

KHOUANE MEFTAH

Université Abou Bekr Belkaïd – Tlemcen

Laboratoire IS2M

MECANIQUE RATIONNELLE

Notes de Cours et Exercices Corrigés

Physique 4

Introduction

Ce cours de mécanique rationnelle est destiné aux étudiants du semestre 3 des sciences techniques du système LMD et ce dans le cadre du module Physique 4. Il contient des chapitres de cours et des exercices résolus à la fin de chaque chapitre.

Le premier chapitre est consacré à l'étude de la statique en utilisant les torseurs d'actions mécaniques. Il décrit les opérations sur les torseurs, les propriétés principales et les torseurs particuliers. Il définit la notion de systèmes statiquement équivalents et donne un nouvel énoncé au principe fondamental de la statique.

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude de la cinématique du solide dans l'espace. Il donne les principales relations de la cinématique du solide (vitesses et accélérations) et traite la composition du mouvement. Il décrit les caractéristiques des mouvements plans et les paramètres utilisés dans l'espace (angles d'Euler). Il définit, la dérivée d'un vecteur dans différents repères, les notions d'équiprojectivité, le centre instantané de rotation et le torseur cinématique.

Le troisième chapitre est consacré à l'étude de la cinétique. Il définit les notions de quantité de mouvement, de moment cinétique, d'énergie cinétique et énonce les théorèmes correspondants. Il donne les éléments concernant le calcul du centre de gravité et des matrices d'inertie et énonce le principe fondamental de la dynamique.

En fin, le dernier chapitre est consacré à l'étude du principe des travaux virtuels et aux équations de Lagrange. Il définit la notion du déplacement virtuel compatible avec une liaison et le travail virtuel associé. Il donne les différents types de liaison, énonce le principe des travaux virtuels et établit les équations de Lagrange.

TABLE DES MATIERES

STATIQUE PAR LES TORSEURS	6
I - Systèmes de forces statiquement équivalents	6
1. Définition	
2. Exemples	6
II - Définitions et notations	8
III – Ecriture d’un torseur en différents points	8
IV - Opérations sur les torseurs	9
1. Addition ou somme de torseurs	9
2. Multiplication par un scalaire	9
3. Torseurs égaux	9
V - Torseurs particuliers	9
1. Torseur nul	9
2. Torseur couple	9
3. Glisseur	11
VI - Propriétés des torseurs dans le cas général	12
1. Equiprojectivité des moments	13
2. Evolution des écritures et propriétés	13
VII - Principe fondamental de la statique	14
TD N°1 : Statique par les torseurs	17
Solution du TD N°1	20
 CINEMATIQUE DU SOLIDE	 27
I – Mouvement plan	27
1. Etude générale, exemples	27
2. Vecteur rotation et accélération angulaire	28
II – Dérivée par rapport au temps d’un vecteur dans différents repères	29
1. Dérivée d’un vecteur de base	29
2. Dérivée d’un vecteur \vec{Q} dans des repères différents	29
III - Relation entre les vitesses des points d’un solide	31

1. Formule générale	31
2. Propriété d'équiprojectivité	31
IV - Centre instantané de rotation	33
V - Torseur Cinématique	34
VI - Relation entre les accélérations des points d'un solide	34
VII - Paramétrages utilisés dans l'espace	35
1. Paramètres utilisés pour repérer la position d'un point	35
2. Paramètres utilisés pour repérer la position angulaire du solide	35
TD N°2 : Cinématique	37
Solution du TD N°2	39
 CINETIQUE	 44
I. Systèmes à masse conservative	44
II – Centre de gravité ou centre de masse	44
1. Définition	44
2. Détermination de la position du centre de gravité	45
3. Centre de gravité des solides composés	47
III – Moments d'inertie – Matrice d'inertie	48
1. Moment d'inertie d'un point matériel ou d'une masse élémentaire	48
2. Moment d'inertie d'un solide de masse m par rapport à un axe	48
3. Rayon de gyration	48
4. Changement d'axe	50
5. Moment d'inertie des solides composés	50
6. Produit d'inertie J_{xy}, J_{xz}, J_{yz}	50
7. Matrice ou tenseur d'inertie	50
IV Quantité de mouvement	53
V - Moment cinétique – Torseur cinétique	54
1. Moment cinétique au centre de gravité G	54
2. Cas d'un solide ayant un point fixe A.	55
3. Moment cinétique en un point O quelconque	55
4. Torseur cinétique	56
VI - Energie cinétique	56
1. Définition 1	56
2. Définition 2	57

3. Cas particuliers	57
VII – Principe fondamental de la dynamique	58
VIII – Théorèmes sur l'énergie	59
IX – Loi de conservation de l'énergie	61
TD N°3 : Détermination du centre de gravité d'un solide	62
Solution du TD N°3	64
TD N°4 : Calcul du moment d'inertie et du tenseur d'inertie	70
Solution du TD N°4	71
TD N°5 : Calcul du moment cinétique et de l'énergie cinétique	72
Solution du TD N°5	74
TD N°6 : Théorèmes généraux	81
Solution du TD N°6	84
 PRINCIPE DES TRAVAUX VIRTUELS, EQUATIONS DE LAGRANGE	 92
I – Principe du travail virtuel	92
1. Déplacement virtuel	92
2. Liaisons imposées au système	93
3. Travail virtuel	95
4. Principe du travail virtuel (PTV)	95
II – Equations de Lagrange	98
1. Equations de Lagrange pour un système à paramètres indépendants	99
2. Les paramètres ne sont pas indépendants mais liés par des relations de liaison holonomes et non holonomes	100
TD N° 7 : PRINCIPE DU TRAVAIL VRTUEL	104
Solution du TD N°7	105
TD N°8 : EQUATIONS DE LAGRANGE	108
Solution du TD N°8	111
 RECUEIL DES EXAMENS	 117

STATIQUE PAR LES TORSEURS

Objectifs

- Définir la notion de systèmes statiquement équivalents et la notion de torseurs d'action mécaniques.
- Donner la méthode permettant d'écrire un torseur en différents points.
- Décrire les opérations sur les torseurs, les propriétés principales et les torseurs particuliers : glisseur, torseur couple et torseur nul.
- Donner un nouvel énoncé au principe fondamental de la statique.

Les torseurs sont des outils de modélisation analogues aux vecteurs, utilisés pour représenter des actions mécaniques, des vitesses et diverses autres grandeurs. Dans ce chapitre, nous nous limiterons à l'étude des torseurs d'actions mécaniques (ou système force-couple), les propriétés abordées pourront être généralisées aux autres torseurs.

I - Systèmes de forces statiquement équivalents

Cette notion est particulièrement utile pour comprendre les torseurs.

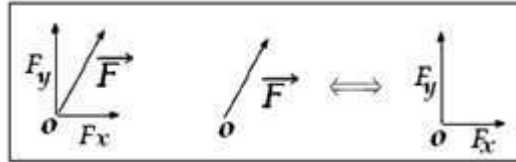
1. Définition

Deux systèmes de forces sont statiquement équivalents s'ils ont même somme vectorielle et même moment résultant en tout point.

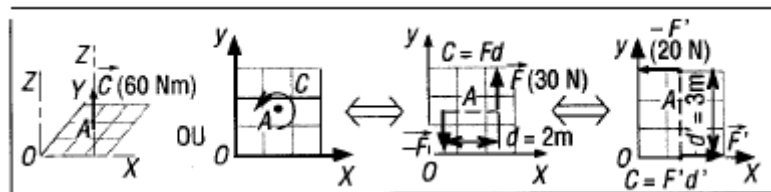
Propriétés : dans tout problème de statique, un système de forces pourra toujours être remplacé par un autre système de forces qui lui est statiquement équivalent : les systèmes sont interchangeables. Autrement dit, l'utilisation de l'un ou de l'autre système ne modifie ni les équilibres, ni les mouvements, ni les résultats obtenus.

2. Exemples

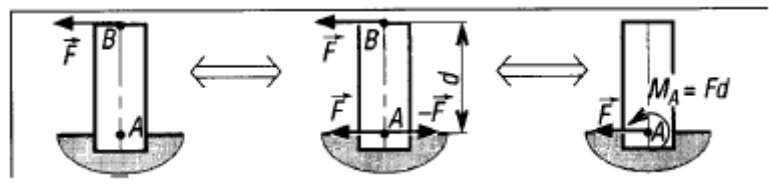
Exemple 1 : une force \vec{F} appliquée en un point O et ses composantes au même point sont des systèmes statiquement équivalents.



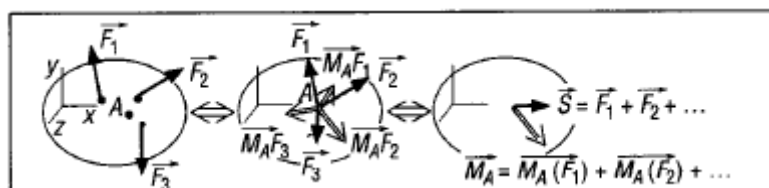
Exemple 2 : un couple C est statiquement équivalent à deux forces \vec{F} et $-\vec{F}$ égales et opposées, distantes de d ($C=Fd$). Une infinité de solutions sont possibles.



Exemple 3 : une force \vec{F} peut être remplacée en n'importe quel point A par un système force (\vec{F}) plus couple \vec{M}_A qui lui est statiquement équivalent.



Exemple 4 : tout système de n forces ($\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$) dans l'espace est statiquement équivalent (autrement dit peut se réduire) en tout point A à un système force \vec{S} plus un couple \vec{M}_A tel que : $\vec{S} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n$ et $\vec{M}_A = \vec{M}_A(\vec{F}_1) + \vec{M}_A(\vec{F}_2) + \dots + \vec{M}_A(\vec{F}_n)$



Remarque : il suffit de répéter n fois le raisonnement de l'exemple 3, puis de faire les sommes vectorielles respectives.

II - Définitions et notations

Défini en un point donné A, un torseur d'action mécanique est un système force-couple constitué de deux grandeurs :

- a) Une force ou somme vectorielle \vec{S} , indépendante du point choisi.
- b) Un couple ou moment résultant \vec{M}_A , fonction du point A choisi.

Notation : $\left\{ \begin{matrix} \text{torseur} \\ \text{en A} \end{matrix} \right\} = \{T_A\}_A = \begin{Bmatrix} X & L_A \\ Y & M_A \\ Z & N_A \end{Bmatrix}_A$

Remarque 1 : dans le repère (xyz), \vec{S} et \vec{M}_A s'écrivent :

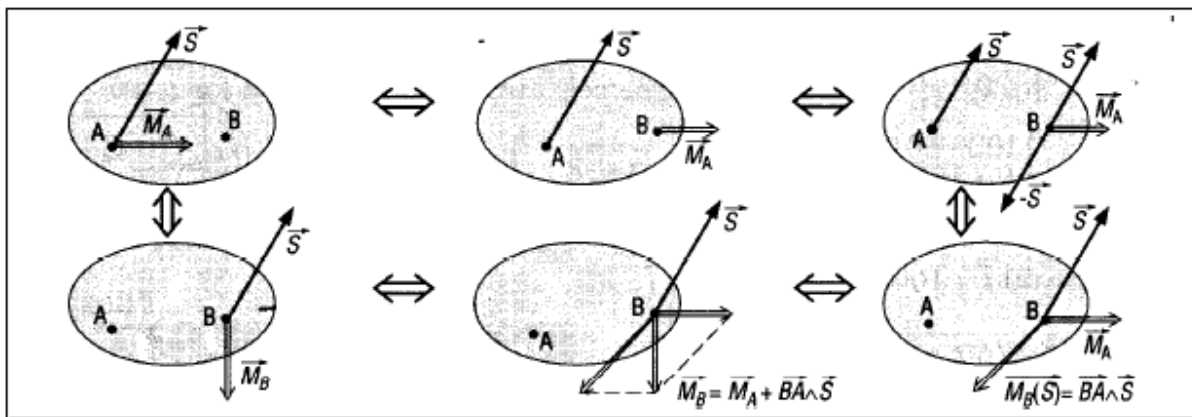
$$\vec{S} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k} \text{ et } \vec{M}_A = L_A\vec{i} + M_A\vec{j} + N_A\vec{k}$$

Remarque 2 : \vec{S} et \vec{M}_A s'appellent les éléments de réduction du torseur. \vec{S} encore notée \vec{R} est aussi appelée résultante générale du torseur.

III - Ecriture d'un torseur en différents points

Un torseur (T) étant connu en un point A, déterminons sa valeur en un point B.

Principe



- a) la somme vectorielle \vec{S} du torseur a même valeur en tout point, elle est invariable.

b) \vec{M}_A étant connu, la valeur du moment en B, \vec{M}_B est obtenue par la relation :

$$\vec{M}_B = \vec{M}_A + \vec{M}_B(\vec{S}) = \vec{M}_A + \vec{BA} \wedge \vec{S}$$

Remarque 1 : de manière générale, si O est l'origine du repère de calcul (Oxyz), les coordonnées de A, B et \vec{BA} sont :

$$\vec{OA} \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix} \quad \vec{OB} \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{pmatrix} \quad \vec{BA} = \begin{pmatrix} x_A - x_B \\ y_A - y_B \\ z_A - z_B \end{pmatrix}$$

Le moment \vec{M}_B est alors égal à :

$$\vec{M}_B = \begin{pmatrix} L_B \\ M_B \\ N_B \end{pmatrix} = \vec{M}_A + \vec{BA} \wedge \vec{S} = \begin{pmatrix} L_A \\ M_A \\ N_A \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_A - x_B \\ y_A - y_B \\ z_A - z_B \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

soit:

$$L_B = L_A + Z(y_A - y_B) - Y(z_A - z_B)$$

$$M_B = M_A - Z(x_A - x_B) + X(z_A - z_B)$$

$$N_B = N_A + Y(x_A - x_B) - X(y_A - y_B)$$

Remarque 2 : on notera que toutes les écritures sont statiquement équivalentes (l'écriture en A est statiquement équivalente à celle en B). De ce fait, on peut choisir n'importe quel point pour écrire le torseur des actions exercées. Les diverses écritures sont comparables aux différentes photos possibles d'un même individu.

IV - Opérations sur les torseurs

1. Addition ou somme de torseurs

Condition impérative : La somme de n torseurs $\{T_1\}, \{T_2\}, \dots, \{T_n\}$ n'est possible que si tous les torseurs de la somme sont écrits au même point.

$$\{T_1\} = \left\{ \begin{matrix} \vec{S}_1 \\ \vec{M}_{1A} \end{matrix} \right\}_A ; \{T_2\} = \left\{ \begin{matrix} \vec{S}_2 \\ \vec{M}_{2A} \end{matrix} \right\}_A ; \dots ; \{T_n\} = \left\{ \begin{matrix} \vec{S}_n \\ \vec{M}_{nA} \end{matrix} \right\}_A$$

$$\{T\}_A = \{T_1\}_A + \{T_2\}_A + \dots + \{T_n\}_A = \left\{ \begin{matrix} \vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2 + \dots + \vec{S}_n \\ \vec{M}_A = \vec{M}_{1A} + \vec{M}_{2A} + \dots + \vec{M}_{nA} \end{matrix} \right\}_A$$

2. Multiplication par un scalaire

Si a est un scalaire (nombre) quelconque et $\{T\}$ un torseur, le produit de a par $\{T\}$ se calcule de la manière suivante :

$$a.\{T\} = a \begin{Bmatrix} \vec{S} \\ \vec{M}_A \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} a.\vec{S} \\ a.\vec{M}_A \end{Bmatrix}_A$$

3. Torseurs égaux

Deux torseurs $\{T_1\}$ et $\{T_2\}$ sont égaux s'ils ont même somme \vec{S} et même moment \vec{M}_A au point A, autrement dit s'ils ont les mêmes éléments de réduction en tout point.

V - Torseurs particuliers

1. Torseur nul

Cas où \vec{S} et \vec{M}_A sont nuls, exemple de notation :

$$\{0\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ en tout point}$$

Remarque : le torseur est nul en tout point de l'espace.

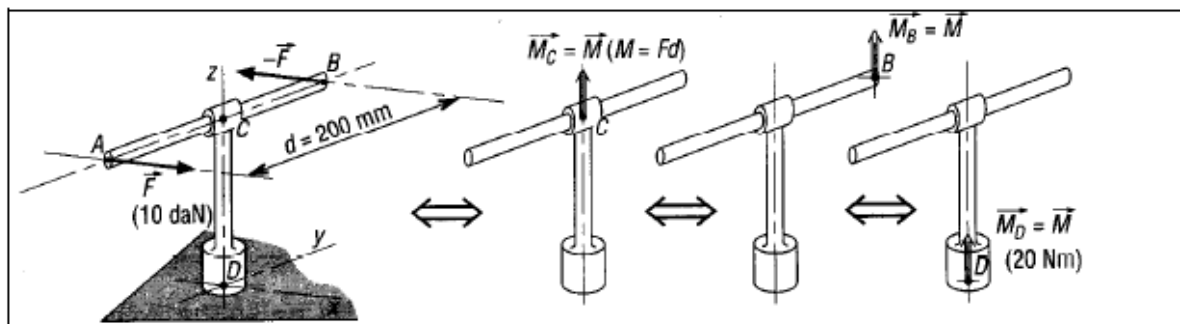
2. Torseur couple

Cas où \vec{S} est nul et \vec{M}_A non nul :

$$\{C\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \vec{M} \end{Bmatrix} \text{ en tout point}$$

Remarque : La relation $\vec{M}_B = \vec{M}_A + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{S}$ donne, dans la mesure où \vec{S} est nulle : $\vec{M}_B = \vec{M}_A + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{0} = \vec{M}_A = \vec{M}$, autrement dit le moment a même valeur \vec{M} en tout point et le torseur couple $\{C\}$ a même écriture en tout point de l'espace.

Exemple



L'ensemble de deux forces $-\vec{F}$ et \vec{F} est statiquement équivalent au couple $\vec{M}_C = \vec{M}$ en C de module $M=Fd=100 \cdot 0.2 = 20 \text{ Nm}$. Le couple a même valeur en tout point de la clé $\vec{M}_D = \vec{M}_C = \vec{M}_B = \vec{M}$. Il en résulte que le couple de serrage exercé sur l'écrou est \vec{M} (20 Nm) d'axe z.

Le torseur couple s'écrit : $\{C\} = \left\{ \begin{matrix} 0 \\ \vec{M} \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 20\vec{k} \end{matrix} \right\}$ en tout point.

3. Glisseur

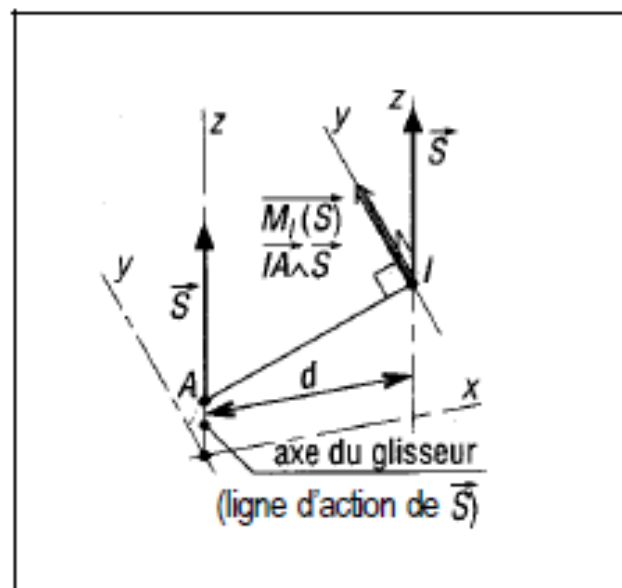
Cas où, en un point, le torseur se réduit à une somme \vec{S} non nulle et un moment \vec{M}_A nul :

$$\{G\}_A = \left\{ \begin{matrix} \vec{S} \\ 0 \end{matrix} \right\}_A$$

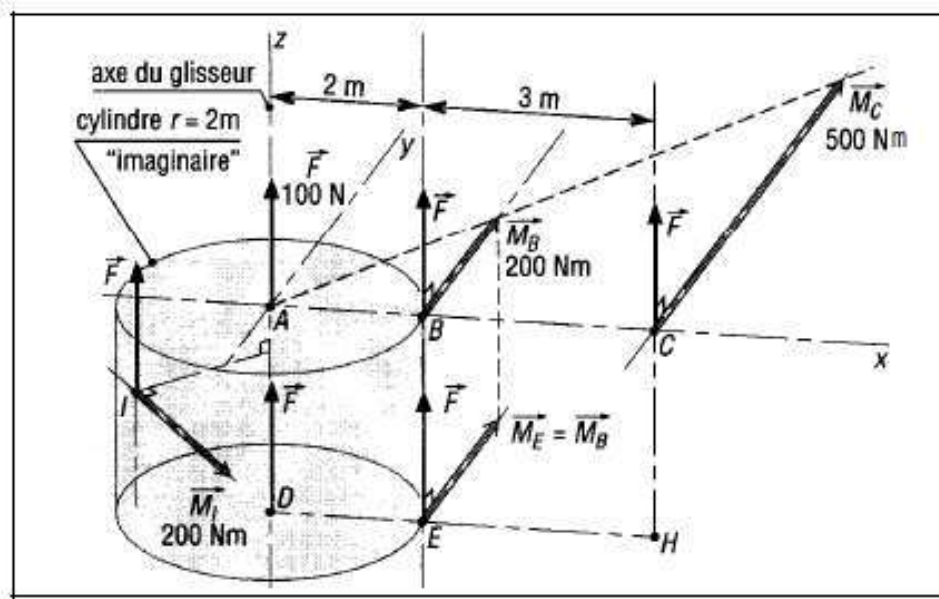
A la ligne d'action de la force correspond l'axe du glisseur. Si A est un point de cette ligne, le moment en A du glisseur est nul ($\vec{M}_A = 0$).

En un point I éloigné de la direction de l'axe du glisseur, le moment \vec{M}_I n'est pas nul :

$\vec{M}_I = \vec{M}_A + \vec{IA} \wedge \vec{S}$, \vec{M}_I est le moment en I de \vec{S} . $\vec{M}_I = \vec{IA} \wedge \vec{S}$. Cette relation montre que \vec{M}_I est perpendiculaire à \vec{IA} et à \vec{S} . Il en résulte la propriété suivante : $\vec{M}_I \cdot \vec{S} = 0$. Le produit scalaire de \vec{M}_I par \vec{S} est toujours nul dans le cas d'un glisseur. Cette propriété, propre aux glisseurs, permet de les distinguer des autres torseurs.



Evolution des écritures d'un même glisseur et propriétés



$$\vec{F} = 100\vec{k}$$

$$\{G\}_A = \{G\}_D = \begin{Bmatrix} 100\vec{k} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{G\}_B = \{G\}_E = \begin{Bmatrix} 100\vec{k} \\ 200\vec{j} \end{Bmatrix}, \vec{M}_B = \vec{M}_A + \vec{BA} \wedge \vec{F} = 200\vec{j}$$

$$\{G\}_C = \{G\}_H = \begin{Bmatrix} 100\vec{k} \\ 500\vec{j} \end{Bmatrix}, \vec{M}_C = \vec{M}_A + \vec{CA} \wedge \vec{F} = 500\vec{j}$$

Remarque :

$$\frac{M_B}{AB} = \frac{M_C}{AC} = \frac{200}{2} = 100$$

L'écriture du glisseur est la même pour tous les points (A, D, etc.) de son axe. L'écriture du glisseur est la même pour tous les points (B, E, etc.) appartenant à une droite parallèle à son axe ou à sa résultante (\vec{F} ou \vec{S}).

