (5) on conclut que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

(3) $$\begin{array}{cc} [a]_\beta & [b]_\beta \\ \end{array}$$
$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad 1.$$

(4) $$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_2 \leftarrow -L_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right]$$

Donc $P^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$. 1

(5) Nous aurons $A' = P^{-1} A P$

$$= \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}. \quad 1$$