UMMTO, Département d'Automatique
Master I en Automatique et Systèmes/ Automatique et Informatique Industrielle
Année universitaire 2018-2019

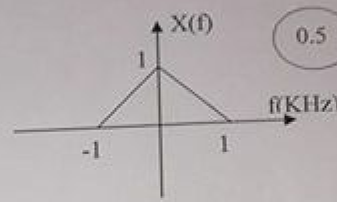
Tizi-Ouzou le 17/02/2019

Durée: 1h40mn

Correction de l'examen

Exercice 1 (4 points)

$$X(f)=\begin{cases}1-|f| & si\ -1Khz \le f \le 1Khz\\ 0 & \sin on\end{cases}$$



0.5

1)- Fréquence d'échantillonnage minimale

Elle est donnée par le théorème de Shanon $\left(F_e^{\min}=2F_{\max}\right)$ avec $F_{\max}$ fréquence maximale du signal.

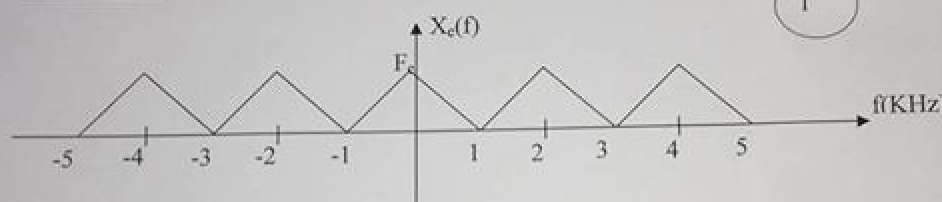
$F_{\max}=1KHz$

1.5

d'où $\boxed{F_e^{\min}=2KHz}$

1

2)



3)- Nombre d'échantillons durant T=10s

$N_e=\dfrac{T}{T_e^{\min}}=T.F_e^{\min}=10\ (2\text{x}10^3)$ soit $\boxed{N_e=2\ 10^4}$

1

Exercice 2 (11 points)

$h(k)=k(0.5)^k u(k)$

1)- Le système est à réponse impulsionnelle infinie (RII) car $h(k)$ possède un nombre infini d'échantillons.

0.5

2)- Le système est causal car sa réponse impulsionnelle $h(k)$ est causale. (h(k)=0 pour k<0).

0.5

3)- Stabilité du système

Le système est stable si: $\sum_{k=-\infty}^{\infty}|h(k)| \prec \infty$

1.5

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}|h(k)|=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left|k(0.5)^k u(k)\right|=\sum_{k=0}^{\infty}\left|k(0.5)^k\right|=\frac{0.5}{(1-0.5)^2}=2 \Rightarrow \text{système stable}$$

4)- Calcul de la TFSD $H(f)$ de $h(k)=k(0.5)^k u(k)$

a)- TFSD

$$H(f)=TFSD\{h(k)\}$$

$$H(f)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{-j2\pi fk}$$

$$H(f)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} k(0.5)^k u(k)e^{-j2\pi fk}=\sum_{k=0}^{\infty} k(0.5)^k e^{-j2\pi fk}=\sum_{k=0}^{\infty} k\left(0.5e^{-j2\pi f}\right)^k=\frac{0.5e^{-j2\pi f}}{\left(1-0.5e^{-j2\pi f}\right)^2}$$

$$\boxed{H(f)=\frac{0.5e^{-j2\pi f}}{\left(1-0.5e^{-j2\pi f}\right)^2}}$$

1

b)- Equation aux différence de ce système

$$H(f)=\frac{Y(f)}{X(f)}=\frac{0.5e^{-j2\pi f}}{\left(1-0.5e^{-j2\pi f}\right)^2}=\frac{0.5e^{-j2\pi f}}{1-e^{-j2\pi f}+0.25e^{-j4\pi f}}$$

1

$$Y(f)\left(1-e^{-j2\pi f}+0.25e^{-j4\pi f}\right)=0.5X(f)e^{-j2\pi f}$$

En appliquant la TFSD inverse, on obtient l'équation aux différences suivante:

$$\boxed{y(k)-y(k-1)+0.25y(k-2)=0.5x(k-1)}$$

5)- La réponse de ce système au signal d'entrée $x(k)$ est $y(k)=x(k)*h(k)$

avec $x(k)=\begin{cases}2k & si\ -1\le k\le 1\\ 0 & \sin on\end{cases}$ et $h(k)=\begin{cases}k(0.5)^k & si\ 0\le k\le 3\\ 0 & \sin on\end{cases}$

On peut utiliser plusieurs méthodes pour le calcul de ce produit de convolution. Cependant, la plus adéquate et la plus simple est celle qui est basée sur la description des deux signaux en fonction des pics de Dirac car le nombre d'échantillons des signaux $x(k)$ et $h(k)$ est fini.