Tous les points (B, E, I, etc.) appartenant à la périphérie d'un cylindre d'axe l'axe du glisseur ont des moments de même module $M_B = M_E = M_I = 200 \text{ Nm}$.

VI - Propriétés des torseurs dans le cas général

Dans le cas général, $\vec{S} \neq \vec{0}$; $\vec{M}_A \neq \vec{0}$; $\vec{M}_A \cdot \vec{S} \neq 0$ (le torseur n'est pas un glisseur).

1. Equiprojectivité des moments

Soit $\{T\} = \left\{ \begin{matrix} \vec{S} \\ \vec{M}_A \end{matrix} \right\}_A = \left\{ \begin{matrix} \vec{S} \\ \vec{M}_B \end{matrix} \right\}_B$ avec $\vec{M}_B = \vec{M}_A + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{S}$

Multiplions scalairement les deux membres par \overrightarrow{BA}

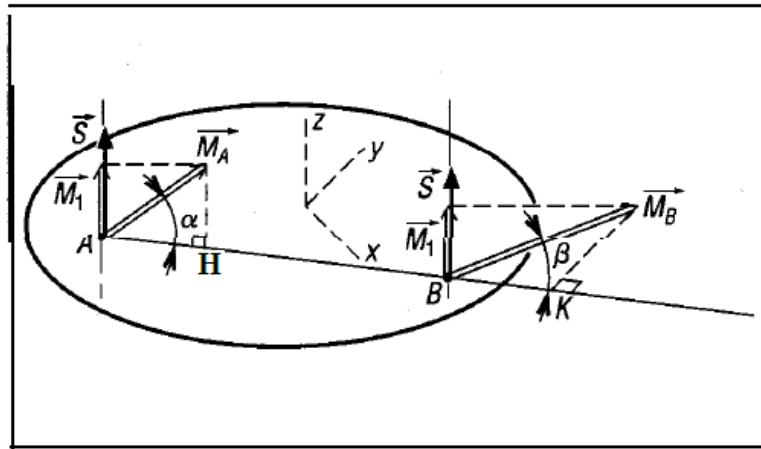
$$\vec{M}_B \cdot \overrightarrow{BA} = \vec{M}_A \cdot \overrightarrow{BA} + (\overrightarrow{BA} \wedge \vec{S}) \cdot \overrightarrow{BA} = \vec{M}_A \cdot \overrightarrow{BA} + 0$$

Remarque : $\overrightarrow{BA} \wedge \vec{S}$ est un vecteur perpendiculaire à la fois à \overrightarrow{BA} et à \vec{S} , il en résulte que :

$$(\overrightarrow{BA} \wedge \vec{S}) \cdot \overrightarrow{BA} = 0$$

d'où

$$\vec{M}_B \cdot \overrightarrow{BA} = \vec{M}_A \cdot \overrightarrow{BA}$$



La projection de \vec{M}_A sur \overrightarrow{AB} est égale à la projection de \vec{M}_B sur \overrightarrow{AB}

On dit qu'il y a equiprojectivité du champ de (l'ensemble) des moments du torseur.

2. Evolution des écritures et propriétés

Tous les torseurs ont un axe central ; de plus cet axe central est unique. Sur l'axe central, la somme \vec{S} et le moment \vec{M}_1 sont colinéaires.

$$\{T\}_A = \{T\}_D = \left\{ \begin{matrix} \vec{F} \\ \vec{M}_1 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 100\vec{k} \\ 150\vec{k} \end{matrix} \right\}$$

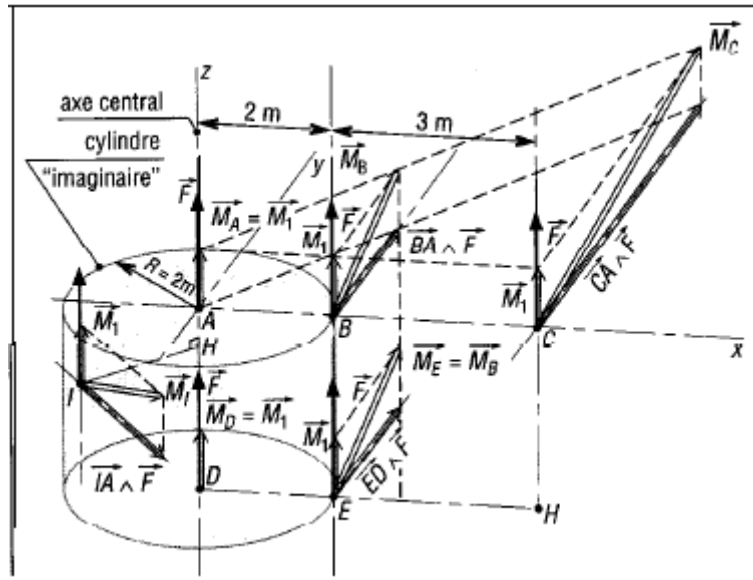
Pour tous les points (B, E, etc.) appartenant à une droite parallèle à \vec{S} , l'écriture est la même.

$$\{T\}_B = \{T\}_E = \left\{ \begin{matrix} \vec{F} \\ \vec{M}_B \end{matrix} \right\}$$

Même remarque en C et H sur CH

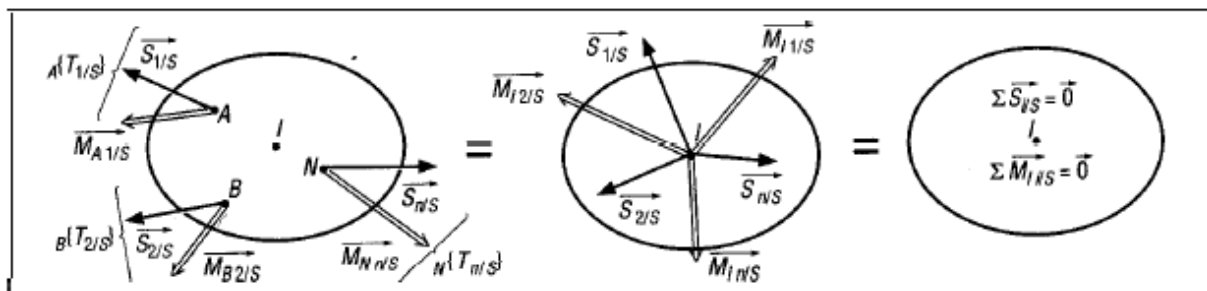
$$\{T\}_C = \{T\}_H = \begin{Bmatrix} \vec{F} \\ \vec{M}_C \end{Bmatrix}$$

Tous les points (B, E, I, etc.) appartenant à la périphérie d'un cylindre d'axe, l'axe central du torseur, ont des moments de même module.



VII - Principe fondamentale de la statique

Enoncé : Un solide (S), en équilibre sous l'action de n torseurs d'actions mécaniques $\{T_{1S}\}_A, \{T_{2S}\}_B, \dots, \{T_{nS}\}_N$ reste en équilibre si la somme des n torseurs tous écrits au même point I est égale au torseur nul : $\{T_{1S}\}_I + \{T_{2S}\}_I + \dots + \{T_{nS}\}_I = \{0\}$



Remarque : $\{T_{1S}\} = \begin{Bmatrix} \vec{S}_{1/S} \\ \vec{M}_{A1/S} \end{Bmatrix}_A$; $\{T_{2S}\} = \begin{Bmatrix} \vec{S}_{2/S} \\ \vec{M}_{B2/S} \end{Bmatrix}_B$; ... ; $\{T_{nS}\} = \begin{Bmatrix} \vec{S}_{n/S} \\ \vec{M}_{Nn/S} \end{Bmatrix}_N$

L'addition des n torseurs se ramène à deux équations vectorielles dans l'espace :

a) $\sum \vec{S}_{iS} = \vec{S}_{1/S} + \vec{S}_{2/S} + \dots + \vec{S}_{n/S} = 0$ donne trois équations scalaires de projection sur les axes x,y,z.

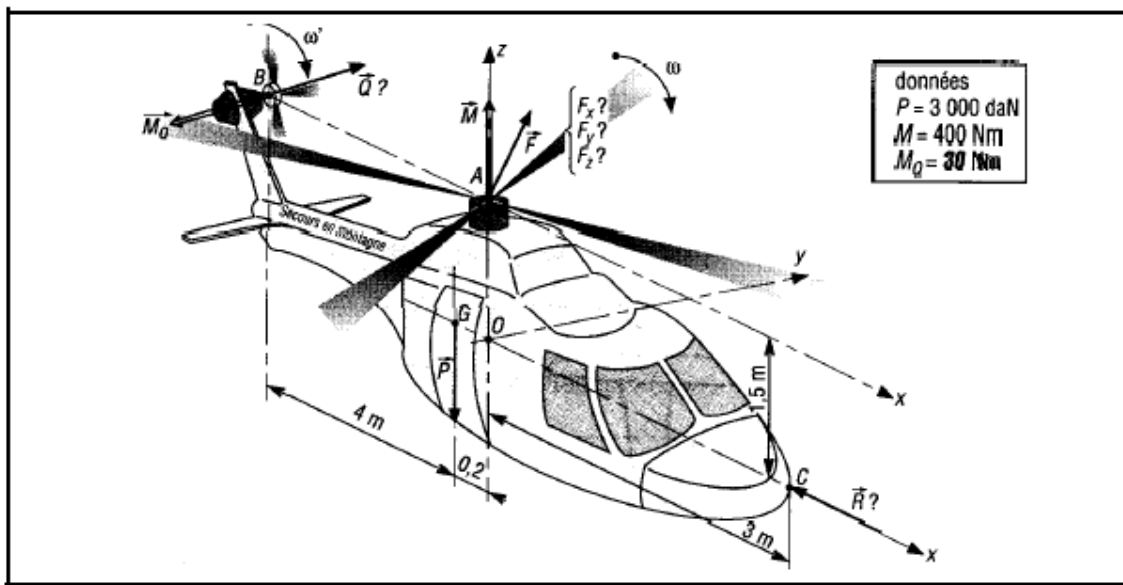
b) $\sum \vec{M}_{iS} = \vec{M}_{1S} + \vec{M}_{2S} + \dots + \vec{M}_{nS} = 0$ donne trois équations scalaires de projection sur les axes x,y,z.

Exemple :

L'hélicoptère proposé évolue horizontalement à vitesse constante suivant l'axe (ox), l'axe (oz) est vertical. \vec{F} et \vec{M} schématisent les actions exercées par l'air sur les pales du rotor principal. \vec{Q} et \vec{M}_Q sont les actions sur le rotor anti-couple. \vec{R} est la résistance de l'air sur l'ensemble de l'appareil et \vec{P} est le poids total.

1- Calculer le torseur résultant en A.

2- Appliquer le principe fondamental de la statique et en déduire \vec{R} , \vec{Q} et \vec{F} .



Solution : L'hélicoptère est soumis à l'action de quatre torseurs d'actions extérieures :

$$1- \text{ Action du poids : } \{T\}_1 = \begin{Bmatrix} \vec{F}_G \\ \vec{M}_G \end{Bmatrix}_G = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -P & 0 \end{Bmatrix}_G = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -0.2 P \\ -P & 0 \end{Bmatrix}_A$$

$$\text{avec } \vec{M}_A(\vec{F}_G) = \vec{M}_G + \vec{AG} \wedge \vec{P} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -0.2 \\ 0 \\ -1.5 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.2P \\ 0 \end{pmatrix}$$

2- Résistance de l'air : $\{T\}_2 = \left\{ \begin{matrix} \vec{F}_C \\ \vec{M}_C \end{matrix} \right\}_C = \left\{ \begin{matrix} -R & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\}_C = \left\{ \begin{matrix} -R & 0 \\ 0 & 1.5R \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\}_A$

avec $\vec{M}_A(\vec{F}_C) = \vec{M}_C + \vec{AC} \wedge \vec{R} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1.5 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1.5R \\ 0 \end{pmatrix}$

3- Action du rotor anti-couple : $\{T\}_3 = \left\{ \begin{matrix} \vec{F}_B \\ \vec{M}_B \end{matrix} \right\}_B = \left\{ \begin{matrix} 0 & 0 \\ Q & -M_Q \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\}_B = \left\{ \begin{matrix} 0 & 0 \\ Q & -M_Q \\ 0 & -4.2Q \end{matrix} \right\}_A$

avec $\vec{M}_A(\vec{F}_B) = \vec{M}_B + \vec{AB} \wedge \vec{Q} = \begin{pmatrix} 0 \\ -M_Q \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -4.2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ Q \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -M_Q \\ -4.2Q \end{pmatrix}$

4- Action du rotor principal : $\{T\}_4 = \left\{ \begin{matrix} \vec{F}_A \\ \vec{M}_A \end{matrix} \right\}_A = \left\{ \begin{matrix} F_x & 0 \\ F_y & 0 \\ F_z & M \end{matrix} \right\}_A$

Les quatre torseurs sont tous écrits au même point A, nous pouvons les additionner :

$$\{T\}_A = \{T\}_1 + \{T\}_2 + \{T\}_3 + \{T\}_4 = \left\{ \begin{matrix} F_x - R & 0 \\ F_y + Q & -M_Q + 1.5R - 0.2P \\ F_z - P & M - 4.2Q \end{matrix} \right\}_A$$

L'hélicoptère avance horizontalement à vitesse constante, nous pouvons donc appliquer le principe fondamental de statique : $\{T\}_A = \{0\}$, qui se traduit par un système de six équations :

$$\begin{cases} F_x - R = 0 \\ F_y + Q = 0 \\ F_z - P = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 0 = 0 \\ -M_Q + 1.5R - 0.2P = 0 \\ M - 4.2Q = 0 \end{cases}$$

Nous obtenons après résolution :

$$F_z = P = 3000 \text{ daN} ; R = (M_Q + 0.2P)/1.5 = 402 \text{ daN} ; Q = \frac{M}{4.2} = 9.5 \text{ daN}$$

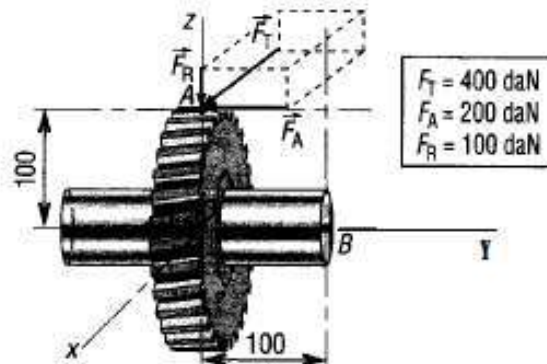
$$F_y = -Q = -9.5 \text{ daN} ; F_x = R = 402 \text{ daN}$$

TD N°1

STATIQUE PAR LES TORSEURS

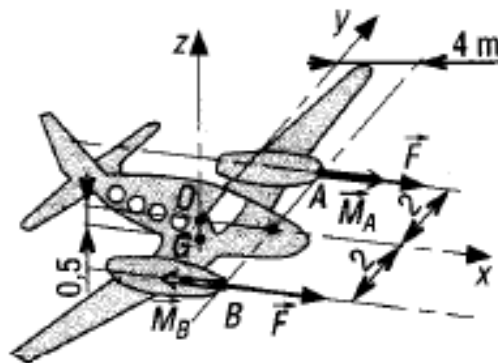
Exercice 1

Une roue dentée à denture hélicoïdale supporte au point A, exercée par une roue dentée, une action dont les composantes sont \vec{F}_A (200 daN charge axiale), \vec{F}_R (100 daN charge radiale) et \vec{F}_T (400 daN charge tangentielle). Ecrire le torseur correspondant à ces actions en A, O et B. (O est l'origine du repère).



Exercice 2

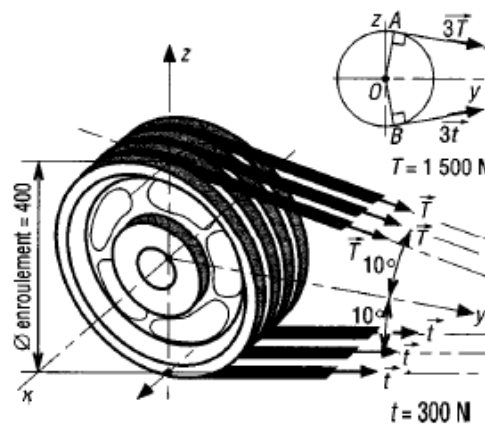
Les hélices d'un avion bimoteur sont supposées tourner en sens inverse l'une de l'autre. $\vec{F} = 3000 \vec{i}$ (N) et $\vec{M}_A = 40 \vec{i}$ (Nm) schématisent les trois actions exercées par l'air sur l'hélice A. \vec{F} et $\vec{M}_B = -40 \vec{i}$ (Nm) schématisent les actions sur l'hélice B. Déterminer le torseur résultant au centre de gravité G.



Exercice 3

Une transmission se compose d'une poulie entraînée par trois courroies trapézoïdales. Le plan (oyz) est le plan de symétrie de l'ensemble et (ox) est l'axe de rotation. Le diamètre d'enroulement des courroies est de 400 mm. Chaque courroie supporte les tensions \vec{T} (1500 N, brin tendu) et \vec{t} (300 N, brin mou).

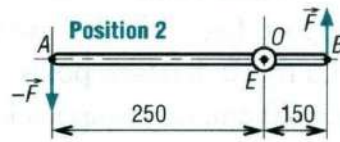
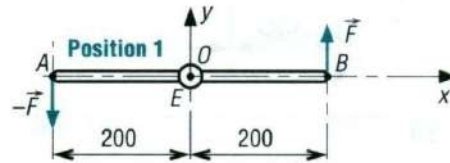
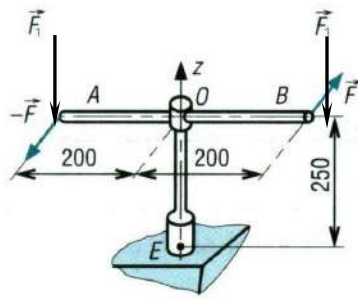
- Ecrire les trois tensions \vec{T} sous forme d'un torseur agissant en A, même chose pour les trois tensions \vec{t} agissant en B.
- Ecrire les deux torseurs précédents au centre O.
- En déduire le torseur résultant en ce point.



Exercice 4

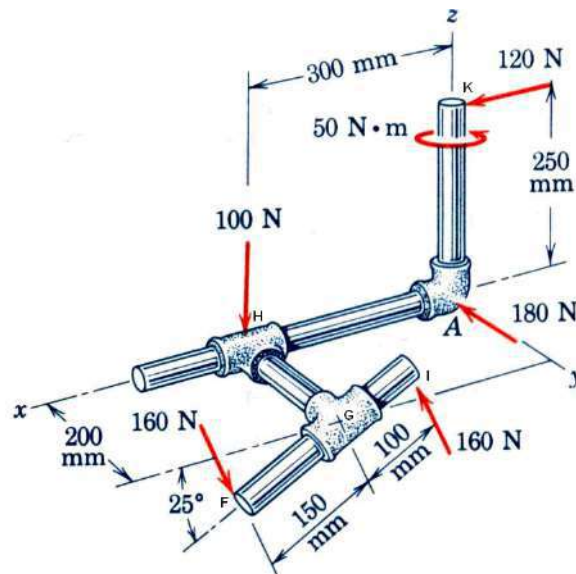
Une clé à bougie se compose d'un corps et d'une tige de manœuvre coulissante. En utilisation, l'opérateur exerce les efforts \vec{F} et \vec{F}_1 ($F = 100$ N et $F_1 = 10$ N) en A et B.

- Déterminer les caractéristiques en E et O du torseur de ces efforts, dans les 2 positions.



Exercice 5

Déterminer le torseur résultant en A.

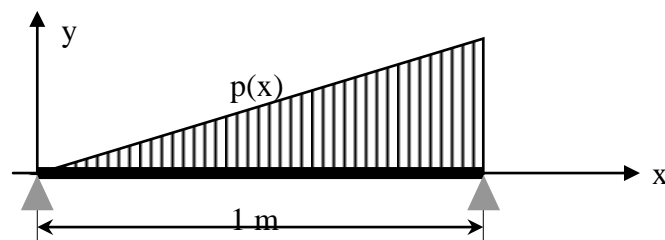


Exercice 6

Une poutre sur 2 appuis est soumise à une charge répartie variant linéairement :

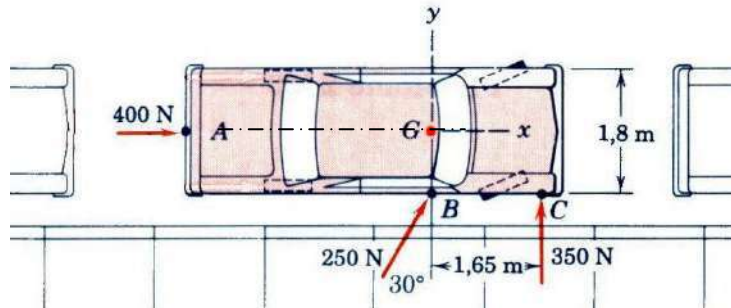
$$\vec{p}(x) = -ax \vec{y} \text{ avec } a = 100 \text{ N/m}^2$$

Déterminer les éléments de réduction les plus simples du torseur associé à la charge $\vec{p}(x)$.



Exercice 7

Pour dégager une voiture en panne prise entre 2 automobiles stationnées, 3 personnes exercent des actions aux points A, B et C.



- 1- Déterminer le torseur résultant de ces actions au point G.
- 2- Vérifier que ce torseur est un glisseur et déterminer son axe.

SOLUTION DU TD N°1

Exercice 1

Toutes les données doivent être converties en unité SI.

Le torseur en A s'écrit :

$$\{T\}_A = \begin{Bmatrix} \vec{F}_A \\ \vec{M}_A \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} F_T & 0 \\ -F_A & 0 \\ -F_R & 0 \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} 4000 & 0 \\ -2000 & 0 \\ -1000 & 0 \end{Bmatrix}_A$$

Ce même torseur s'écrit en B comme suit :

$$\{T\}_B = \begin{Bmatrix} \vec{F}_B \\ \vec{M}_B \end{Bmatrix}_B = \begin{Bmatrix} 4000 & 300 \\ -2000 & 400 \\ -1000 & 400 \end{Bmatrix}_B$$

$$\text{avec } \vec{F}_B = \vec{F}_A \text{ et } \vec{M}_B = \vec{M}_A + \vec{BA} \wedge \vec{F}_A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -0.1 \\ 0.1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 4000 \\ -2000 \\ -1000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 300 \\ 400 \\ 400 \end{pmatrix}$$

Ce même torseur s'écrit aussi en O de la façon suivante:

$$\{T\}_O = \begin{Bmatrix} \vec{F}_O \\ \vec{M}_O \end{Bmatrix}_O = \begin{Bmatrix} 4000 & 200 \\ -2000 & 400 \\ -1000 & 0 \end{Bmatrix}_O$$

$$\text{avec } \vec{F}_O = \vec{F}_A \text{ et } \vec{M}_O = \vec{M}_A + \vec{OA} \wedge \vec{F}_A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 4000 \\ -2000 \\ -1000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 \\ 400 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nous pouvons aussi utiliser les relations : $\vec{F}_O = \vec{F}_B$ et $\vec{M}_O = \vec{M}_B + \vec{OB} \wedge \vec{F}_B$
ce qui donne le même résultat.

Exercice 2

L'avion est soumis à l'action de deux torseurs appliqués aux points A et B :

1- Action en A :

$$\{T\}_1 = \left\{ \begin{matrix} \vec{F}_A \\ \vec{M}_A \end{matrix} \right\}_A = \left\{ \begin{matrix} F & M_A \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\}_A = \left\{ \begin{matrix} F & M_A \\ 0 & 0.5F \\ 0 & -2F \end{matrix} \right\}_G = \left\{ \begin{matrix} 3000 & 40 \\ 0 & 1500 \\ 0 & -6000 \end{matrix} \right\}_G$$

$$\text{avec } \vec{M}_G = \vec{M}_A + \vec{GA} \wedge \vec{F}_A = \begin{pmatrix} M_A \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0.5 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} F \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_A \\ 0.5F \\ -2F \end{pmatrix}$$

2- Action en B :

$$\{T\}_2 = \left\{ \begin{matrix} \vec{F}_B \\ \vec{M}_B \end{matrix} \right\}_B = \left\{ \begin{matrix} F & M_B \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\}_A = \left\{ \begin{matrix} F & M_B \\ 0 & 0.5F \\ 0 & 2F \end{matrix} \right\}_G = \left\{ \begin{matrix} 3000 & -40 \\ 0 & 1500 \\ 0 & 6000 \end{matrix} \right\}_G$$

$$\text{avec } \vec{M}_G = \vec{M}_B + \vec{GB} \wedge \vec{F}_B = \begin{pmatrix} M_B \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0.5 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} F \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_B \\ 0.5F \\ 2F \end{pmatrix}$$

Les deux torseurs sont écrits au même point G, le torseur résultant est égal à :

$$\{T\}_G = \{T\}_1 + \{T\}_2 = \left\{ \begin{matrix} 6000 & 0 \\ 0 & 3000 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\}_G$$

Exercice 3

a- Ecriture des torseurs aux points A et B.

$$\{T\}_1 = \left\{ \begin{matrix} \vec{F}_A \\ \vec{M}_A \end{matrix} \right\}_A = \left\{ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 3T\cos 10^\circ & 0 \\ -3T\sin 10^\circ & 0 \end{matrix} \right\}_A ; \{T\}_2 = \left\{ \begin{matrix} \vec{F}_B \\ \vec{M}_B \end{matrix} \right\}_B = \left\{ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 3t\cos 10^\circ & 0 \\ 3t\sin 10^\circ & 0 \end{matrix} \right\}_B$$

b- Ecriture des torseurs précédents au point O.

$$\{T\}_1 = \left\{ \begin{matrix} \vec{F}_O \\ \vec{M}_O \end{matrix} \right\}_O = \left\{ \begin{matrix} 0 & -3Tr \\ 3T\cos 10^\circ & 0 \\ -3T\sin 10^\circ & 0 \end{matrix} \right\}_O \text{ avec } \vec{F}_O = \vec{F}_A$$

$$\text{et } \vec{M}_O = \vec{M}_A + \vec{OA} \wedge \vec{F}_A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ r\sin 10^\circ \\ r\cos 10^\circ \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 3T\cos 10^\circ \\ -3T\sin 10^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3Tr \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\{T\}_2 = \left\{ \begin{matrix} \vec{F}_O \\ \vec{M}_O \end{matrix} \right\}_O = \left\{ \begin{matrix} 0 & 3tr \\ 3t\cos 10^\circ & 0 \\ 3t\sin 10^\circ & 0 \end{matrix} \right\}_O \text{ avec } \vec{F}_O = \vec{F}_B$$

$$\text{et } \vec{M}_O = \vec{M}_B + \vec{OB} \wedge \vec{F}_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ r \sin 10^\circ \\ -r \cos 10^\circ \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 3t \cos 10^\circ \\ 3t \sin 10^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3tr \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

c- Comme les deux torseurs sont écrits au même point O, nous pouvons donc les additionner :

$$\{T\}_O = \{T\}_1 + \{T\}_2 = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 3(t+T)r \\ 3(t+T)\cos 10^\circ & 0 \\ 3(t-T)\sin 10^\circ & 0 \end{array} \right\}_O = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 1080 \\ 5318 & 0 \\ -625.13 & 0 \end{array} \right\}_O$$

Exercice 4

La force résultante en O est égale à : $\vec{F}_O = 2 \vec{F}_1 = -20\vec{k}$ (N)

Le moment résultant est égal à : $\vec{M}_O = \vec{OB} \wedge \vec{F} + \vec{OA} \wedge (-\vec{F}) + \vec{OB} \wedge \vec{F}_1 + \vec{OA} \wedge \vec{F}_1$

$$\vec{M}_O = (\vec{OB} - \vec{OA}) \wedge \vec{F} + (\vec{OA} + \vec{OB}) \wedge \vec{F}_1 = (\vec{AB}) \wedge \vec{F} + (\vec{OA} + \vec{OB}) \wedge \vec{F}_1$$

$$(\vec{AB}) \wedge \vec{F} = (AB F) \vec{i} \wedge \vec{j} = 0.4 \cdot 100 \vec{k} = 40 \vec{k}$$

$$1- \text{Position 1 : } \vec{OA} + \vec{OB} = 0 \text{ d'où } \vec{M}_O = 40 \vec{k} \text{ (N.m)} \quad \{T\}_O = \left\{ \begin{array}{cc} \vec{F}_O \\ \vec{M}_O \end{array} \right\}_O = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -20 & 40 \end{array} \right\}_O$$

$$2- \text{Position 2 : } \vec{OA} + \vec{OB} = -0.25\vec{i} + 0.15\vec{i} = -0.10\vec{i}$$

$$(\vec{OA} + \vec{OB}) \wedge \vec{F}_1 = -0.10\vec{i} \wedge (-10\vec{k}) = \vec{i} \wedge \vec{k} = -\vec{j}$$

$$\vec{M}_O = -\vec{j} + 40 \vec{k} \text{ (N.m)} \quad \text{D'où} \quad \{T\}_O = \left\{ \begin{array}{cc} \vec{F}_O \\ \vec{M}_O \end{array} \right\}_O = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ -20 & 40 \end{array} \right\}_O$$

En E la force résultante ne change pas $\vec{F}_E = \vec{F}_O$

Le moment en E est égal à : $\vec{M}_E = \vec{M}_O + \vec{EO} \wedge \vec{F}_O = \vec{M}_O$ car $\vec{EO} \parallel \vec{F}_O$

$$\text{d'où} \quad \{T\}_E = \{T\}_O$$

Exercice 5

a) action en A

$$\{T\}_1 = \begin{Bmatrix} \vec{F}_A \\ \vec{M}_A \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -180 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A$$

$$\text{b) action en K : } \{T\}_2 = \begin{Bmatrix} \vec{F}_K \\ \vec{M}_K \end{Bmatrix}_K = \begin{Bmatrix} 120 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 50 \end{Bmatrix}_K = \begin{Bmatrix} 120 & 0 \\ 0 & 30 \\ 0 & 50 \end{Bmatrix}_A$$

$$\vec{M}_A(\vec{F}_K) = \vec{M}_K + A\vec{K} \wedge \vec{F}_K = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 50 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.25 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 120 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 30 \\ 50 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) action en H : } \{T\}_3 = \begin{Bmatrix} \vec{F}_H \\ \vec{M}_H \end{Bmatrix}_H = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -100 & 0 \end{Bmatrix}_H = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 30 \\ -100 & 0 \end{Bmatrix}_A$$

$$\vec{M}_A(\vec{F}_H) = \vec{M}_H + A\vec{H} \wedge \vec{F}_H = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 30 \\ 0 \end{pmatrix}$$

d) Action en I et F

En I et F, nous avons 2 forces égales et opposées (\vec{F} et $-\vec{F}$), nous pouvons les remplacer par un torseur. La force \vec{F} et le bras de force \vec{IF} et le plan formé par ses 2 vecteurs (\vec{F} et $-\vec{IF}$) est le plan xz, et par conséquent le couple est suivant l'axe y.

$$\vec{C} = +F IF \vec{j} = 160 (0.15 + 0.1) \vec{j} = +40 \vec{j} \text{ N.m}$$

Nous avons mis + car la rotation se fait suivant +y.

$$\text{Donc : les forces } \vec{F}_I \text{ et } \vec{F}_H \text{ peuvent être remplacées par un torseur couple : } \{C\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 40 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

Ce torseur couple s'écrit de la même façon en tout du solide, et par conséquent :

$$\begin{aligned} \{T\}_A &= \{T\}_1 + \{T\}_2 + \{T\}_3 + \{C\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -180 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 120 & 0 \\ 0 & 30 \\ 0 & 50 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 30 \\ -100 & 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 40 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix} \\ \{T\}_A &= \begin{Bmatrix} 120 & 0 \\ -180 & 100 \\ -100 & 50 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

Exercice 6

Calculons le torseur résultant en un point G de coordonnées (b,0,0) (b est quelconque) :

La force résultante est égale à : $\vec{F}_G = \int_0^1 \vec{p}(x)dx = \int_0^1 -ax\vec{y}dx = -\frac{a}{2}\vec{y}$

Le moment résultant en G est égal à :

$$\vec{M}_G = \left(\int_0^b ax(b-x)dx - \int_b^1 ax(x-b)dx \right) \vec{k} = \int_0^1 ax(b-x)dx \vec{k} = \frac{a}{2} \left(b - \frac{2}{3} \right) \vec{k}$$

Si on choisit $b = \frac{2}{3}$ alors $\vec{M}_G = 0$

Et le torseur se réduit à : $\{T\}_G = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -50 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_G$ avec $G\left(\frac{2}{3}, 0, 0\right)$

Exercice 7

La voiture est soumise à 3 torseurs :

a) action en A : $\{T\}_1 = \begin{Bmatrix} \vec{F}_A \\ \vec{M}_A \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} 400 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} 400 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_G$

car $\vec{M}_G = \vec{M}_A + G\vec{A} \wedge \vec{F}_A = 0$ car $\vec{F}_A // \vec{M}_A$.

b) action en B : $\{T\}_2 = \begin{Bmatrix} \vec{F}_B \\ \vec{M}_B \end{Bmatrix}_B = \begin{Bmatrix} 250 \sin 30 & 0 \\ 250 \cos 30 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_B = \begin{Bmatrix} 125 & 0 \\ 216.51 & 0 \\ 0 & 112.5 \end{Bmatrix}_G$

car $\vec{M}_G = \vec{M}_B + G\vec{B} \wedge \vec{F}_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -0.9 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 125 \\ 216.51 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.9 * 125 = 112.5 \end{pmatrix}$

c) action en C : $\{T\}_3 = \begin{Bmatrix} \vec{F}_C \\ \vec{M}_C \end{Bmatrix}_C = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 350 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_C = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 350 & 0 \\ 0 & 577.5 \end{Bmatrix}_G$

car $\vec{M}_G = \vec{M}_C + G\vec{C} \wedge \vec{F}_C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1.65 \\ -0.9 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 350 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.65 * 350 = 577.5 \end{pmatrix}$

Le torseur résultant en G est égal à :

$$\{T\}_G = \{T\}_1 + \{T\}_2 + \{T\}_3 = \begin{Bmatrix} 400 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_G + \begin{Bmatrix} 125 & 0 \\ 216.51 & 0 \\ 0 & 112.5 \end{Bmatrix}_G + \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 350 & 0 \\ 0 & 577.5 \end{Bmatrix}_G = \begin{Bmatrix} 525 & 0 \\ 566.51 & 0 \\ 0 & 690 \end{Bmatrix}_G$$

La force résultante est égale à : $\vec{R} = 525\vec{i} + 566.51\vec{j}$

Le moment résultant est égal à $\vec{M}_G = 690\vec{k}$

Le torseur est un glisseur si en un point D(x,y), le moment résultant \vec{M}_D s'annule :

$$\vec{M}_D = \vec{M}_G + D\vec{G} \wedge \vec{F}_G = \vec{M}_G - G\vec{D} \wedge \vec{F}_G = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 690 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 525 \\ 566.51 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 690 - (566.51x - 525y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Soit $690 - (566.51x - 525y) = 0$ ou $566.51x - 525y - 690 = 0$

La droite d'équation $566.51x - 525y - 690 = 0$ est l'axe du glisseur. Pour tous les points appartenant à cette droite, le torseur se réduit à un glisseur

CINEMATIQUE DU SOLIDE

Objectifs

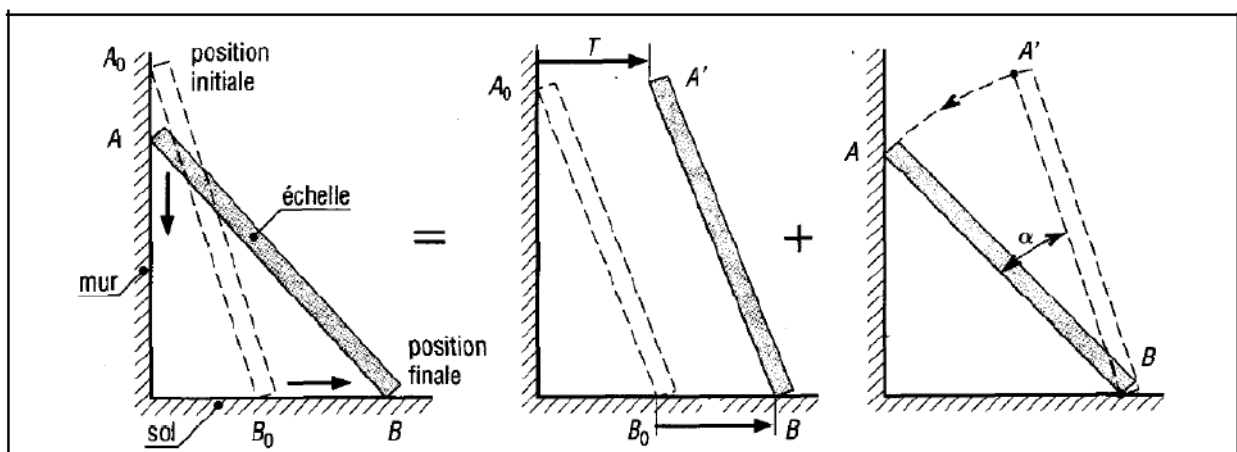
- Décrire les caractéristiques des mouvements plans
- Définir la dérivée d'un vecteur dans différents repères
- Définir et développer les notions d'équiprojectivité et de centre instantané de rotation.
- Donner les principales relations de la cinématique du solide (vitesses et accélérations).
- Définir le torseur cinématique. Traiter la composition du mouvement.
- Décrire les paramètres utilisés dans l'espace (angles d'Euler)

I – Mouvement plan

1. Etude générale, exemples

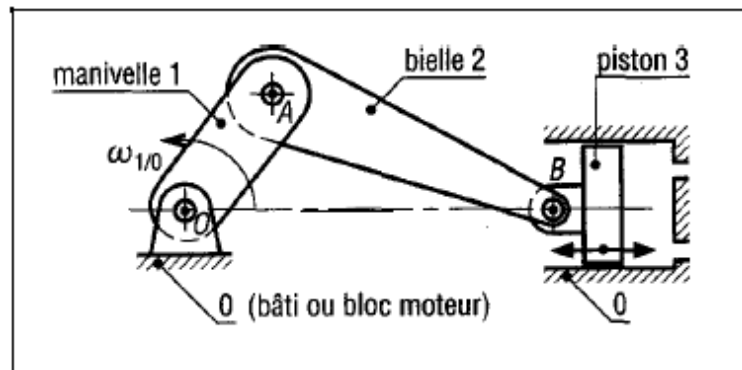
Un mouvement plan peut être considéré comme l'addition d'une translation et d'une rotation.

Exemple 1 : Prenons le cas d'une échelle posée en B sur le sol et appuyée en A sur un mur.



L'échelle décrit un mouvement plan par rapport à l'ensemble (sol+mur). Pour passer de la position initiale (A_0B_0) à la position finale (AB), on peut faire une translation (T) amenant B_0 en B et A en A' suivie d'une rotation d'axe B d'angle α amenant A' en A .

Exemple 2 : Système bielle manivelle.



Les liaisons en O, A et B sont des pivots dont les axes sont perpendiculaires au plan de la figure. Le mouvement $M_{3/0}^{vt}$ du piston (3) par rapport au bâti (0) est une translation rectiligne de direction OB. Le mouvement $M_{1/0}^{vt}$ de la manivelle (1) par rapport à (0) est une rotation d'axe O. Le mouvement $M_{2/0}^{vt}$ de la bielle (2) par rapport à (0) est un mouvement plan général.

2. Vecteur rotation et accélération angulaire

La représentation vectorielle de la vitesse de rotation $\vec{\omega}$ est nécessaire aux études cinématiques.

L'axe de rotation est toujours perpendiculaire au plan du mouvement. Si le plan du mouvement est le plan (O,x,y) alors l'axe de rotation est Oz. La vitesse angulaire $\vec{\omega}$ est portée par l'axe de rotation et tel :

$$\vec{v}_A = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OA}$$

Si la rotation se fait de x vers y, $\vec{\omega}$ est positif et est orientée vers le z positifs. Dans le cas contraire, $\vec{\omega}$ est négatif.

Comme pour $\vec{\omega}$, le vecteur accélération angulaire $\vec{\alpha}$ est porté par l'axe de rotation.

L'accélération du point A devient :

$$\begin{aligned} \vec{a}_A &= \vec{\alpha} \wedge \overrightarrow{OA} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OA}) \\ \vec{a}_t &= \vec{\alpha} \wedge \overrightarrow{OA} \quad \vec{a}_n = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OA}) \end{aligned}$$

II – Dérivée par rapport au temps d'un vecteur dans différents repères

1. Dérivée d'un vecteur de base

a) Cas du plan

$\vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0$ sont les vecteurs de base du repère de référence $R_0=(x_0, y_0, z_0)$. $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ sont les vecteurs de base du repère de référence $R=(x, y, z)$. $\vec{\omega} = \omega \vec{k}_0 = \dot{\theta} \vec{k}_0$ est le vecteur rotation de R par rapport à R_0 .

Remarque : $\left(\frac{d\vec{i}_0}{dt}\right)_{R_0} = \vec{0}$; $\left(\frac{d\vec{j}_0}{dt}\right)_{R_0} = \vec{0}$; \vec{i}_0 et \vec{j}_0 sont des vecteurs fixes de R_0 .

$$\left(\frac{d\vec{i}}{dt}\right)_{R_0} = -\dot{\theta} \sin \theta \vec{i}_0 + \dot{\theta} \cos \theta \vec{j}_0 + \cos \theta \left(\frac{d\vec{i}_0}{dt}\right)_{R_0} + \sin \theta \left(\frac{d\vec{j}_0}{dt}\right)_{R_0} = \dot{\theta} (-\sin \theta \vec{i}_0 + \cos \theta \vec{j}_0)$$

$$\left(\frac{d\vec{j}}{dt}\right)_{R_0} = -\dot{\theta} \cos \theta \vec{i}_0 + \dot{\theta} \sin \theta \vec{j}_0 - \sin \theta \left(\frac{d\vec{i}_0}{dt}\right)_{R_0} + \cos \theta \left(\frac{d\vec{j}_0}{dt}\right)_{R_0} = -\dot{\theta} (\cos \theta \vec{i}_0 + \sin \theta \vec{j}_0)$$

Résultats : $\left(\frac{d\vec{i}}{dt}\right)_{R_0} = \dot{\theta} \vec{j} = \vec{\omega} \wedge \vec{i}$ et $\left(\frac{d\vec{j}}{dt}\right)_{R_0} = -\dot{\theta} \vec{i} = \vec{\omega} \wedge \vec{j}$

b) Cas général

On généralise le cas précédent ; $\vec{\omega}_{R/R_0} = \vec{\omega}$ est la vitesse de rotation de R par rapport à R_0

$$\left(\frac{d\vec{i}_0}{dt}\right)_{R_0} = \left(\frac{d\vec{j}_0}{dt}\right)_{R_0} = \left(\frac{d\vec{k}_0}{dt}\right)_{R_0} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \left(\frac{d\vec{i}}{dt}\right)_R = \left(\frac{d\vec{j}}{dt}\right)_R = \left(\frac{d\vec{k}}{dt}\right)_R = \vec{0}$$

$$\left(\frac{d\vec{i}}{dt}\right)_{R_0} = \vec{\omega} \wedge \vec{i} \quad \left(\frac{d\vec{j}}{dt}\right)_{R_0} = \vec{\omega} \wedge \vec{j} \quad \left(\frac{d\vec{k}}{dt}\right)_{R_0} = \vec{\omega} \wedge \vec{k}$$

2. Dérivée d'un vecteur \vec{Q} dans des repères différents

a) cas de repères R et R_0 en translation

l'axe x est constamment parallèle à x_0 , y à y_0 et z à z_0 . La dérivée du vecteur \vec{Q} fonction du temps ($\vec{Q} = \vec{Q}(t)$) est dans ce cas particulier la même dans les deux repères.

$$\left(\frac{d\vec{Q}}{dt}\right)_{R_0} = \left(\frac{d\vec{Q}}{dt}\right)_R \text{ si } R \text{ et } R_0 \text{ sont en translation. } \vec{\omega}_{R/R_0} = \vec{0}$$

b) Cas de repères R et R_0 en mouvement quelconque

$\vec{Q}(t)$ est en mouvement par rapport aux deux repères. $\vec{\omega}_{R/R_0}$ définit la vitesse angulaire de R par rapport à R_0 .

$$\vec{Q} = Q_x \vec{i} + Q_y \vec{j} + Q_z \vec{k} ; \left(\frac{d\vec{Q}}{dt} \right)_R = \dot{Q}_x \vec{i} + \dot{Q}_y \vec{j} + \dot{Q}_z \vec{k}$$

$$\left(\frac{d\vec{Q}}{dt} \right)_{R_0} = \dot{Q}_x \vec{i} + \dot{Q}_y \vec{j} + \dot{Q}_z \vec{k} + Q_x \left(\frac{d\vec{i}}{dt} \right)_{R_0} + Q_y \left(\frac{d\vec{j}}{dt} \right)_{R_0} + Q_z \left(\frac{d\vec{k}}{dt} \right)_{R_0}$$