En effet, on peut réécrire les deux signaux $x(k)$ ou $g(k)$ en fonction de $\delta(k)$. Prenons par exemple $g(k)$

$$h(k)=\begin{cases}k(0.5)^k & si\ 0\le k\le 3\\ 0 & \sin on\end{cases}\Rightarrow h(k)=0.5\delta(k-1)+0.5\delta(k-2)+0.375\delta(k-3)$$

$$y(k)=x(k)*h(k)=x(k)*[0.5\delta(k-1)+0.5\delta(k-2)+0.75\delta(k-3)]=0.5x(k-1)+0.5x(k-2)+0.375x(k-3)$$

0.5

$$x(k)=\begin{cases}2k & si\ -1\le k\le 1\\ 0 & \sin on\end{cases}\Rightarrow x(k)=-2\delta(k+1)+2\delta(k-1)$$

$$y(k)=h(k)*x(k)=h(k)*[-2\delta(k+1)+2\delta(k-1)]=-2h(k+1)+2h(k-1)$$

Comme $x(k)$ est défini pour $k\in[-1\ \ 1]$ et $h(k)$ pour $k\in[0\ \ 3]$ alors $y(k)$ sera défini pour $k\in[-1\ \ 4]$.

0.5

Dressons alors le tableau suivant:

k	-1	0	1	2	3	4	Coefficient
x(k)	-2	0	2	0	0	0	
x(k-1)	0	-2	0	2	0	0	0.5
x(k-2)	0	0	-2	0	2	0	0.5
X(k-3)	0	0	0	-2	0	2	0.375
y(k)	0	-1	-1	0.25	1	0.75	

2.5

ou

k	-1	0	1	2	3	4	Coefficient
h(k)	0	0	0.5	0.5	0.375	0	
h(k+1)	0	0.5	0.5	0.375	0	0	-2
h(k-1)	0	0	0	0.5	0.5	0.375	2
y(k)	0	-1	-1	0.25	1	0.75	

$$\boxed{y(k = \delta(k) - \delta(k-1) + 0.25\delta(k-2) + \delta(k-3) + 0.75\delta(k-4)}$$

6)- TFD $H(n)$

$$h(k) = \begin{cases} k(0.5)^k & si\ 0 \le k \le 3 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

Sa durée N est finie, elle est égale à 4. La séquence de ses échantillons est $h(k) = \{0, 0.5, 0.5, 0.375\}$

0.5

$$H(n) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k) e^{\frac{j2\pi kn}{N}} \text{ avec } n = -\frac{N}{2}, \ldots, \frac{N}{2} - 1 \text{ ou } n = 0 \ldots, N-1$$ 0.5

$$H(n) = \sum_{k=0}^{3} h(k) e^{\frac{j\pi kn}{2}} \text{ avec } n = -2, -1, 0, 1 \text{ ou } n = 0, 1, 2, 3$$

Pour n=-2 $\quad H(-2) = \sum_{k=0}^{3} h(k) e^{jk\pi}$

$$H(-2) = h(0)e^{j0} + h(1)e^{j\pi} + h(2)e^{j2\pi} + h(3)e^{j3\pi}$$ 0.5

$$H(-2) = 0 + 0.5(-1) + 0.5(1) + 0.375(-1) = \boxed{-0.375}$$

Pour n=-1

$$H(-1) = \sum_{k=0}^{3} h(k) e^{j\frac{k\pi}{2}}$$

$$H(-1) = h(0)e^{j0} + h(1)e^{j\frac{\pi}{2}} + h(2)e^{j\pi} + h(3)e^{j\frac{3\pi}{2}}$$

$$X(-1) = 0 + 0.5(j) + 0.5(-1) + 0.375(-j) = \boxed{-0.5 + 0.125j}$$ 0.5

Pour n=0

$$H(0) = \sum_{k=0}^{3} h(k) e^{j0}$$

$$H(0) = 0 + 0.5 + 0.5 + 0.375 = \boxed{1.375}$$ 0.5

Pour n=1

$$H(1)=\sum_{k=0}^{3} h(k)e^{-j\frac{k\pi}{2}}$$

$$H(-1)=h(0)e^{-j0}+h(1)e^{-j\frac{\pi}{2}}+h(2)e^{-j\pi}+h(3)e^{-j\frac{3\pi}{2}}$$

0.5

$$H(-1)=0+0.5(-j)+0.5(-1)+0.375(j)=\boxed{-0.5-0.125j}$$

$$\boxed{H(n)=\begin{cases}-0.375 & pour\ n=-2\\ -0.5+0.125j & pour\ n=-1\\ 1.375 & pour\ n=0\\ -0.5-0.125j & pour\ n=1\end{cases}}$$

<u>Exercice 3</u> **(5 points)**

$$y(k)-0.25y(k-1)=x(k)-x(k-2)$$

1)-

1

a)- L'équation aux différences dans le cas générale est donnée par la relation suivant :

$\sum_{i=0}^{N} a_i y(k-i)=\sum_{j=0}^{M} b_j x(k-j)$ avec $M=2$ et $N=1$ $a_0=1$, $a_1=0.25$, $b_0=1$, $b_1=0$, $b_2=-1$

L'ordre du système est donné par la valeur de N qui est égal à 1 dans ce cas.

b)- Causalité: Le système est causal car il n'ya pas des termes de l'entrée qui précédent la sortie.

1

2)- Solution de l'équation aux différences

Méthode fréquentielle

Appliquons la TFSD à l'équation aux différences

$$Y(f)-0.25Y(f)e^{-j2\pi f}=X(f)-X(f)e^{-j4\pi f}\Rightarrow\boxed{H(f)=\frac{Y(f)}{X(f)}=\frac{1-e^{-j4\pi f}}{1-0.25e^{-j2\pi f}}}$$

3