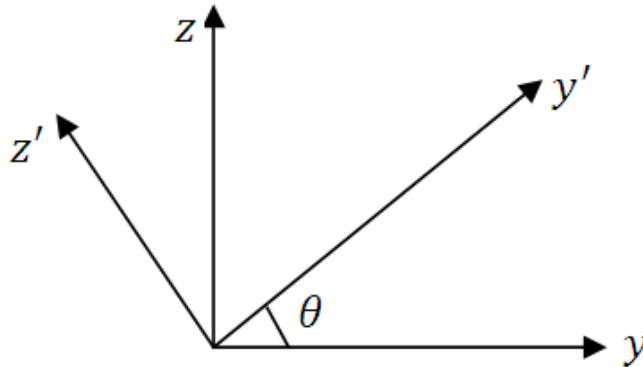
$$\left(\frac{d\vec{Q}}{dt} \right)_{R_0} = \left(\frac{d\vec{Q}}{dt} \right)_R + Q_x (\vec{\omega} \wedge \vec{i}) + Q_y (\vec{\omega} \wedge \vec{j}) + Q_z (\vec{\omega} \wedge \vec{k})$$

$$\left(\frac{d\vec{Q}}{dt} \right)_{R_0} = \left(\frac{d\vec{Q}}{dt} \right)_R + \vec{\omega} \wedge (Q_x \vec{i} + Q_y \vec{j} + Q_z \vec{k})$$

d'où la formule fondamentale :

$$\boxed{\left(\frac{d\vec{Q}}{dt} \right)_{R_0} = \left(\frac{d\vec{Q}}{dt} \right)_R + \vec{\omega}_{R/R_0} \wedge \vec{Q}}$$

Exemple : Soit R_0 (O,x,y,z) un repère fixe et R' (O,x',y',z') un repère mobile tournant autour de l'axe (Ox) avec une vitesse angulaire $\vec{\omega}_{R'/R_0} = \dot{\theta} \vec{i}$. Soit un vecteur $\vec{u}(x, y, z)$ projeté dans le repère R' . Calculer $\left(\frac{d\vec{u}}{dt} \right)_{R_0}$: a) en exprimant $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$ en fonction de $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. b) à l'aide de la dérivée d'un vecteur.



$$\vec{u} = x \vec{i}' + y \vec{j}' + z \vec{k}'$$

a- Nous exprimons $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$ en fonction de $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$

$$\vec{i}' = \vec{i} ; \vec{j}' = \vec{j} \cos \theta + \vec{k} \sin \theta ; \vec{k}' = -\vec{j} \sin \theta + \vec{k} \cos \theta$$

$$\left(\frac{d\vec{i}'}{dt} \right)_{R_0} = 0$$

$$\left(\frac{d\vec{j}'}{dt} \right)_{R_0} = \dot{\theta} (-\vec{j} \sin \theta + \vec{k} \cos \theta) = \dot{\theta} \vec{k}' ; \left(\frac{d\vec{k}'}{dt} \right)_{R_0} = -\dot{\theta} (\vec{j} \cos \theta + \vec{k} \sin \theta) = -\dot{\theta} \vec{j}'$$

$$\left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_{R_0} = \dot{x}\vec{l}' + x\frac{d\vec{l}'}{dt} + \dot{y}\vec{j}' + y\frac{d\vec{j}'}{dt} + \dot{z}\vec{k}' + z\frac{d\vec{k}'}{dt} = \dot{x}\vec{l}' + (\dot{y} - \dot{\theta}z)\vec{j}' + (\dot{z} + \dot{\theta}y)\vec{k}'$$

b- En utilisant la dérivée d'un vecteur, on obtient rapidement le même résultat.

$$\left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_{R_0} = \left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_{R'} + \vec{\omega}_{R'/R_0} \wedge \vec{u} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \dot{x}\vec{l}' + (\dot{y} - \dot{\theta}z)\vec{j}' + (\dot{z} + \dot{\theta}y)\vec{k}'$$

III - Relation entre les vitesses des points d'un solide

1. Formule générale

R_0 est le repère (ou solide) de référence ; R est lié au solide (1) et $\vec{\omega}_{R/R_0}$ définit la vitesse angulaire du solide (1) par rapport à R_0 .

$$\left(\frac{d\vec{OB}}{dt}\right)_{R_0} = \left(\frac{d(\vec{OA} + \vec{AB})}{dt}\right)_{R_0} = \left(\frac{d\vec{OA}}{dt}\right)_{R_0} + \left(\frac{d\vec{AB}}{dt}\right)_{R_0}$$

$$\left(\frac{d\vec{OB}}{dt}\right)_{R_0} = \vec{v}_B ; \left(\frac{d\vec{OA}}{dt}\right)_{R_0} = \vec{v}_A ; \left(\frac{d\vec{AB}}{dt}\right)_{R_0} = \left(\frac{d\vec{AB}}{dt}\right)_R + \vec{\omega}_{R/R_0} \wedge \vec{AB} = \vec{0} + \vec{\omega}_{R/R_0} \wedge \vec{AB}$$

$$\boxed{\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \vec{AB} \text{ ou } \vec{v}_{B1/0} = \vec{v}_{A1/0} + \vec{\omega}_{1/0} \wedge \vec{AB}}$$

$\vec{v}_{B1/0}$ signifie la vitesse du point B par rapport à R_0 (avec B appartient au solide (1)).

2. Propriété d'équiprojectivité

La propriété d'équiprojectivité est l'une des propriétés les plus importantes de la cinématique du solide.

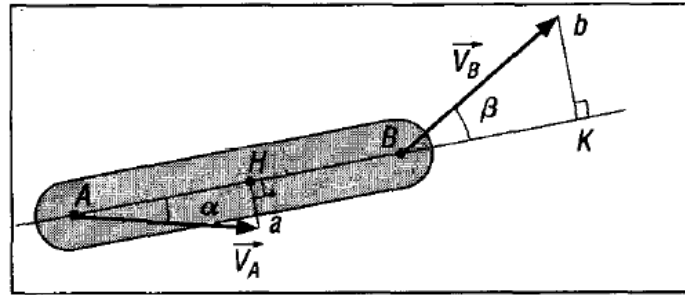
Enoncé : Soit deux points A et B appartenant à un même solide et \vec{v}_A et \vec{v}_B les vecteurs vitesses respectifs. La projection orthogonale de \vec{v}_B sur la droite (AB) est égale à la projection orthogonale de \vec{v}_A sur la droite (AB). Autrement dit, le produit scalaire de \vec{v}_B par \vec{AB} est égal au produit scalaire de \vec{v}_A par \vec{AB}

En effet, multiplions par \vec{AB} les deux termes de l'équation précédente :

$$\vec{v}_B \vec{AB} = \vec{v}_A \vec{AB} + (\vec{\omega} \wedge \vec{AB}) \vec{AB}$$

Or $(\vec{\omega} \wedge \vec{AB}) \cdot \vec{AB} = 0$ car $(\vec{\omega} \wedge \vec{AB})$ est perpendiculaire à \vec{AB} .

$$\vec{v}_B \overrightarrow{AB} = \vec{v}_A \overrightarrow{AB} \text{ ou } \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{BK} \text{ ou } v_A \cos \alpha = v_B \cos \beta$$

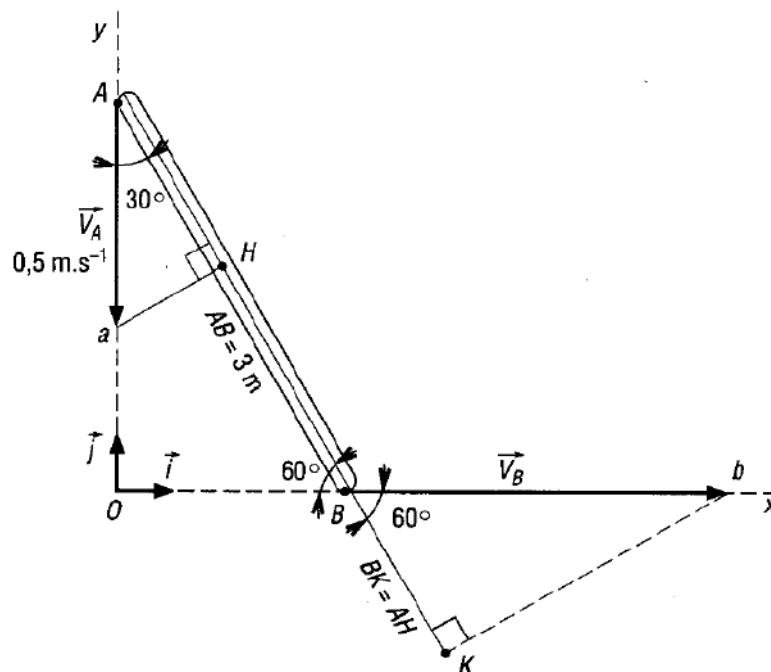


Exemple 1 : reprenons l'exemple de l'échelle. L'échelle de longueur $AB=3\text{m}$, glisse en A, vers le bas à la vitesse de 0.5m/s . Déterminons la vitesse de glissement en B.

$$\vec{v}_B \overrightarrow{AB} = \vec{v}_A \overrightarrow{AB}$$

$$v_A \cos 30^\circ = v_B \cos 60^\circ$$

$$v_B = v_A \cotan 30^\circ = 0.866\text{m/s}$$



Exemple 2 : reprenons le système bielle manivelle avec $OA=35\text{ mm}$, $AB=128\text{ mm}$,

$\omega_{1/0} = 100\text{ rad/s} \approx 1000\text{tr/mn}$) et un angle $\theta = 50^\circ$.

Déterminons les vitesses en A et B.

$$v_A = v_{A1/0} = v_{A2/0} = \omega_{1/0} OA = 100 \cdot 0.035 = 3.5\text{m/s}$$

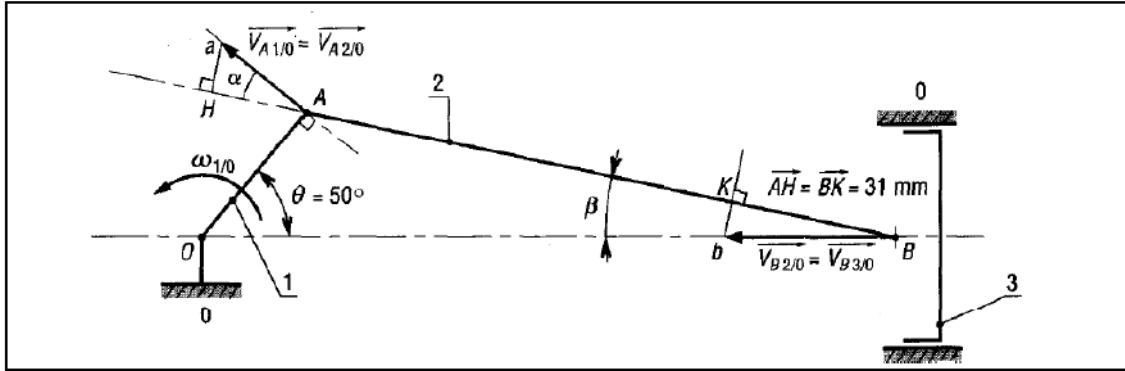
$\vec{v}_{A1/0}$ est perpendiculaire en A à OA.

$v_B = v_{B3/0} = v_{B2/0}$ a pour direction OB ((3) est en translation rectiligne de direction OB).

$$\vec{v}_B \overline{AB} = \vec{v}_A \overline{AB} \Rightarrow v_A \cos \alpha = v_B \cos \beta$$

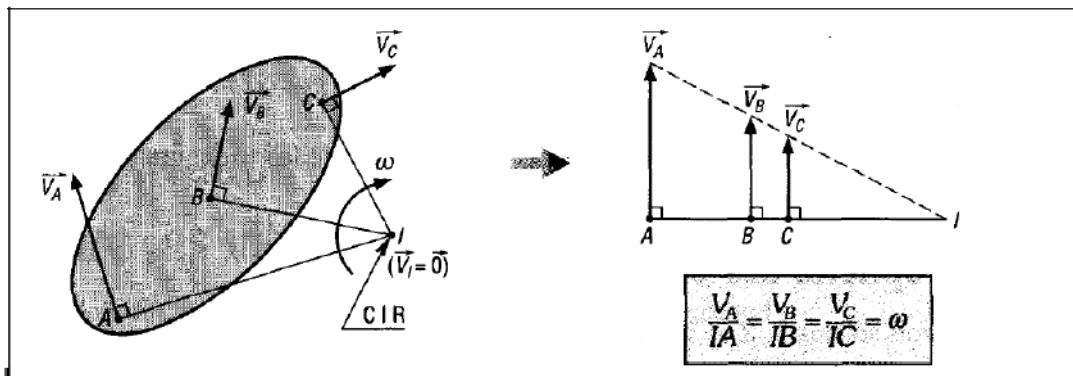
d'après les propriétés d'un triangle : $AB \sin \beta = OA \sin \theta$ et $\alpha = 90^\circ - \theta - \beta$

Résultat : $v_B = 3.163 \text{ m/s}$



IV - Centre instantané de rotation

Pour tout solide en mouvement plan, il existe un point I et un seul, ayant une vitesse nulle ($\vec{V}_I = \vec{0}$) à l'instant considéré. Ce point est appelé centre instantané de rotation ou CIR. Le CIR est situé à l'intersection des perpendiculaires des vecteurs vitesses du solide.

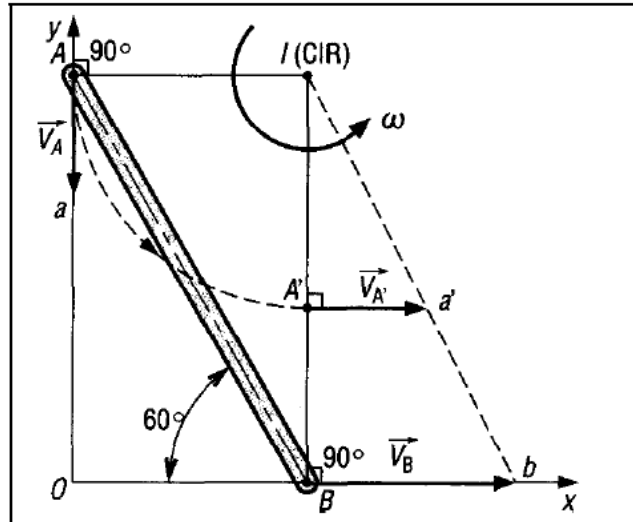


Exemple : reprenons l'exemple de l'échelle avec les mêmes données ; déterminer la position du CIR ; calculer la vitesse angulaire $\vec{\omega}$.

Le CIR I est situé à l'intersection des perpendiculaires en A à \vec{v}_A et en B à \vec{v}_B .

$$\frac{v_B}{IB} = \frac{v_A}{IA} = \omega ; IB = AB \sin 60^\circ = 2.6 \text{ m} ; IA = AB \cos 60^\circ = 1.5 \text{ m}$$

$$\omega = \frac{v_A}{IA} = \frac{0.5}{1.5} = 0.33 \text{ rad/s} ; v_B = IB \omega = 0.866 \text{ m/s}$$



V - Torseur Cinématique

L'ensemble des vecteurs vitesses des points d'un même solide à une structure de torseur, appelé torseur cinématique. Ce torseur possède les propriétés générales des autres torseurs.

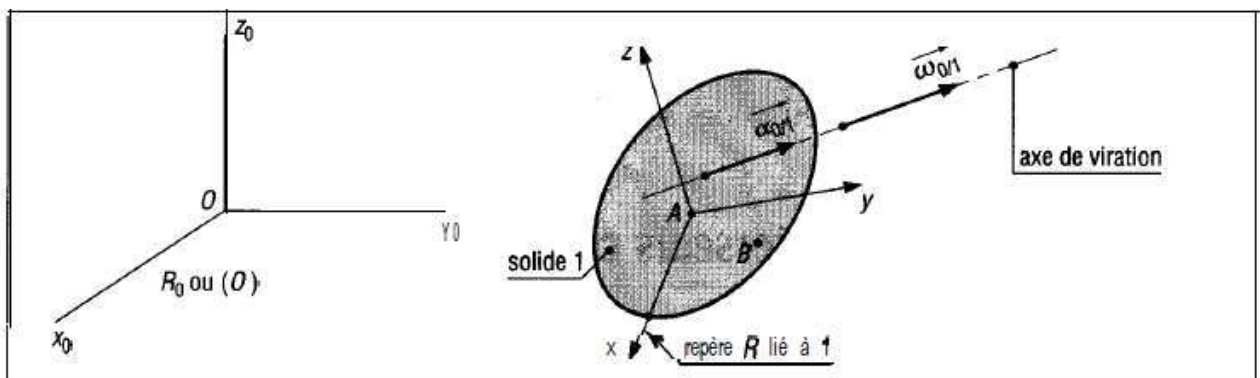
Exemple de notation (solide 1 en mouvement par rapport à 0)

$$\{v_{1/0}\} = \left\{ \begin{matrix} \vec{\omega}_{1/0} \\ \vec{v}_{A1/0} \end{matrix} \right\}_A = \left\{ \begin{matrix} \omega_x & v_{Ax} \\ \omega_y & v_{Ay} \\ \omega_z & v_{Az} \end{matrix} \right\}_A$$

$\vec{\omega}_{1/0}$ est la résultante générale du torseur et a même valeur en tout point.

$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AB} = \vec{v}_A + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{\omega}$ est analogue à la relation $\vec{M}_B = \vec{M}_A + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{S}$ du chapitre « Statique par les torseurs ».

VI - Relation entre les accélérations des points d'un solide



$\vec{\omega}_{R/R_0} = \vec{\omega}_{1/0} = \vec{\omega}$ est la vitesse de rotation du solide (1).

$\vec{\alpha}_{R/R_0} = \vec{\alpha}_{1/0} = \vec{\alpha}$ est l'accélération angulaire du mouvement.

$$\vec{\alpha} = \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \right)_{R_0} = \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \right)_R + \vec{\omega} \wedge \vec{\omega} = \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \right)_R$$

En dérivant par rapport au temps et dans R_0 , on obtient :

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\alpha} \wedge \overrightarrow{AB} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AB})$$

$\vec{a}_B \cdot \overrightarrow{AB} \neq \vec{a}_A \cdot \overrightarrow{AB}$; Il n'y a pas d'équiprojectivité des accélérations sur \overrightarrow{AB} et de ce fait il n'existe pas de torseurs des accélérations.

Composition de mouvements

$$\begin{aligned} \vec{v}_{2/0} &= \vec{v}_{2/1} + \vec{v}_{1/0} \\ \vec{\omega}_{2/0} &= \vec{\omega}_{2/1} + \vec{\omega}_{1/0} \\ \vec{a}_{2/0} &= \vec{a}_{2/1} + \vec{a}_{1/0} + 2\vec{\omega}_{1/0} \wedge \vec{v}_{2/1} \\ \vec{\alpha}_{2/0} &= \vec{\alpha}_{2/1} + \vec{\alpha}_{1/0} + \vec{\omega}_{1/0} \wedge \vec{\omega}_{2/1} \end{aligned}$$

VII - Paramétrages utilisés dans l'espace

Pour repérer la position d'un solide ((S) ou (1)) dans l'espace par rapport à un solide ou repère de référence ((0) ou R_0), on commence généralement par lier un repère $R_s(A, x_s, y_s, z_s)$. La position du solide est définie par la position de R_s par rapport à R_0 :

- Trois paramètres pour définir l'origine A du repère R_s .
- Trois paramètres pour définir la position angulaire du repère R_s .

1. Paramètres utilisés pour repérer la position d'un point

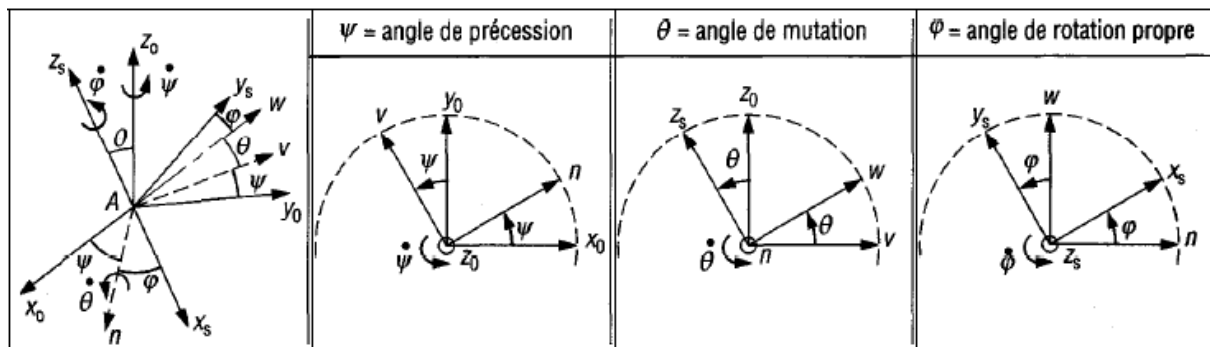
- a) Coordonnées cartésiennes dans l'espace (x,y,z)
- b) Coordonnées cylindriques (r, θ, z)
- c) Coordonnées sphériques (ρ, θ, φ)

2. Paramètres utilisés pour repérer la position angulaire du solide

Un ou deux angles judicieusement choisis suffisent pour un grand nombre d'applications courantes. Pour les cas les plus complexes, les angles d'Euler sont régulièrement utilisés (robots, avions, ...).

Remarque : le choix et la position des angles d'Euler peuvent varier sensiblement d'un ouvrage à un autre ; cependant le principe reste le même.

Angles d'Euler : On passe de $R_0(x_0, y_0, z_0)$, le repère de référence à $R_s(x_s, y_s, z_s)$, le repère lié au solide par trois rotations d'axe successives et inversement.



Vitesse angulaire

$$\vec{\omega}_{(S/R0)} = \dot{\psi} \vec{z}_0 + \dot{\phi} \vec{z}_s + \dot{\theta} \vec{n}$$

$$\vec{\omega}_{(S/R0)} = (\dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi) \vec{x}_0 + (\dot{\theta} \sin \psi - \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi) \vec{y}_0 + (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \vec{z}_0$$

$$\vec{\omega}_{(S/R0)} = (\dot{\psi} \sin \theta \sin \phi + \dot{\theta} \cos \phi) \vec{x}_s + (\dot{\psi} \sin \theta \cos \phi - \dot{\theta} \sin \phi) \vec{y}_s + (\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta) \vec{z}_s$$

Remarques : $\dot{\psi} = \frac{d\psi}{dt}$; $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$; $\dot{\phi} = \frac{d\phi}{dt}$

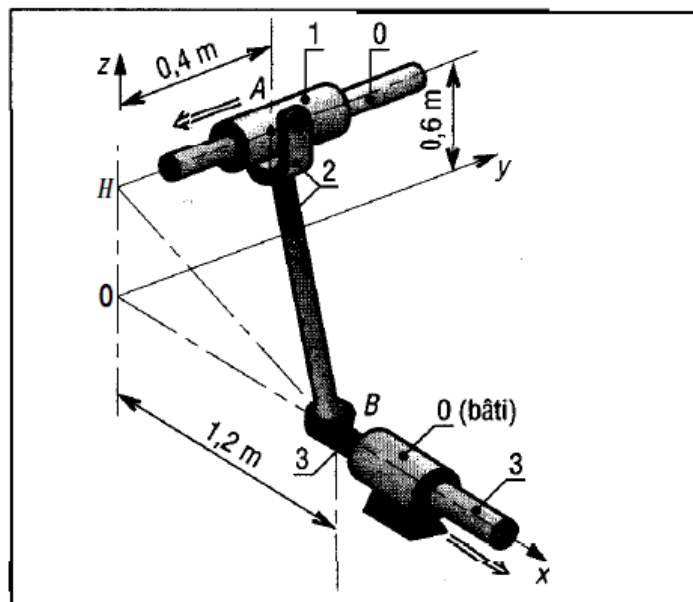
TD N°2

CINEMATIQUE DU SOLIDE

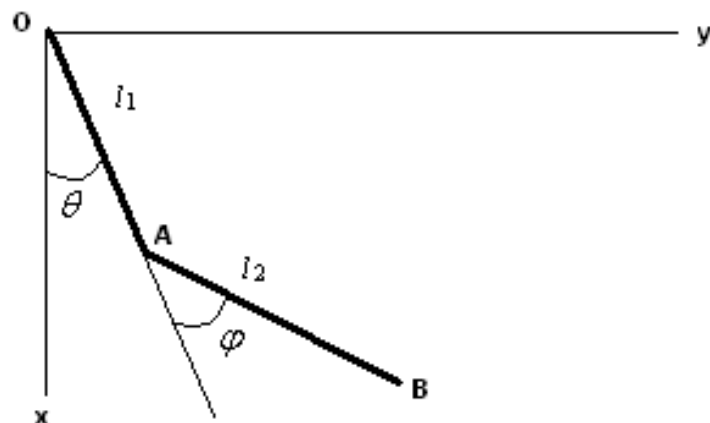
Exercice 1

Le mécanisme proposé sous forme schématique se compose d'une bague coulissante (1) liée en A (pivot) à une bielle (2) entraînant en B une tige coulissante (3).

Si la bague se déplace par rapport à la tige fixe (0) à la vitesse constante $\vec{v}_{A1/0} = -3\vec{j} \text{ m/s}$, déterminer $\vec{v}_{B3/0}$, $\vec{\omega}_{2/0}$, $\vec{a}_{B3/0}$, $\vec{\alpha}_{2/0}$



Exercice 2



Un bi-pendule est constitué de deux barres OA et AB de longueur l_1 et l_2 .

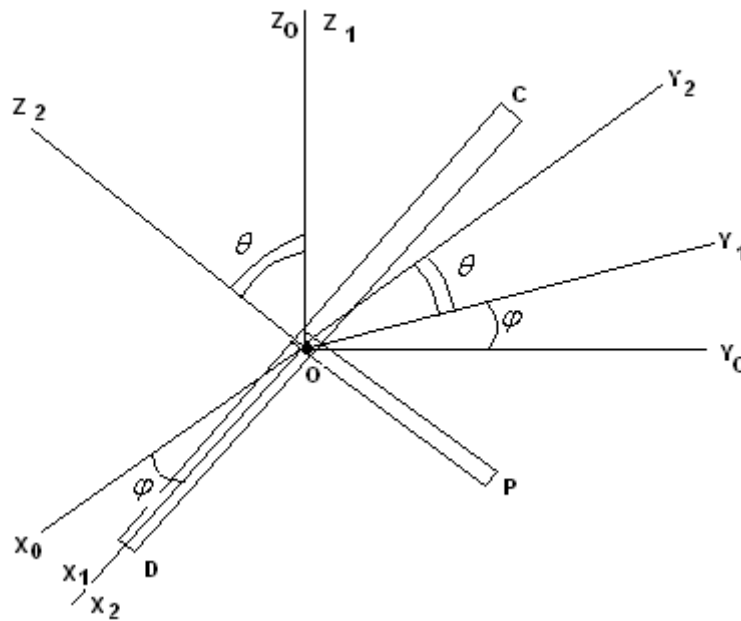
Exprimer les composantes des vitesses \vec{v}_A et \vec{v}_B dans le repère fixe $R_0(Oxyz)$ et dans les deux repères mobiles R_2 et R_1 .

O est fixe, le système oscille dans le plan (Oxy), le repère R_2 est lié à la barre AB, le repère R_1 est lié à la barre OA.

Exercice 3

Un axe horizontal CD tourne autour d'un axe vertical OZ_0 ou OZ_1 à la vitesse angulaire $\dot{\phi}$. La barre OP de longueur l est soudée en O à CD et lui est perpendiculaire. Elle peut tourner autour de CD d'un angle θ . Sachant que le repère $R_0(O, X_0, Y_0, Z_0)$ est fixe, le repère $R_1(O, X_1, Y_1, Z_1)$ est un repère intermédiaire dont OX_1 est suivant CD, OZ_2 est suivant OP.

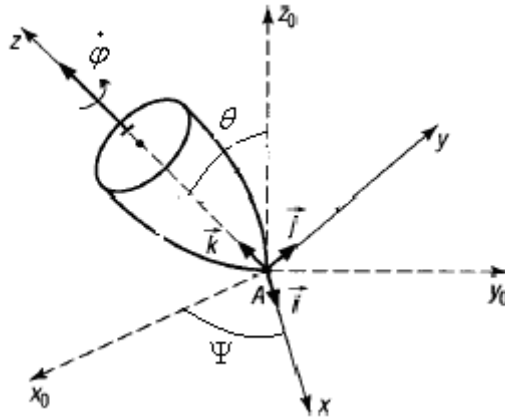
Déterminer l'accélération du point P ($\vec{a}_P = f(\phi, \theta, \dot{\phi}, \dot{\theta}, \ddot{\phi}, \ddot{\theta})$) par la dérivée du vecteur \vec{OP} . Le choix des axes de projection est important.



Exercice 4

Une toupie tourne autour de son axe de révolution à la vitesse angulaire $\dot{\phi}$, cet axe fait l'angle θ constant avec la verticale et tourne autour de celle-ci à la vitesse $\dot{\Psi}$.

Déterminer le module de la vitesse angulaire $\vec{\omega}_{toupie/sol}$ et l'angle que fait celle-ci avec la verticale.



SOLUTION DU TD N°2

Exercice 1

a) Etude des vitesses

$$\overrightarrow{AB} = 1.2\vec{i} - 0.4\vec{j} - 0.6\vec{k}$$

Pour la bielle (2), nous avons : $\vec{v}_{B2/0} = \vec{v}_{A2/0} + \vec{\omega}_{2/0} \wedge \overrightarrow{AB}$

$$\vec{v}_{B2/0} = \vec{v}_{B3/0} = V_B \vec{i} \quad (\vec{v}_B \text{ est porté par l'axe des } x)$$

$$\vec{v}_{A2/0} = \vec{v}_{A1/0} = -3\vec{j} ; \vec{\omega}_{2/0} = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k}$$

$$\begin{pmatrix} V_B \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1.2 \\ -0.4 \\ -0.6 \end{pmatrix}$$

On obtient les trois équations de projection :

$$\begin{cases} -0.6\omega_y + 0.4\omega_z = V_B \\ 0.6\omega_x + 1.2\omega_z = 3 \\ 0.4\omega_x + 1.2\omega_y = 0 \end{cases}$$

Nous avons trois équations à quatre inconnues ($V_B, \omega_x, \omega_y, \omega_z$), une équation supplémentaire

est fournie en remarquant que $\vec{\omega}_{2/0} = \vec{\omega}_{2/1} + \vec{\omega}_{1/0}$. Sachant que $\vec{\omega}_{2/1}$ est perpendiculaire au

plan $(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{BH})$ et que $\vec{\omega}_{1/0}$ est porté par \overrightarrow{AH} , il en résulte que $\vec{\omega}_{2/0}$ est perpendiculaire à \overrightarrow{HB} .

$$\text{Autrement dit : } \vec{\omega}_{2/0} \cdot \overrightarrow{HB} = 0 = (\omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k}) (1.2 \vec{i} - 0.6 \vec{k}) = 1.2 \omega_x - 0.6 \omega_z$$

$$\text{Résultat : } \vec{v}_{B3/0} = 1 \vec{i} \text{ (m/s) et } \vec{\omega}_{2/0} = 1 \vec{i} - 0.33 \vec{j} + 2 \vec{k}$$

b) Etude des accélérations

$$\vec{a}_{B2/0} = \vec{a}_{A2/0} + \vec{\alpha}_{2/0} \wedge \overrightarrow{AB} + \vec{\omega}_{2/0} \wedge (\vec{\omega}_{2/0} \wedge \overrightarrow{AB})$$

$$\vec{a}_{A2/0} = \vec{a}_{A1/0} = \vec{0} \text{ car } \vec{v}_{A1/0} = \text{constante.}$$

$$\vec{a}_{B2/0} = \vec{a}_{B3/0} = a_B \vec{i}$$

$$\vec{\alpha}_{2/0} = \alpha_x \vec{i} + \alpha_y \vec{j} + \alpha_z \vec{k}$$

L'équation s'écrit :

$$\begin{pmatrix} a_B \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1.2 \\ -0.4 \\ -0.6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -0.33 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On obtient les équations de projection :

$$\begin{cases} -0.6\alpha_y + 0.4\alpha_z = a_B + 6 \\ 0.6\alpha_x + 1.2\alpha_z = 2 \\ 0.4\alpha_x + 1.2\alpha_y = 3.33 \end{cases}$$

Une équation supplémentaire est fournie :

$$\vec{\alpha}_{2/0} = \vec{\alpha}_{2/1} + \vec{\alpha}_{1/0} + \vec{\omega}_{1/0} \wedge \vec{\omega}_{2/1}$$

$$\vec{\alpha}_{2/0} - \vec{\omega}_{1/0} \wedge \vec{\omega}_{2/1} = \vec{\alpha}_{2/1} + \vec{\alpha}_{1/0} \text{ est perpendiculaire à } \overrightarrow{HB}$$

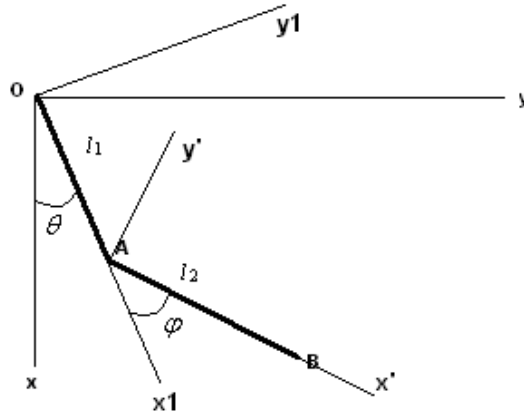
Le raisonnement est analogue à celui avec $\vec{\omega}_{2/0}$.

$$(\vec{\alpha}_{2/0} - \vec{\omega}_{1/0} \wedge \vec{\omega}_{2/1}) \cdot \overrightarrow{HB} = 0$$

$$\text{En remarquant que : } \vec{\omega}_{2/1} = 1 \vec{i} + 2 \vec{k} \text{ et } \vec{\omega}_{1/0} = -0.33 \vec{j}.$$

$$\text{Résultats : } \vec{a}_{B3/0} = -8.33 \vec{i} \text{ (ms}^{-2}\text{)} ; \vec{\alpha}_{2/0} = -1.33 \vec{i} + 3.86 \vec{j} - 1 \vec{k} \text{ (rads}^{-2}\text{)} ;$$

Exercice 2



$R_0 = (Oxyz)$: repère fixe,

$R_1 = (Ox_1y_1z_1)$: repère mobile $\vec{\omega}_{1/0} = \dot{\theta} \vec{k}$.

$R_2 = (Ax'y'z')$ repère mobile $\vec{\omega}_{2/0} = \vec{\omega}_{2/1} + \vec{\omega}_{1/0} = (\dot{\theta} + \dot{\phi}) \vec{k}$; $(\vec{k} = \vec{k}_1 = \vec{k}')$

a- Vitesse du point A

$$\vec{v}_A = \left(\frac{d\vec{OA}}{dt} \right)_{R_0} ; \vec{OA} = \begin{pmatrix} l_1 \cos \theta \\ l_1 \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}_{R_0} = \begin{pmatrix} l_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{R_1} = \begin{pmatrix} l_1 \cos \varphi \\ -l_1 \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}_{R_2}$$

Repère R_0 :

$$\vec{v}_A = \left(\frac{d\vec{OA}}{dt} \right)_{R_0} = \begin{pmatrix} -l_1 \dot{\theta} \sin \theta \\ l_1 \dot{\theta} \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}_{R_0}$$

Repère R_1 :

$$\vec{v}_A = \left(\frac{d\vec{OA}}{dt} \right)_{R_0} = \left(\frac{d\vec{OA}}{dt} \right)_{R_1} + \vec{\omega}_{1/0} \wedge \vec{OA} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} l_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ l_1 \dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix}_{R_1}$$

Repère R_2 :

$$\vec{v}_A = \left(\frac{d\vec{OA}}{dt} \right)_{R_0} = \left(\frac{d\vec{OA}}{dt} \right)_{R_2} + \vec{\omega}_{2/0} \wedge \vec{OA}$$

$$\vec{v}_A = \begin{pmatrix} -l_1 \dot{\phi} \sin \varphi \\ -l_1 \dot{\phi} \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}_{R_2} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} + \dot{\phi} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} l_1 \cos \varphi \\ -l_1 \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 \dot{\theta} \sin \varphi \\ l_1 \dot{\theta} \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}_{R_2}$$

b- Vitesse du point B

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega}_{2/0} \wedge \overrightarrow{AB}$$

Remarque : il faut exprimer tous les vecteurs dans l'équation précédente dans le même repère.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} l_2 \cos(\varphi + \theta) \\ l_2 \sin(\varphi + \theta) \\ 0 \end{pmatrix}_{R_0} = \begin{pmatrix} l_2 \cos(\varphi) \\ l_2 \sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}_{R_1} = \begin{pmatrix} l_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{R_2}$$

Repère R_0 :

$$\vec{v}_B = \begin{pmatrix} -l_1 \dot{\theta} \sin \theta \\ l_1 \dot{\theta} \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}_{R_0} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} + \dot{\varphi} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} l_2 \cos(\varphi + \theta) \\ l_2 \sin(\varphi + \theta) \\ 0 \end{pmatrix}_{R_0}$$

$$\vec{v}_B = \begin{pmatrix} -l_1 \dot{\theta} \sin \theta - l_2 (\dot{\varphi} + \dot{\theta}) \sin(\varphi + \theta) \\ l_1 \dot{\theta} \cos \theta + l_2 (\dot{\varphi} + \dot{\theta}) \cos(\varphi + \theta) \\ 0 \end{pmatrix}_{R_0}$$

Repère R_1 :

$$\vec{v}_B = \begin{pmatrix} 0 \\ l_1 \dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix}_{R_1} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} + \dot{\varphi} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} l_2 \cos(\varphi) \\ l_2 \sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}_{R_1} = \begin{pmatrix} -l_2 (\dot{\varphi} + \dot{\theta}) \sin(\varphi) \\ l_1 \dot{\theta} + l_2 (\dot{\varphi} + \dot{\theta}) \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}_{R_1}$$

Repère R_2 :

$$\vec{v}_B = \begin{pmatrix} l_1 \dot{\theta} \sin \varphi \\ l_1 \dot{\theta} \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}_{R_2} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} + \dot{\varphi} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} l_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{R_2} = \begin{pmatrix} l_1 \dot{\theta} \sin \varphi \\ l_1 \dot{\theta} \cos \varphi + l_2 (\dot{\varphi} + \dot{\theta}) \\ 0 \end{pmatrix}_{R_2}$$

Exercice 3

$R_0 = (\text{Oxyz})$: repère fixe,

$R_1 = \text{Ox}_1\text{y}_1\text{z}_1$: repère mobile $\vec{\omega}_{1/0} = \dot{\varphi} \vec{k}$.

$R_2 = \text{Ox}_2\text{y}_2\text{z}_2$: repère mobile $\vec{\omega}_{2/0} = \dot{\varphi} \vec{k}_1 + \dot{\theta} \vec{i}_2$

Tous les vecteurs vont être exprimés dans le repère R_2 .

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -l \end{pmatrix}_{R_2} ; \vec{\omega}_{2/0} = \dot{\varphi} \vec{k}_1 + \dot{\theta} \vec{i}_2 = \dot{\varphi} (\vec{k}_2 \cos \theta + \vec{j}_2 \sin \theta) + \dot{\theta} \vec{i}_2$$

$$\vec{v}_p = \left(\frac{d\overrightarrow{OP}}{dt} \right)_{R_0} = \left(\frac{d\overrightarrow{OP}}{dt} \right)_{R_2} + \vec{\omega}_{2/0} \wedge \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \sin \theta \\ \dot{\varphi} \cos \theta \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -l \dot{\varphi} \sin \theta \\ l \dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix}_{R_2}$$

$$\vec{a}_p = \left(\frac{d\vec{v}_p}{dt} \right)_{R_0} = \left(\frac{d\vec{v}_p}{dt} \right)_{R_2} + \vec{\omega}_{2/0} \wedge \vec{v}_p$$

$$\vec{a}_p = \begin{pmatrix} -l\ddot{\phi}\sin\theta - l\dot{\phi}\dot{\theta}\cos\theta \\ l\ddot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\phi}\sin\theta \\ \dot{\phi}\cos\theta \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -l\dot{\phi}\sin\theta \\ l\dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -l\ddot{\phi}\sin\theta - 2l\dot{\phi}\dot{\theta}\cos\theta \\ l\ddot{\theta} - l\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta \\ l\dot{\theta}^2 + l\dot{\phi}^2\sin^2\theta \end{pmatrix}_{R_2}$$

Exercice 4

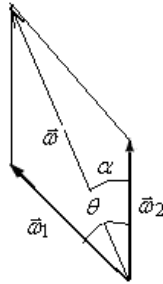
La toupie tourne autour de son axe (oz_1) avec une vitesse angulaire $\vec{\omega}_1 = \dot{\phi}\vec{k}_1$, son axe (oz_1) tourne autour de (oz) avec une vitesse angulaire $\vec{\omega}_2 = \dot{\Psi}\vec{k}$. La toupie tourne avec une vitesse angulaire totale :

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 = \dot{\phi}\vec{k}_1 + \dot{\Psi}\vec{k}$$

$$\|\vec{\omega}\| = \sqrt{\vec{\omega}\vec{\omega}} = \sqrt{(\dot{\phi}\vec{k}_1 + \dot{\Psi}\vec{k})(\dot{\phi}\vec{k}_1 + \dot{\Psi}\vec{k})} = \sqrt{\dot{\phi}^2 + \dot{\Psi}^2 + 2\dot{\phi}\dot{\Psi}\cos\theta}$$

2- Soit α l'angle que fait $\vec{\omega}$ avec la verticale.

$$\cos\alpha = \frac{\vec{\omega}\vec{k}}{\|\vec{\omega}\|} = \frac{(\dot{\phi}\vec{k}_1 + \dot{\Psi}\vec{k})\vec{k}}{\|\vec{\omega}\|} = \frac{\dot{\phi}\cos\theta + \dot{\Psi}}{\sqrt{\dot{\phi}^2 + \dot{\Psi}^2 + 2\dot{\phi}\dot{\Psi}\cos\theta}}$$



CINETIQUE

Objectifs

- Définir les notions de quantité de mouvement, de moment cinétique, d'énergie cinétique et énoncer les théorèmes correspondants.
- Donner les éléments concernant le calcul du centre de gravité et des matrices d'inertie.
- Énoncer le principe fondamental de la dynamique.

I - Systèmes à masse conservative

Un système matériel E (solide, fluide, etc.) est dit à masse conservative si celle-ci reste constante au cours du temps.

Tous les théorèmes et relations abordés par la suite supposent des systèmes à masse conservative.

$$\text{masse de E à } t = \text{masse de E à } t_1 = \text{masse de E à } t_2$$

Exemple : une fusée n'est pas un système à masse conservative. Au fur et à mesure du vol sa masse diminue du fait de la combustion du carburant.

II – Centre de gravité ou centre de masse

1. Définition

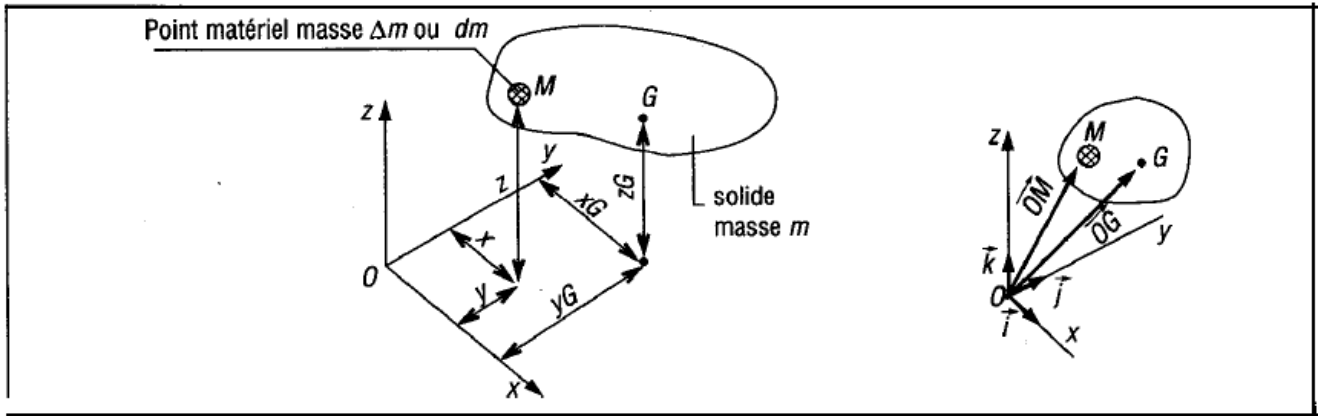
C'est le point central de l'ensemble de toutes les masses constituant un objet. C'est aussi le point d'application du poids \vec{P} d'un objet. Le centre de gravité ou centre de masse font intervenir la masse volumique ρ du matériau.

$$m = \rho \cdot V$$

$$P = mg$$

m : masse du solide en kg
 ρ : masse volumique en kg.m^{-3}
 V : volume du solide en m^3
 P : poids du solide en N

2. Détermination de la position du centre de gravité



M est un point matériel de masse Δm ou dm appartenant au solide de masse m . L'ensemble du solide est constitué de n points matériels M_1, M_2, \dots, M_n de masse $\Delta m_1, \Delta m_2, \dots, \Delta m_n$ tels que :

$$\Delta m_1 + \Delta m_2 + \dots + \Delta m_n = \sum \Delta m = \int dm = m$$

La position du centre de gravité est définie par la relation :

$$\sum \overrightarrow{GM_i} \Delta m_i = \int \overrightarrow{GM} dm = 0$$

De la relation précédente, on obtient :

$$m \overrightarrow{OG} = \Delta m_1 \overrightarrow{OM}_1 + \Delta m_2 \overrightarrow{OM}_2 + \dots + \Delta m_n \overrightarrow{OM}_n = \sum \overrightarrow{OM_i} \Delta m_i = \int \overrightarrow{OM} dm$$

En remarquant que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ et que $\overrightarrow{OG} = x_G\vec{i} + y_G\vec{j} + z_G\vec{k}$, en projetant la relation précédente sur les axes x, y, z , on obtient :

$$\begin{aligned} x_G &= \frac{\Delta m_1 x_1 + \Delta m_2 x_2 + \dots + \Delta m_n x_n}{m} = \frac{\sum x_i \Delta m_i}{m} = \frac{\int x dm}{m} \\ y_G &= \frac{\Delta m_1 y_1 + \Delta m_2 y_2 + \dots + \Delta m_n y_n}{m} = \frac{\sum y_i \Delta m_i}{m} = \frac{\int y dm}{m} \\ z_G &= \frac{\Delta m_1 z_1 + \Delta m_2 z_2 + \dots + \Delta m_n z_n}{m} = \frac{\sum z_i \Delta m_i}{m} = \frac{\int z dm}{m} \end{aligned}$$

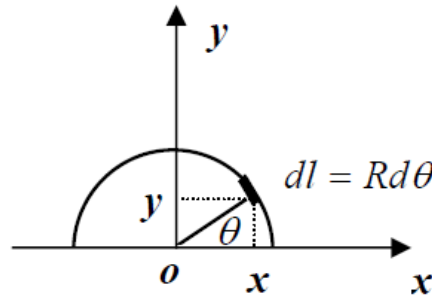
Propriété : Si un solide possède un plan, un axe ou un centre de symétrie, alors son centre de gravité est situé respectivement dans le plan de symétrie, sur l'axe de symétrie ou au centre de symétrie.

Exemple 1 : Déterminer le centre de gravité d'une tige demi-cercle de rayon R.

L'axe (oy) est un axe de symétrie donc $x_G = 0$, le centre de masse est situé sur l'axe de symétrie. On a $y_G = \frac{1}{m} \int_S y dm$. Le solide est linéaire, sa masse est donnée par $m = \int_S \lambda dl$

où : λ est la densité linéaire et dl est un élément de longueur. dl a pour coordonnées :

$$dl = \begin{cases} R \cos \theta \\ R \sin \theta \end{cases} \text{ avec } 0 \leq \theta \leq \pi$$



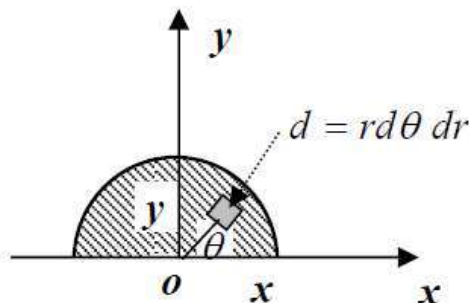
La masse du solide est donnée par : $m = \int_0^\pi \lambda dl = m = \int_0^\pi \lambda R d\theta = \lambda R \pi$

$$y_G = \frac{1}{m} \int_S y dm = \frac{1}{\lambda R \pi} \int_0^\pi R \sin \theta R d\theta = \frac{2R}{\pi}; \text{ d'où } G = \begin{cases} x_G = 0 \\ y_G = \frac{2R}{\pi} \end{cases}$$

Exemple 2 : Déterminer le centre de gravité d'un demi-disque matériel de rayon R.

L'axe (oy) est un axe de symétrie donc $x_G = 0$, le centre de masse est situé sur l'axe de symétrie. On a $y_G = \frac{1}{m} \int_S y dm$. Le solide est surfacique, sa masse est donnée par $m = \int_S \sigma ds$ où σ est la densité surfacique et ds est un élément de surface. ds a pour

coordonnées : $ds = \begin{cases} r \cos \theta \\ r \sin \theta \end{cases}$ avec $0 \leq r \leq R$ et $0 \leq \theta \leq \pi$

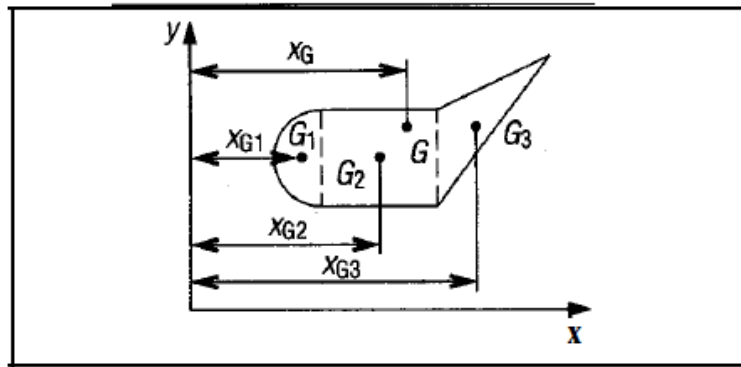


La masse du solide est égale à : $m = \int_S \sigma ds = \int_0^R \int_0^\pi \sigma dr r d\theta = \sigma \int_0^R r dr \int_0^\pi d\theta = \sigma \frac{\pi R^2}{2}$

$$y_G = \frac{1}{m} \int_S y dm = \frac{2}{\sigma \pi R^2} \int_0^R \int_0^\pi r \sin \theta \sigma dr r d\theta = \frac{2}{\sigma \pi R^2} \int_0^R r^2 dr \int_0^\pi \sin \theta d\theta = \frac{4R}{3\pi}; G \begin{cases} x_G = 0 \\ y_G = \frac{4R}{3\pi} \end{cases}$$

3. Centre de gravité des solides composés

Les solides peuvent être décomposés en éléments de formes géométriques simples dont les centres de gravité sont connus. Dans le cas de la figure ci-dessous :



$$m = m_1 + m_2 + m_3$$

$$mx_G = m_1x_{G1} + m_2x_{G2} + m_3x_{G3}$$

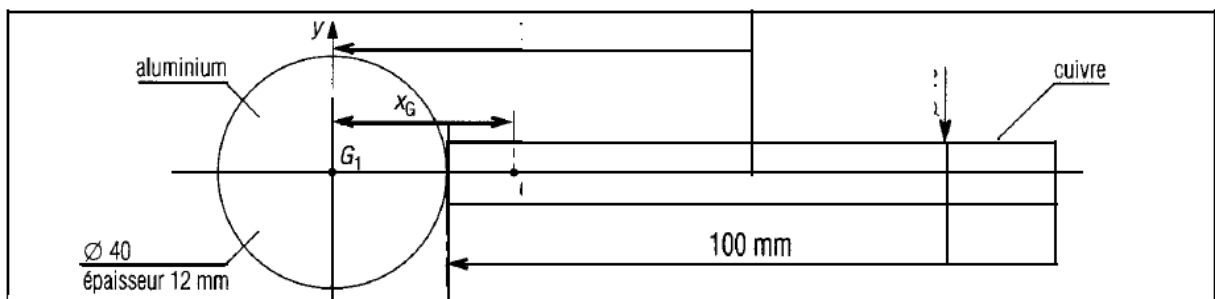
$$\overrightarrow{OG} = \frac{m_1\overrightarrow{OG_1} + m_2\overrightarrow{OG_2} + \dots + m_n\overrightarrow{OG_n}}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}$$

$$x_G = \frac{\sum m_i x_{Gi}}{m} \quad y_G = \frac{\sum m_i y_{Gi}}{m} \quad z_G = \frac{\sum m_i z_{Gi}}{m}$$

$$\text{avec } \overrightarrow{OG} = x_G \vec{i} + y_G \vec{j} + z_G \vec{k}$$

Remarque : Le centre de gravité d'un solide composé de deux autres solides de centre de gravité G_1 et G_2 est situé sur la droite G_1G_2 .

Exemple : Déterminons le centre de gravité d'un solide composé d'un cylindre en aluminium ($R = 20 \text{ mm}, h = 12 \text{ mm}, 2700 \text{ kgm}^{-3}$) collé à une tige en cuivre ($r = 5 \text{ mm}, H = 100 \text{ mm}, 9000 \text{ kgm}^{-3}$)



$$m_1 = \rho_1 V_1 = 2.7 (1.2 \pi 2^2) = 40.72 \text{ g avec } (\rho_1 = 2.7 \text{ kg cm}^{-3})$$

$$m_2 = \rho_2 V_2 = 9 (10 \pi 0.5^2) = 70.69 \text{ g avec } (\rho_2 = 9 \text{ kg cm}^{-3})$$

$$x_G = \frac{m_1 x_{G1} + m_2 x_{G2}}{m_1 + m_2} = \frac{40.72 \cdot 0 + 70.69 \cdot 70}{40.72 + 70.69} = 44.41 \text{ mm}$$

x est un axe de symétrie, G est donc situé sur cet axe, $y_G = 0$.

Remarque : dans le cas où les deux cylindres sont du même matériau :

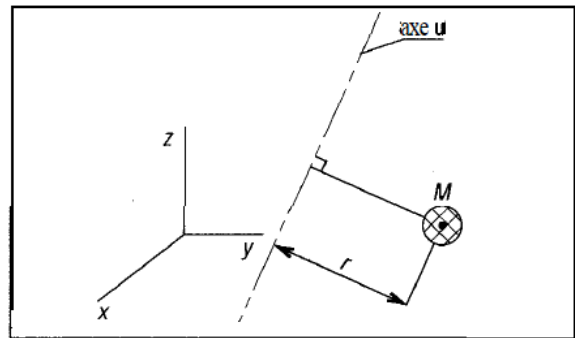
$$x_G = \frac{V_1 x_{G1} + V_2 x_{G2}}{V_1 + V_2} = 24 \text{ mm}$$

III – Moments d'inertie – Matrice d'inertie

1. Moment d'inertie d'un point matériel ou d'une masse élémentaire

Le moment d'inertie ΔJ_u , par rapport à l'axe u , du point matériel M de masse Δm ou dm situé à la distance constante r de l'axe u est égal à :

$$\Delta J_u = r^2 \Delta m = r^2 dm \text{ unités: } kg \cdot m^2$$

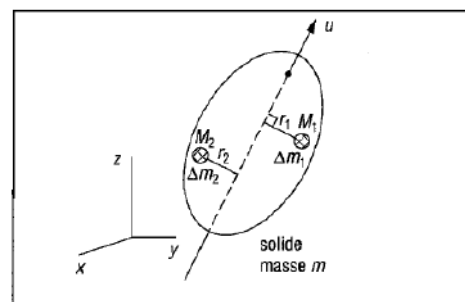


2. Moment d'inertie d'un solide de masse m par rapport à un axe

Le moment d'inertie J_u par rapport à l'axe u , d'un solide de masse m , est égal à la somme des moments d'inertie (par rapport au même axe) de l'ensemble des points matériels M_1, M_2, \dots, M_n constituant le solide.

$$J_u = r_1^2 \Delta m_1 + r_2^2 \Delta m_2 + \dots + r_n^2 \Delta m_n$$

$$J_u = \sum_{(S)} r^2 \Delta m = \int_S r^2 dm$$



3. Rayon de gyration

Si J_u est le moment d'inertie par rapport à l'axe u d'un solide de masse m , le rayon de gyration r_k est défini par

$$r_k = \sqrt{J_u / m} \text{ ou } J_u = m r_k^2$$

tout se passe comme si la masse m du solide était concentrée en un point situé à la distance r_k de l'axe u .

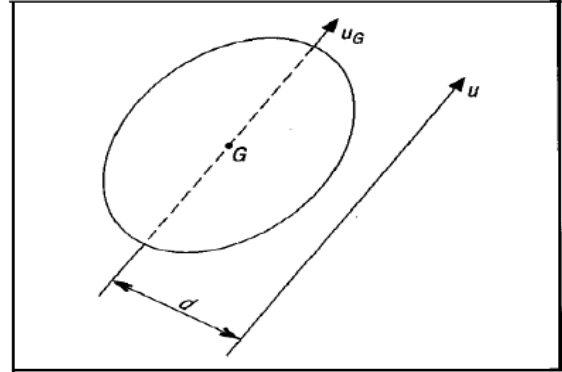
Formulaire

<p>$S = bh$</p>	<p>$S = bh$</p>	<p>$S = \pi R^2$</p>
<p>1/2 cercle</p> <p>$\frac{4R}{3\pi}$ 1/4 cercle</p>	<p>secteur circulaire</p> <p>$S = \alpha R^2$</p>	
<p>triangle</p> <p>$S = \frac{bh}{2}$</p>	<p>trapèze</p> <p>$S = h \left(\frac{a+b}{2} \right)$</p>	<p>tige circulaire</p> <p>$R \sin \alpha$</p>
<p>1/2 sphère</p> <p>$V = \frac{2}{3} \pi R^3$</p>	<p>tige droite</p> <p>$L/2$</p>	<p>tige 1/2 cercle</p> <p>$\frac{2R}{\pi}$ 1/4 cercle</p>
<p>cône</p> <p>$V = \frac{\pi R^2 h}{3}$</p>	<p>cône creux</p> <p>$\frac{h}{3}$</p>	<p>surface parabolique</p> <p>$S = \frac{4}{3} ab$ parabole $y = x^2$</p>
<p>1/2 cylindre</p> <p>$IG = \frac{4R}{3\pi}$</p>	<p>1/2 cylindre creux</p> <p>$IG = \frac{2R}{\pi}$</p>	<p>1/2 ellipse</p> <p>$S = \frac{\pi ab}{2}$</p>

4. Changement d'axe

Les axes u_G et u sont parallèles et distants de d . La relation ci-dessous s'appelle la formule de Huygens.

$$J_u = J_{u_G} + md^2$$



Si on fait intervenir les rayons de gyration respectifs : $r_k^2 = r_{kG}^2 + d^2$

5. Moment d'inertie des solides composés

Le moment d'inertie d'un solide composé est égal à la somme arithmétique des moments d'inertie de chacun des solides constitutifs par rapport au même axe.

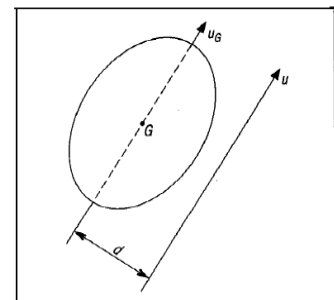
6. Produit d'inertie J_{xy}, J_{xz}, J_{yz}

Lorsque les solides sont en rotation dans l'espace à trois dimensions, les produits d'inertie apparaissent lors des calculs dynamiques. Ils servent aussi à la définition de la matrice d'inertie d'un solide.

$$\begin{aligned} J_{xy} &= J_{yx} = \int xy dm \\ J_{xz} &= J_{zx} = \int xz dm \\ J_{yz} &= J_{zy} = \int yz dm \end{aligned}$$

Huygens

$$\begin{aligned} J_{xy} &= J_{x_G y_G} + m dx dy \\ J_{xz} &= J_{x_G z_G} + m dx dz \\ J_{yz} &= J_{y_G z_G} + m dy dz \end{aligned}$$



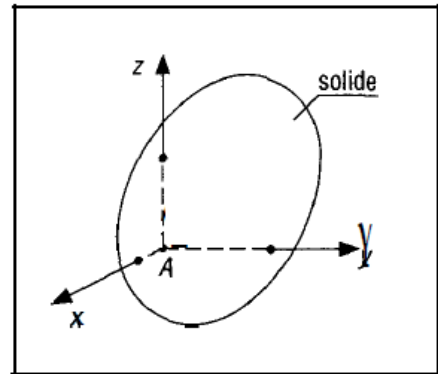
7. Matrice ou tenseur d'inertie

a) Définition

La matrice ou tenseur d'inertie par rapport au repère Axyz est définie par :

$$[J_A]_{xyz} = \begin{pmatrix} J_{xx} & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{xy} & J_{yy} & -J_{yz} \\ -J_{xz} & -J_{yz} & J_{zz} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 J_{xx} &= \int_{(s)} (y^2 + z^2) dm \\
 J_{yy} &= \int_{(s)} (x^2 + z^2) dm \\
 J_{zz} &= \int_{(s)} (x^2 + y^2) dm
 \end{aligned}$$



b) Formules utiles :

Le moment d'inertie par rapport au point A :

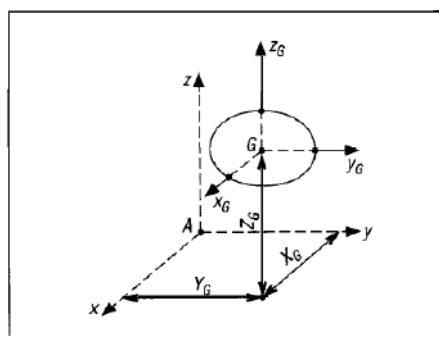
$$J_A = \frac{1}{2} (J_{xx} + J_{yy} + J_{zz})$$

Le moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe quelconque passant par A et de vecteur unitaire \vec{u} :

$$J_{A,\vec{u}} = \vec{u} [J_A]_{xyz} \vec{u}$$

Les axes $G(x_G, y_G, z_G)$ et $A(x, y, z)$ sont liés au solide. Les axes des repères sont parallèles entre eux : $\vec{AG} = X_G \vec{i} + Y_G \vec{j} + Z_G \vec{k}$. La matrice d'inertie en A est obtenue par :

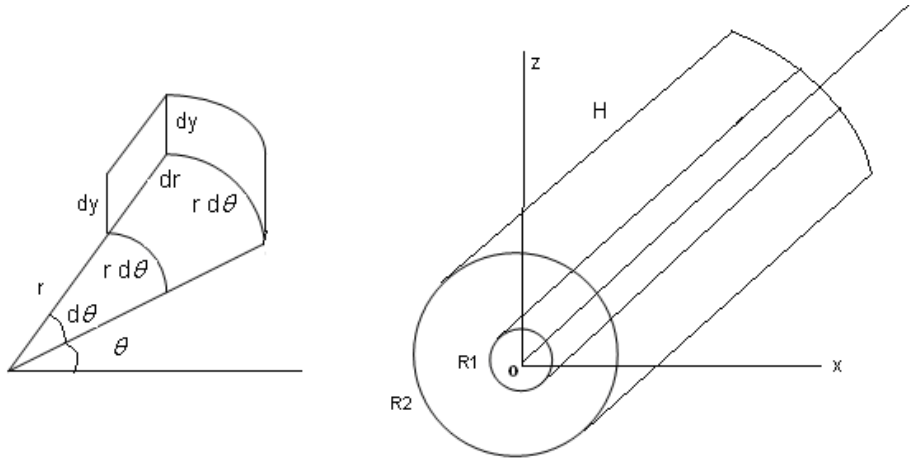
$$[J_A]_{xyz} = [J_G]_{x_G y_G z_G} + m \begin{pmatrix} Y_G^2 + Z_G^2 & -X_G Y_G & -X_G Z_G \\ -X_G Y_G & X_G^2 + Z_G^2 & -Y_G Z_G \\ -X_G Z_G & -Y_G Z_G & Y_G^2 + X_G^2 \end{pmatrix}$$



Exemple : Trouver le tenseur d'inertie d'un cylindre creux de masse M, de hauteur H, de rayon intérieur R_1 , de rayon extérieur R_2 , par rapport à un repère dont un axe est l'axe de révolution et les 2 autres sont dans le plan de base du cylindre. En déduire le tenseur d'inertie :

- a- cerceau de masse M
- b- disque de masse M

c- cylindre plein de masse M



Pour calculer le tenseur d'inertie des formes circulaires, on préfère utiliser les coordonnées cylindriques r, θ, y :

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ z = r \sin \theta \\ y = y \end{cases}$$

Pour trouver l'élément de volume dV , on fait varier r de dr , θ de $d\theta$, et y de dy , on obtient :

$$dV = dr r d\theta dy, \quad R_1 \leq r \leq R_2, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq y \leq H$$

Le Volume total vaut : $V = \pi H (R_2^2 - R_1^2)$,

La masse totale vaut : $M = \rho V \Rightarrow \rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\pi (R_2^2 - R_1^2) H}$

de même $dm = \rho dV = \frac{M}{\pi (R_2^2 - R_1^2) H} dr r d\theta dy$

$$J_{xx} = \int_V (y^2 + z^2) dm = \int_V (y^2 + r^2 \sin^2 \theta) dm = \int_V y^2 dm + \int_V r^2 \sin^2 \theta dm$$

$$= \frac{M}{\pi H (R_2^2 - R_1^2)} \left(\int_V y^2 dr r d\theta dy + \int_V r^2 \sin^2 \theta dr r d\theta dy \right)$$

$$J_{xx} = \frac{M}{\pi H (R_2^2 - R_1^2)} \left(\int_{R_1}^{R_2} r dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^H y^2 dy + \int_{R_1}^{R_2} r^3 dr \int_0^{2\pi} \left(\frac{1 - \cos 2\theta}{2} \right) d\theta \int_0^H dy \right) = \frac{M H^2}{3} + \frac{M}{4} (R_2^2 + R_1^2)$$

pour des raisons de symétrie on a : $J_{zz} = J_{xx}$

$$J_{yy} = \int_V (x^2 + z^2) dm = \int_V r^2 \frac{M}{\pi H (R_2^2 - R_1^2)} dr r d\theta dy = \frac{M}{\pi H (R_2^2 - R_1^2)} \int_{R_1}^{R_2} r^3 dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^H dy = \frac{M}{2} (R_2^2 + R_1^2)$$

Les axes (ox), (oy), (oz) sont des axes principaux, donc les produits d'inertie sont nuls.

$$[J_o]_{xyz} = \begin{bmatrix} \frac{M H^2}{3} + \frac{M}{4} (R_2^2 + R_1^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{M}{2} (R_2^2 + R_1^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{M H^2}{3} + \frac{M}{4} (R_2^2 + R_1^2) \end{bmatrix}$$

a- Tenseur d'inertie d'un cerceau

Pour un cerceau, on a : $R_2 = R_1 = R$ et $H=0$, d'où :

$$[J_o]_{xyz} = \begin{bmatrix} \frac{M R^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & M R^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{M R^2}{2} \end{bmatrix}$$

b- tenseur d'inertie d'un disque

Pour un disque, on a $R_2 = R$, $R_1 = 0$ et $H=0$, d'où

$$[J_o]_{xyz} = \begin{bmatrix} \frac{M R^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{M R^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{M R^2}{4} \end{bmatrix}$$

c- tenseur d'inertie d'un cylindre plein

Pour un cylindre plein, on a $R_2 = R$, $R_1 = 0$, d'où :

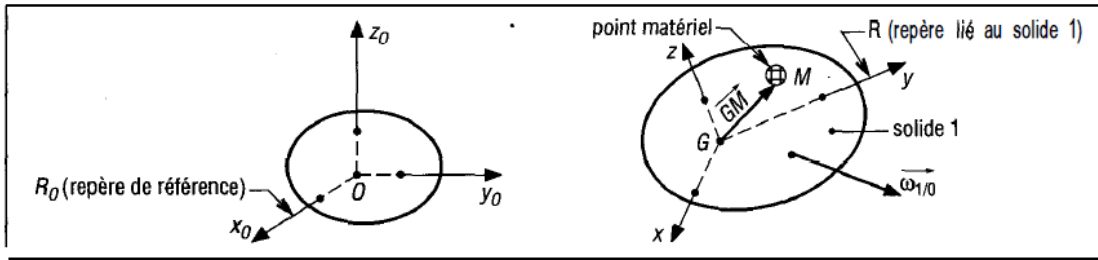
$$[J_o]_{xyz} = \begin{bmatrix} \frac{M H^2}{3} + \frac{M}{4} R^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{M}{2} R^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{M H^2}{3} + \frac{M}{4} R^2 \end{bmatrix}$$

IV - Quantité de mouvement

Le repère $R(G,x,y,z)$ est lié au solide (1) en mouvement par rapport au repère de référence

$R_0(O,x,y,z)$, G est le centre de gravité du solide et $\vec{\omega}$ est sa vitesse angulaire, m_i ou dm est

la masse du point matériel M appartenant au solide



$$m = \sum_{(S)} m_i = \int dm = \text{masse du solide.}$$

La quantité de mouvement du solide (1) par rapport à R_0 est :

$$\vec{p} = \sum_{(S)} m_i \vec{V}_M = \int_{(S)} \vec{V}_M dm = \int_{(S)} \frac{d\vec{OM}}{dt} dm = \frac{d}{dt} m \vec{OG} = m \vec{V}_G$$

$$\boxed{\vec{p} = m \vec{V}_G}$$

V - Moment cinétique – Torseur cinétique

1. Moment cinétique au centre de gravité G

Définition

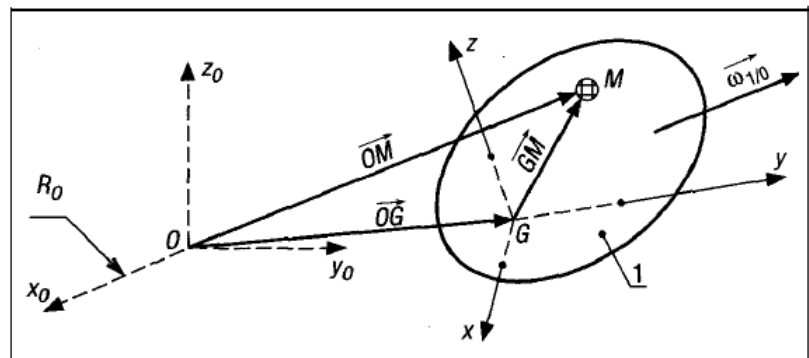
Le moment cinétique du solide (1) est égal au moment résultant en G de toutes les quantités de mouvement $m_i \vec{V}_M$ ou $\vec{V}_M dm$ de l'ensemble des points matériels M constituant le solide.

$$\vec{\sigma}_G = \sum_{(S)} \vec{GM} \wedge m_i \vec{V}_M = \int_{(S)} \vec{GM} \wedge \vec{V}_M dm$$

Or, $\vec{V}_M = \vec{V}_G + \vec{\omega} \wedge \vec{GM}$ et $\int_{(S)} \vec{GM} dm = 0$ (définition du centre de gravité), et par conséquent le moment cinétique s'exprime par :

$$\vec{\sigma}_G = \int_{(S)} \vec{GM} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{GM}) dm = \int_{(S)} [GM^2 \vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \vec{GM}) \vec{GM}] dm = [J_G] \vec{\omega}$$

$$\boxed{\vec{\sigma}_G = [J_G] \vec{\omega}}$$



$[J_G]$ est la matrice d'inertie du solide en G

$$\text{L'équation précédente s'écrit : } \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{xx} & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{xy} & J_{yy} & -J_{yz} \\ -J_{xz} & -J_{yz} & J_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

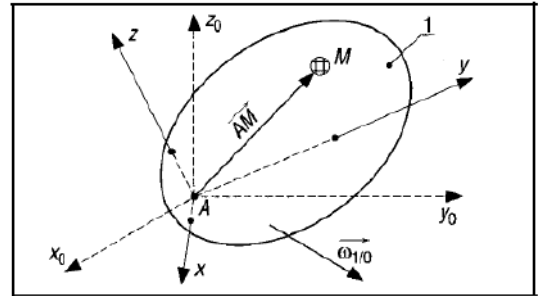
Règle de calcul : toujours exprimer dans le même repère, ou la même base, la matrice d'inertie $[J]$ et le vecteur en produit avec elle ($\vec{\omega}$ ou autre)

2. Cas d'un solide ayant un point fixe A

Si A est un point fixe du solide dans le repère de référence, alors :

$$\vec{V}_M = \vec{V}_A + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AM} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AM}$$

$$\vec{\sigma}_A = \int_{(S)} \overrightarrow{AM} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AM}) dm = [J_A] \vec{\omega}$$



$[J_A]$ est la matrice du solide en A.

La matrice est symétrique et les moments d'inertie par rapport aux axes x,y,z apparaissent suivant la diagonale. Si on change l'orientation des axes liés au solide, les moments et produits d'inertie changent également.

Pour une même origine (A, O, etc.), il existe toujours un et un seul système d'axe X, Y, Z appelés axes principaux d'inertie pour lesquels la matrice est diagonale.

3. Moment cinétique en un point O quelconque

Le point O peut être l'origine du repère de référence ou n'importe quel point fixe de ce repère.

$$\vec{\sigma}_O = \int_{(S)} \overrightarrow{OM} \wedge \vec{V}_M dm = \int_{(S)} (\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GM}) \wedge (\vec{V}_G + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{GM}) dm$$

$$\vec{\sigma}_O = \int_{(S)} \overrightarrow{OG} \wedge \vec{V}_G dm + \int_{(S)} \overrightarrow{OG} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{GM}) dm + \int_{(S)} \overrightarrow{GM} \wedge \vec{V}_G dm + \int_{(S)} \overrightarrow{GM} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{GM}) dm$$

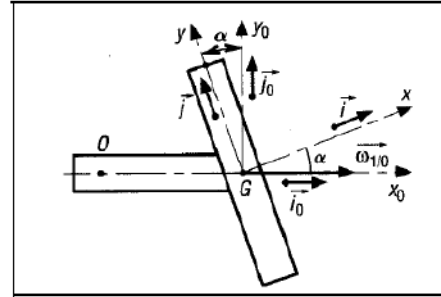
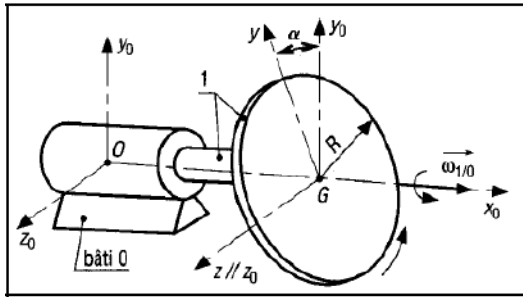
$$\vec{\sigma}_O = \overrightarrow{OG} \wedge m\vec{V}_G + \vec{0} + \vec{0} + \vec{\sigma}_G$$

d'où la relation :

$$\vec{\sigma}_O = \overrightarrow{OG} \wedge m\vec{V}_G + \vec{\sigma}_G$$

Cette relation est connue sous le nom du théorème de KOENIG.

Exemple : Un disque plat (1), de masse 1 kg, de rayon $R=0.15$ m, est monté sur un arbre horizontal d'axe x_0 , avec une inclinaison $\alpha = 20^\circ$ par rapport au plan de rotation. Si $\omega_{1/0} = \omega = 32 \text{ rad s}^{-1}$, déterminer $\vec{\sigma}_G$ du disque et l'angle θ entre $\vec{\omega}$ et $\vec{\sigma}_G$.



$$[J_G]_{xyz} = \frac{mR^2}{4} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \vec{\omega}_{xyz} = \begin{pmatrix} \omega \cos \alpha \\ -\omega \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\sigma}_G = [J_G] \vec{\omega} = \frac{mR^2}{4} \omega (2 \cos \alpha \vec{i} - \sin \alpha \vec{j})$$

Sachant que : $\vec{i} = \vec{i}_0 \cos \alpha + \vec{j}_0 \sin \alpha$ et $\vec{j} = -\vec{i}_0 \sin \alpha + \vec{j}_0 \cos \alpha$, on obtient :

$$\vec{\sigma}_G = 0.339 \vec{i}_0 + 0.058 \vec{j}_0$$

$$\text{Angle } \theta : \cos \theta = \frac{\vec{\sigma}_G \vec{\omega}}{\sigma_G \omega} = \frac{0.339 \cdot 32}{0.3439 \cdot 32} = 0.985; \theta = 9.8^\circ$$

4. Torseur cinétique

En prenant pour résultante cinétique la quantité de mouvement $\vec{p} = m\vec{V}_G$ et comme moment le moment cinétique $\vec{\sigma}$, l'ensemble des deux grandeurs a les propriétés d'un torseur appelé torseur cinétique. Notation :

$$\{C\} = \left\{ \begin{matrix} m\vec{V}_G \\ \vec{\sigma}_B \end{matrix} \right\}_B \text{ avec } \vec{\sigma}_B = \vec{\sigma}_A + \overrightarrow{BA} \wedge m\vec{V}_G$$

VI - Energie cinétique

1. Définition 1

L'énergie cinétique d'un solide (1) en mouvement par rapport au repère de référence est égale à la somme des énergies cinétiques $m_i V_M^2$ ou $dm V_M^2$ de l'ensemble des points matériels M constituant le solide.

$$T = \frac{1}{2} \sum_{(S)} m_i \vec{V}_M^2 = \frac{1}{2} \int_{(S)} \vec{V}_M^2 dm$$

En remplaçant $\vec{V}_M = \vec{V}_G + \vec{\omega} \wedge \vec{GM}$ dans l'équation de la définition, on obtient après calcul :

$$T = \frac{1}{2} m \vec{V}_G^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega} \vec{\sigma}_G = \frac{1}{2} m \vec{V}_G^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega} [J_G] \vec{\omega}$$

T est en J (Joules). Cette relation est connue sous le nom du théorème de KOENIG

2. Définition 2

L'énergie cinétique peut aussi être exprimée par le produit du torseur cinématique $\{V\}$ par le torseur cinétique $\{C\}$ du solide en n'importe quel point I choisi pour le calcul

$$2T = \left\{ \begin{matrix} \vec{\omega} \\ \vec{V}_I \end{matrix} \right\}_I \left\{ \begin{matrix} m \vec{V}_G \\ \vec{\sigma}_I \end{matrix} \right\}_I = \vec{\omega} \vec{\sigma}_I + m \vec{V}_G \vec{V}_I$$

Si I est confondu avec G, on retrouve la première formule, si I est confondu avec A, point fixe dans le repère de référence, on obtient :

$$2T = \vec{\omega} \vec{\sigma}_A = \vec{\omega} [J_A] \vec{\omega}$$

3. Cas particuliers

a) Solide en translation rectiligne

Tous les points du solide se déplacent à la même vitesse $\vec{V}_G = \vec{V}_M = \vec{V}$.

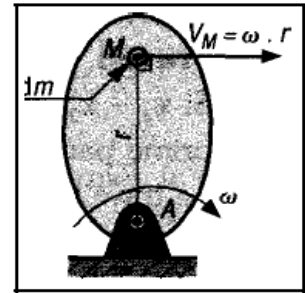
$$T = \frac{1}{2} m \vec{V}_G^2$$

b) Solide en rotation par rapport à un axe fixe

Pour l'élément M de masse dm dont la vitesse est $V_M = \omega r$, l'énergie cinétique est :

$T = \frac{1}{2} r^2 \omega^2 dm$. Pour l'ensemble du solide $T = \frac{1}{2} \omega^2 \sum_{(S)} r^2 dm$. Le terme $= \sum_{(S)} r^2 dm$, représente le moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation.

$$T = \frac{1}{2} J \omega^2$$



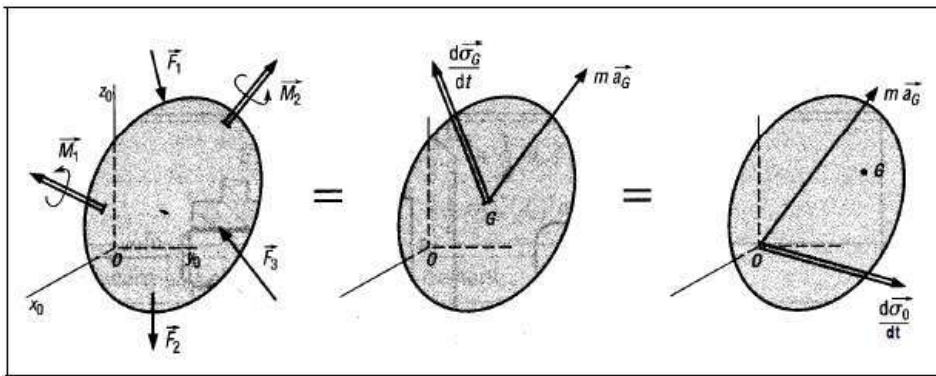
c) Solide en mouvement plan

$$T = \frac{1}{2} m \vec{V}_G^2 + \frac{1}{2} J_G \omega^2$$

J_G est le moment d'inertie du solide par rapport à un axe perpendiculaire au plan du mouvement et passant par le centre de gravité G.

VII – Principe fondamental de la dynamique

Enoncé – Equation de mouvement



$$\begin{aligned} \sum \vec{F}_{ext} &= \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt} (m \vec{V}_G) = m \vec{a}_G \\ \sum \overrightarrow{M_G(F_{ext})} &= \overrightarrow{M_G(F_1)} + \overrightarrow{M_G(F_2)} + \dots + \overrightarrow{M_G(F_n)} + \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \dots + \vec{M}_n = \frac{d\vec{\sigma}_G}{dt} \end{aligned}$$

Equation alternative avec O, point fixe du repère de référence :

$$\sum \overrightarrow{M_O(F_{ext})} = \overrightarrow{M_O(F_1)} + \overrightarrow{M_O(F_2)} + \dots + \overrightarrow{M_O(F_n)} + \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \dots + \vec{M}_n = \frac{d\vec{\sigma}_O}{dt}$$

\vec{a}_G est l'accélération du centre de gravité G, $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ sont les forces extérieures agissant sur le système isolé et $\vec{M}_1, \vec{M}_2, \dots, \vec{M}_n$ les couples purs.

VIII – Théorèmes sur l'énergie

Enoncé : pour un solide isolé, le travail des forces extérieures, pendant un intervalle de temps $[t_1, t_2]$, est égal à la variation de l'énergie cinétique durant le même intervalle.

Autrement dit : la dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique est égale à la puissance des efforts extérieurs.

$$\boxed{(T)_{t_2} - (T)_{t_1} = \left[W \left(\sum \vec{F}_{ext} \right) \right]_{t_1}^{t_2}} \quad \boxed{\frac{dT}{dt} = P \left(\sum \vec{F}_{ext} \right)}$$

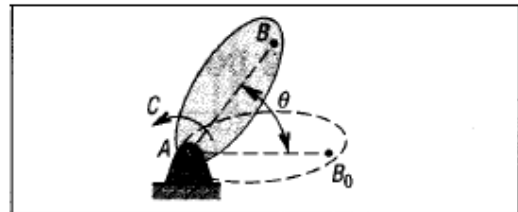
Rappelons que :

a) Le travail élémentaire ΔW d'une force \vec{F} dont le point d'application A se déplace de $\vec{\Delta l}$ est égale au produit scalaire de \vec{F} par $\vec{\Delta l}$.

$$\boxed{W(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{\Delta l} \quad W \text{ en J(Joules)}}$$

b) Le travail d'un couple C se déplaçant de l'angle θ est égal à :

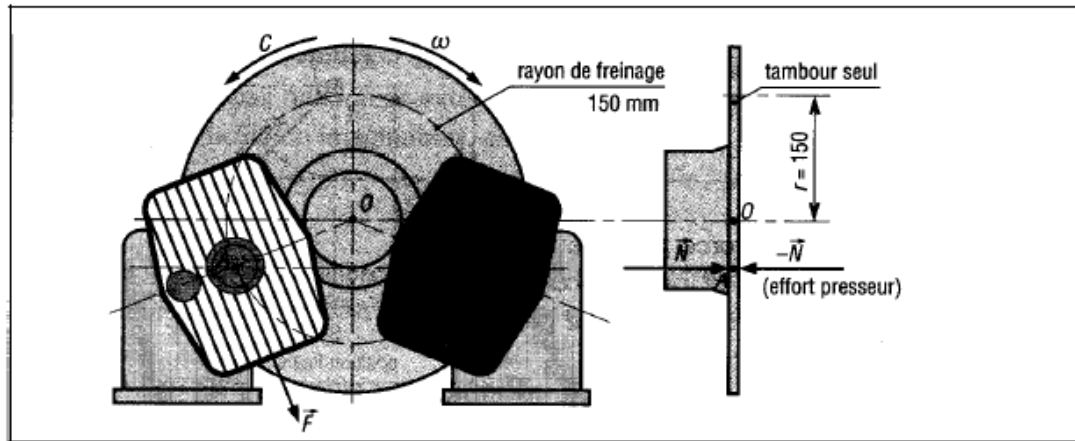
$$\boxed{W = C\theta}$$



c) La puissance $P(\vec{F})$ développée par une force \vec{F} dont le point d'application A se déplace à la vitesse \vec{V} est égale au produit scalaire de \vec{F} par \vec{V} .

$$\boxed{P(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{V} \quad P \text{ en W(Watts)}}$$

Exemple 1: Un tambour ($J = 100 \text{ m}^2 \text{ kg}$ par rapport à son axe de rotation) tourne à la vitesse de $20 \text{ rad s}^{-1} (\cong 200 \text{ tr min}^{-1})$. Le freinage est réalisé en 6 secondes pendant 3 tours. Déterminons le couple de freinage C si celui-ci est supposé constant.



La variation d'énergie cinétique du tambour en rotation est :

$$(T)_{t_2} - (T)_{t_1} = \frac{1}{2} J (\omega_2^2 - \omega_1^2) = \frac{1}{2} 100 (0 - 20^2) = -20 \text{ kJ} = -20000 \text{ J}$$

$$[W(\sum \vec{F}_{ext})]_{t_1}^{t_2} = -C\theta = -C 2\pi 3 = -6\pi C$$

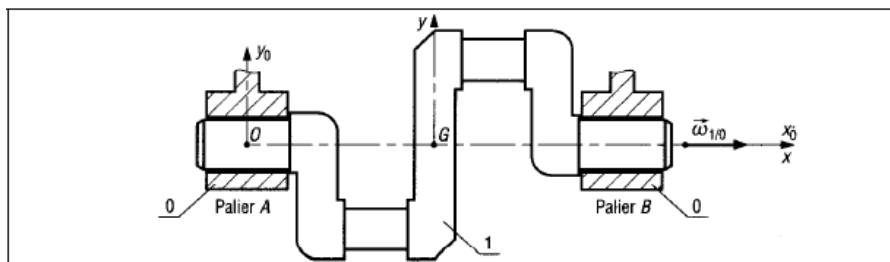
D'après le théorème de l'énergie cinétique :

$$(T)_{t_2} - (T)_{t_1} = -20000 = [W(\sum \vec{F}_{ext})]_{t_1}^{t_2} = -6\pi C \quad \text{d'où } C = 1061 \text{ Nm}$$

Remarque : on 2 jeux de plaquettes de frein, il en résulte que :

$$F = \frac{c}{2r} = \frac{1061}{2 \cdot 0.15} = 3537 \text{ N}$$

Exemple 2 :



Le vilebrequin (1) de masse 20 Kg, de rayon de gyration $r_k = 0.06 \text{ m}$, tourne à la vitesse de 5000 tr/mn. Déterminons son énergie cinétique. Quel travail faut t-il fournir pour passer de 0 à 2500 tr/mn et de 2500 à 5000 tr/mn.

a) Le centre de gravité G est situé sur l'axe de rotation et est u point fixe dans le repère de référence (O, x_0, y_0, z_0) lié au bati.

$$\vec{\omega}_{1/0} = \omega_{1/0} \vec{l} = \omega_{1/0} \vec{l}_0 \quad \text{avec } \omega_{1/0} = \frac{5000 \cdot 2\pi}{60} = 523.6 \text{ rad/s}$$

$$T = \frac{1}{2} \vec{\omega}_{1/0} \vec{\sigma}_G = \frac{1}{2} \omega_{1/0} \vec{l}_0 \begin{pmatrix} J_{xx} & -J_{xy} & 0 \\ -J_{xy} & J_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & J_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_{1/0} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(x,y) étant un plan de symétrie du vilebrequin, $J_{xz} = J_{yz} = 0$

$$T = \frac{1}{2} m r_k^2 \omega_{1/0}^2 = \frac{1}{2} 20 \cdot 0.06^2 \cdot 523.6^2 = 9870 \text{ J}$$

b) D'après le théorème de l'énergie cinétique :

$$[W(\sum \vec{F}_{ext})]_{t_1}^{t_2} = (T)_{t_2} - (T)_{t_1} = \frac{1}{2} m r_k^2 (\omega_{finale}^2 - \omega_{initiale}^2)$$

$$\text{entre 0 et 2500 tr/mn : } W = \frac{1}{2} 20 \cdot 0.06^2 \left(\left(\frac{2500 \cdot 2\pi}{60} \right)^2 - 0 \right) = 2467 \text{ J}$$

$$\text{entre 2500 et 5000 tr/m : } W = 9870 - 2467 = 7403 \text{ J}$$

IX – Loi de conservation de l'énergie

Loi : pour un solide énergétiquement isolé et dont les forces dépendent d'une énergie potentielle (E_p : forces de pesanteur, actions exercées par des ressorts), l'énergie mécanique totale mise en jeu reste constante entre deux instants successifs.

$$\text{Energie mécanique totale } T + E_p = \text{constante}$$

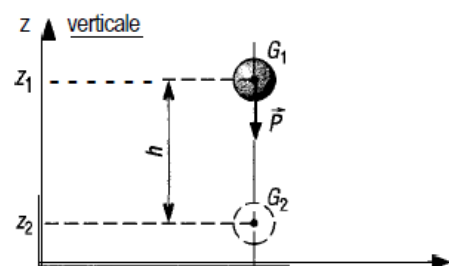
$$\text{ou } T_1 + E_{p1} = T_2 + E_{p2} = \text{constante}$$

a) Energie potentielle de pesanteur

L'énergie potentielle de pesanteur dépend de l'altitude z de l'objet, plus l'objet est haut et plus il y a d'énergie potentielle.

$$E_p = mgz$$

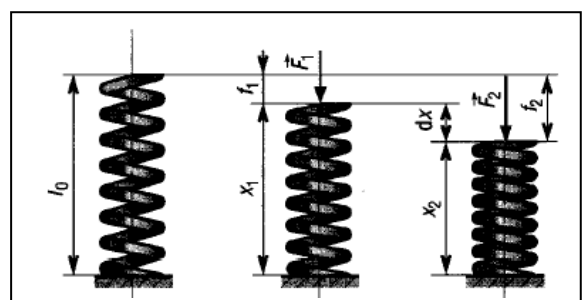
$$E_{p1} - E_{p2} = mg(z_1 - z_2) = mgh$$



b) Energie potentielle élastique (ressort)

$$E_p = \frac{1}{2} k f^2 \quad f = l_0 - x$$

$$E_{p2} - E_{p1} = \frac{1}{2} k (f_2^2 - f_1^2)$$



k est la raideur du ressort et f est l'allongement

TD N°3

DETERMINATION DU CENTRE DE GRAVITE D'UN SOLIDE

Exercice 1

- Montrer que le centre de gravité d'un parallélogramme est le point d'intersection des diagonales.
- Montrer que le centre de gravité d'un triangle est le point d'intersection des médianes.

Exercice 2

Déterminer le centre de gravité des masses linéiques homogènes ci-dessous.

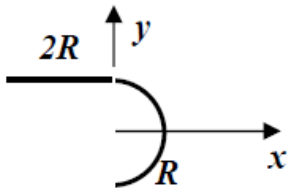


Figure 1

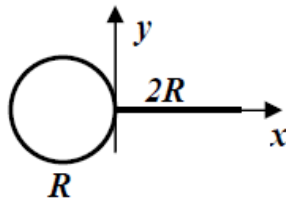


Figure 2

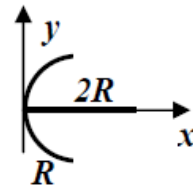
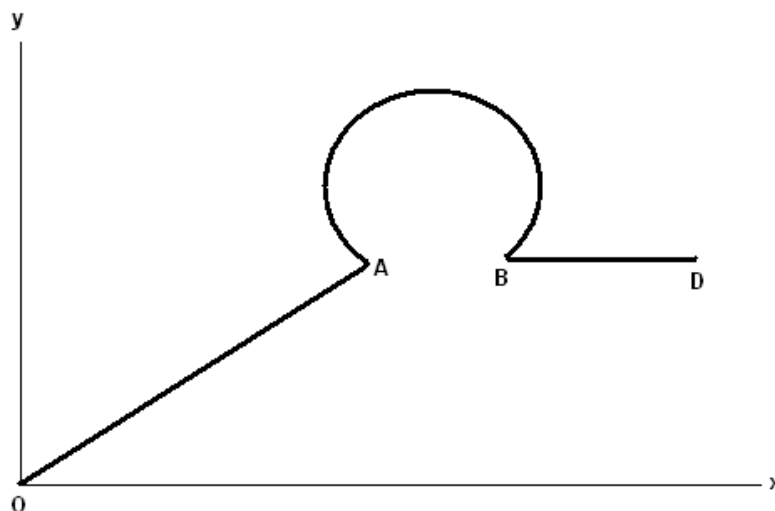


Figure 3

Exercice 3

Calculer la position du centre de gravité d'une tige curviligne homogène. On donne $A(4,3)$, $B(6,3)$, $D(10,3)$. Le rayon de la forme circulaire est égal à 2.



Exercice 4

Déterminer le centre de gravité des masses surfaciques homogènes ci-dessous.

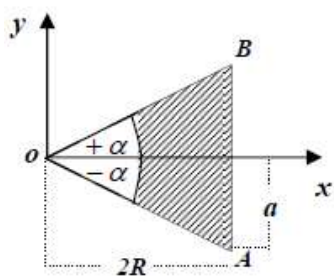


Figure 1

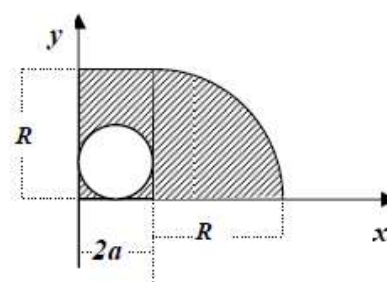
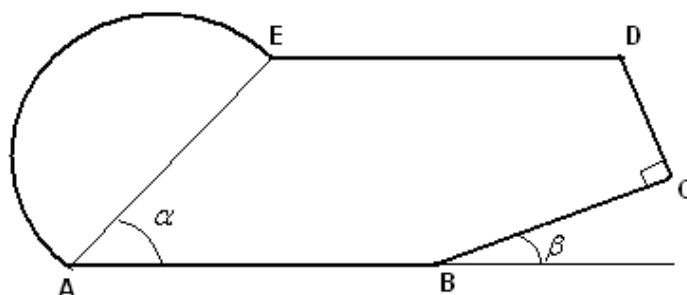


Figure 2

Exercice 5

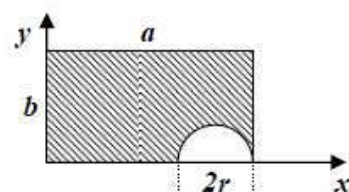
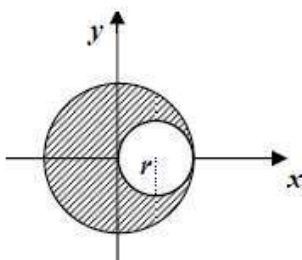
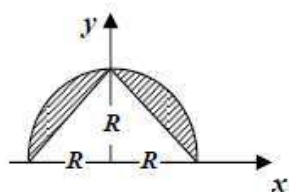
Calculer par rapport à un repère que vous choisissez les coordonnées du centre de gravité d'une surface homogène. $AB=ED=12$, $BC=8$, $CD=6$. $(AE) \parallel (BD)$, $(AB) \parallel (ED)$, $(BC) \perp (CD)$.

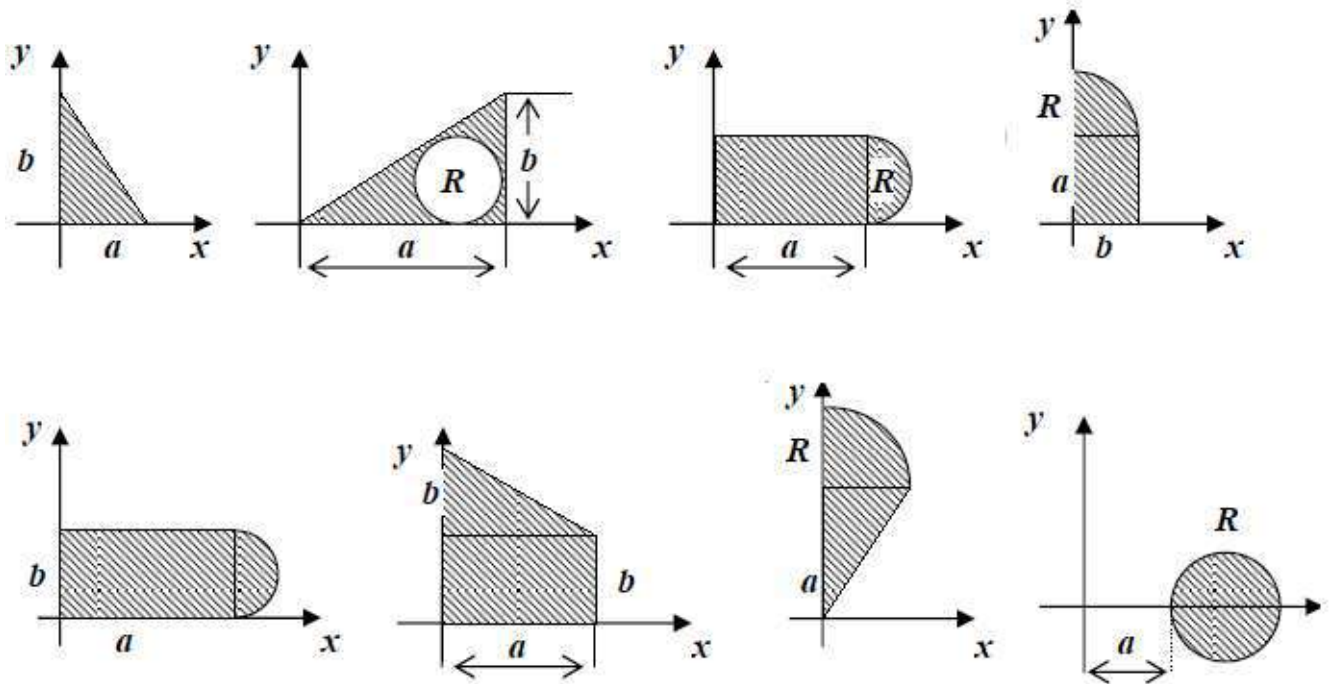
La forme arrondie est un demi-cercle. On donne les angles : $\alpha = (\vec{AB}, \vec{AE}) = 60^\circ$



Exercice supplémentaire (non corrigé)

Calculer les coordonnées du centre de gravité des solides homogènes ci-dessous :





SOLUTION DU TD N°3

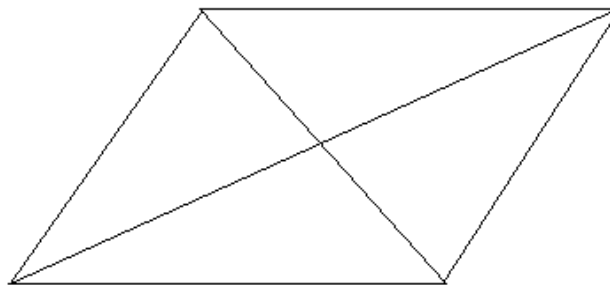
Exercice 1

a- Le point de rencontre des diagonales est un centre de symétrie pour le parallélogramme. Or on a vu que tout centre de symétrie d'une structure homogène est un centre de gravité.

En effet, si la structure possède un centre de symétrie O, alors on peut décomposer la surface en deux parties S1 et S2 telle que S2 soit le symétrique de S1 par rapport à O.

On par définition : $m \cdot \vec{OG} = \int_S \vec{OG}_i dm = \int_{S1} \vec{OG}_i dm + \int_{S2} \vec{OG}_i dm = \int_{S1} \vec{OG}_i dm + \int_{S1} -\vec{OG}_i dm = 0$

d'où $G=O$

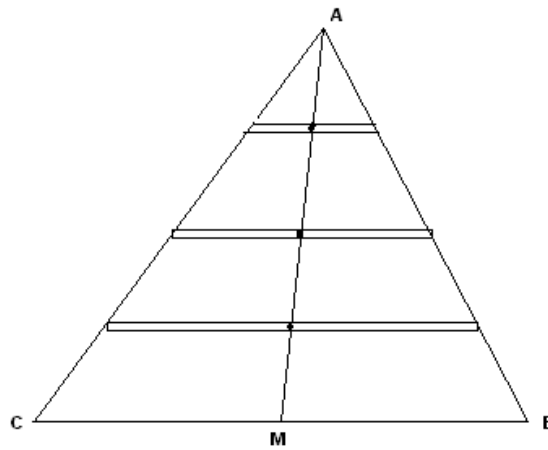


b- Soit un triangle ABC, on décompose la surface en tranches infinitésimales (épaisseur très petite) parallèles à BC. Le centre de gravité de chaque tranche est situé en son milieu. Or on a vu que le centre de gravité d'un solide composé de deux autres solides de centres de gravité G_1 et G_2 est situé sur la droite G_1G_2 . Donc le centre de gravité du triangle est situé sur la droite reliant les milieux de chaque tranche, il se trouve donc sur la médiane AM.

D'une façon similaire, on peut montrer qu'il se trouve sur les 2 autres médianes.

Le centre de gravité est donc le point d'intersection des médianes.

En utilisant la géométrie des triangles, on montre que $AG = \frac{2}{3} AM$



Exercice 2

Déterminer le centre de gravité des masses linéiques homogènes ci-dessous.

1^{er} cas (figure 1) :

Le centre de gravité G_1 de la tige rectiligne se trouve en son milieu, nous avons donc $G_1(-R, R)$, le centre de gravité G_2 de la tige demi-cercle se trouve sur son axe de symétrie x, d'après le formulaire du cours, nous avons $G_2(\frac{2R}{\pi}, 0)$. Les deux tiges sont homogènes, le centre de gravité de l'ensemble a pour coordonnées :

$$x_G = \frac{m_1 x_{G1} + m_2 x_{G2}}{m_1 + m_2} = \frac{\lambda 2R x_{G1} + \lambda R\pi x_{G2}}{\lambda 2R + \lambda R\pi} = 0$$

$$y_G = \frac{m_1 y_{G1} + m_2 y_{G2}}{m_1 + m_2} = \frac{\lambda 2R y_{G1} + \lambda R\pi y_{G2}}{\lambda 2R + \lambda R\pi} = \frac{2R}{2 + \pi}$$

2^{ème} cas (figure 2) :

Le centre de gravité G_1 de la tige rectiligne se trouve en son milieu, nous avons donc $G_1(R, 0)$, le centre de gravité G_2 du cercle se trouve au centre, nous avons $G_2(-R, 0)$. Les deux tiges sont homogènes, le centre de gravité de l'ensemble a pour coordonnées :

$$x_G = \frac{m_1 x_{G1} + m_2 x_{G2}}{m_1 + m_2} = \frac{\lambda 2R x_{G1} + \lambda 2R\pi x_{G2}}{\lambda 2R + \lambda 2R\pi} = \frac{1-\pi}{1+\pi} R ; y_G = 0$$

3^{ème} cas (figure 3):

Le centre de gravité G_1 de la tige rectiligne se trouve en son milieu, nous avons donc $G_1(R, 0)$, le centre de gravité G_2 de la tige demi-cercle se trouve sur son axe de symétrie x, d'après le formulaire du cours, nous avons $G_2(R - \frac{2R}{\pi}, 0)$. Les deux tiges sont homogènes, le centre de gravité de l'ensemble a pour coordonnées :

$$x_G = \frac{m_1 x_{G1} + m_2 x_{G2}}{m_1 + m_2} = \frac{\lambda 2R x_{G1} + \lambda R\pi x_{G2}}{\lambda 2R + \lambda R\pi} = \frac{\pi R}{2+\pi} ; y_G = 0$$

Exercice 3

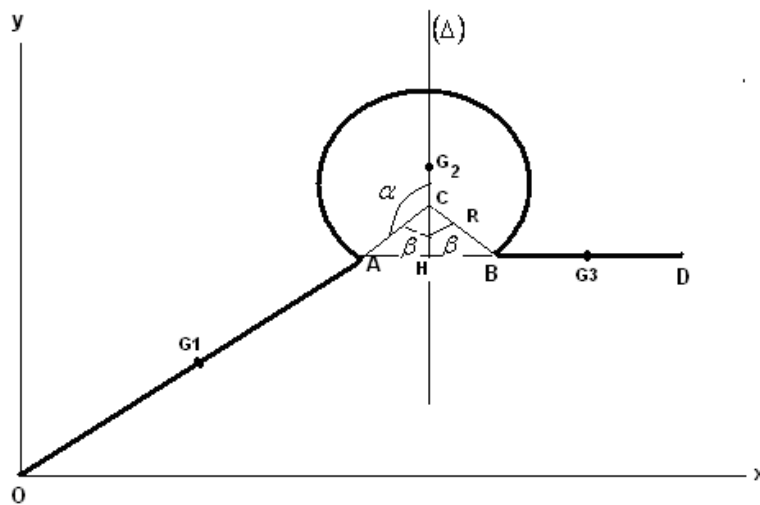
On note d'abord que le centre C du cercle se trouve sur la médiatrice du segment [AB].

On a: $AB=2$, $AC=BC=R=2$

$$\alpha = \pi - \beta, \quad \sin \alpha = \sin \beta = \frac{BH}{BC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \alpha = \frac{5\pi}{6},$$

La tige OA a pour longueur $l_1 = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$, son centre de gravité G_1 est situé en son

milieu : $\vec{OG_1} = \frac{\vec{OA}}{2} = 2\vec{i} + \frac{3}{2}\vec{j}$



La forme circulaire a pour longueur $l_2 = 2\alpha R = \frac{5}{3}\pi R = \frac{10}{3}\pi$, son centre de gravité G_2 est situé sur son axe de symétrie (Δ), d'après le formulaire, on a :

$$CG_2 = \frac{R \sin \alpha}{\alpha} = \frac{6}{5\pi}$$

$$\text{On a } \overrightarrow{OG_2} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HC} + \overrightarrow{CG_2} = 5\vec{i} + 3\vec{j} + \left(R \cos \beta + \frac{6}{5\pi}\right)\vec{j} = 5\vec{i} + \left(3 + \sqrt{3} + \frac{6}{5\pi}\right)\vec{j}$$

La tige BD a pour longueur $l_3 = 4$, son centre de gravité G_3 est situé au milieu de BD.

$$\overrightarrow{OG_3} = \overrightarrow{OB} + \frac{\overrightarrow{BD}}{2} = 6\vec{i} + 3\vec{j} + \frac{4\vec{i}}{2} = 8\vec{i} + 3\vec{j}$$

La tige étant homogène et par conséquent :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\sum_{i=1}^3 l_i \overrightarrow{OG_i}}{\sum_{i=1}^3 l_i} = \frac{l_1 \overrightarrow{OG_1} + l_2 \overrightarrow{OG_2} + l_3 \overrightarrow{OG_3}}{l_1 + l_2 + l_3}$$

$$\overrightarrow{OG} = \frac{5\left(2\vec{i} + \frac{3}{2}\vec{j}\right) + \frac{10}{3}\pi\left(5\vec{i} + \left(3 + \sqrt{3} + \frac{6}{5\pi}\right)\vec{j}\right) + 4(8\vec{i} + 3\vec{j})}{5 + \frac{10}{3}\pi + 4} = 4.02\vec{i} + 3.75\vec{j}$$

Le centre de gravité G a pour coordonnées (4.02, 3.75)

Exercice 4

1^{er} cas (figure 1) :

Le centre de gravité se trouve sur l'axe (ox) car ce dernier est un axe de symétrie.

a) Centre de gravité du triangle

la partie triangulaire a pour surface $S_1 = 2Ra$, son centre de gravité G_1 se trouve sur la médiane (ox) tel que :

$$X_{G1} = \frac{2}{3} 2R = \frac{4R}{3}.$$

b) Le centre de gravité du secteur circulaire

Le secteur circulaire a pour surface $S_2 = \alpha R^2$, son centre de gravité G_2 est tel que (voir cours):

$$X_{G2} = \frac{2R \sin \alpha}{3\alpha}.$$

c) Le centre de gravité du solide

$$x_G = \frac{m_1 x_{G1} - m_2 x_{G2}}{m_1 - m_2} = \frac{\sigma S_1 x_{G1} - \sigma S_2 x_{G2}}{\sigma S_1 - \sigma S_2} = \frac{2R}{3} \frac{4a - R \sin \alpha}{2a - \alpha R}; y_G = 0$$

2^{ème} cas (figure 2) :

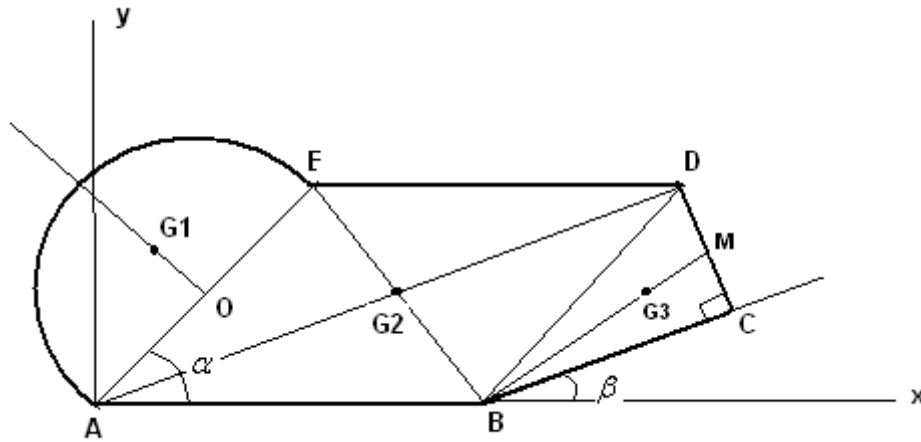
- a) Le rectangle a pour surface $S_1 = 2aR$, son centre de gravité a pour coordonnées $G_1(a, \frac{R}{2})$
- b) Le disque a pour surface $S_2 = \pi a^2$, son centre de gravité a pour coordonnées $G_2(a, a)$
- c) Le quart du disque a pour surface $S_3 = \frac{\pi R^2}{4}$, son centre de gravité a pour coordonnées (voir cours) $G_3(2a + \frac{4R}{3\pi}, \frac{4R}{3\pi})$
- d) Le centre de gravité du solide est tel que :

$$x_G = \frac{m_1 x_{G1} - m_2 x_{G2} + m_3 x_{G3}}{m_1 - m_2 + m_3} = \frac{\sigma S_1 x_{G1} - \sigma S_2 x_{G2} + \sigma S_3 x_{G3}}{\sigma S_1 - \sigma S_2 + \sigma S_3}$$

$$y_G = \frac{m_1 y_{G1} - m_2 y_{G2} + m_3 y_{G3}}{m_1 - m_2 + m_3} = \frac{\sigma S_1 y_{G1} - \sigma S_2 y_{G2} + \sigma S_3 y_{G3}}{\sigma S_1 - \sigma S_2 + \sigma S_3}$$

$$x_G = \frac{2a^2 R - \pi a^3 + \frac{\pi R^2}{4} (2a + \frac{4R}{3\pi})}{2aR - \pi a^2 + \frac{\pi R^2}{4}} ; \quad y_G = \frac{2aR^2 - \pi a^3 + \frac{R^3}{3}}{2aR - \pi a^2 + \frac{\pi R^2}{4}}$$

Exercice 5



Le solide peut être décomposé en 3 éléments : un demi-disque de centre O et de rayon OA, un parallélogramme ABDE, et un triangle droit BCD.

1- Le demi-disque a pour rayon $R = OA = \frac{AE}{2} = \frac{BD}{2} = \frac{\sqrt{BC^2 + CD^2}}{2} = \frac{\sqrt{64 + 36}}{2} = 5$

Sa surface est égale à $S_1 = \frac{\pi R^2}{2} = 39.27$, son centre de gravité G_1 est (voir formulaire) tel

que : $OG_1 = \frac{4R}{3\pi}$

$$\text{On } A\vec{G}_1 = A\vec{O} + O\vec{G}_1 = R(\cos \alpha \vec{i} + \sin \alpha \vec{j}) + \frac{4R}{3\pi}(-\sin \alpha \vec{i} + \cos \alpha \vec{j})$$

$$A\vec{G}_1 = \left(R \cos \alpha - \frac{4R}{3\pi} \sin \alpha\right) \vec{i} + \left(R \sin \alpha + \frac{4R}{3\pi} \cos \alpha\right) \vec{j} = 0.66\vec{i} + 5.39\vec{j}$$

2- Pour le parallélogramme ABDE, la surface est égale à :

$$S_2 = \|\vec{AB} \wedge \vec{AE}\| = AB \ AE \sin \alpha = 12 \ 10 \sin 60^\circ = 103.92$$

Son centre de gravité G2 est tel que :

$$A\vec{G}_2 = \frac{A\vec{D}}{2} = \frac{A\vec{B} + B\vec{D}}{2} = \frac{AB \vec{i} + BD(\cos \alpha \vec{i} + \sin \alpha \vec{j})}{2} = \frac{(AB + BD \cos \alpha) \vec{i} + BD \sin \alpha \vec{j}}{2}$$

$$A\vec{G}_2 = \frac{(AB + BD \cos \alpha) \vec{i} + BD \sin \alpha \vec{j}}{2} = 8.5\vec{i} + 4.33\vec{j}$$

3- Le triangle BCD a pour surface $S_3 = \frac{BC \ CD}{2} = \frac{8 \ 6}{2} = 24$, son centre de gravité G3 est

situé sur la médiane BM, il est tel que : $B\vec{G}_3 = \frac{2}{3} B\vec{M}$

$$\vec{BM} = \vec{BC} + \vec{CM} = BC(\vec{i} \cos \beta + \vec{j} \sin \beta) + CM(-\sin \beta \vec{i} + \cos \beta \vec{j})$$

Si $\theta = \text{angle}(\vec{BC}, \vec{BD})$, alors $\beta = \alpha - \theta$

$$\sin \beta = \sin(\alpha - \theta) = \sin \alpha \cos \theta - \cos \alpha \sin \theta$$

$$\sin \beta = \frac{\sqrt{3} \ CD}{2 \ BD} - \frac{1 \ BC}{2 \ BD} = \frac{\sqrt{3} \ 8}{2 \ 10} - \frac{1 \ 6}{2 \ 10} = 0.3928$$

$$\cos \beta = \cos(\alpha - \theta) = \cos \alpha \cos \theta + \sin \alpha \sin \theta$$

$$\cos \beta = \frac{1 \ BC}{2 \ BD} + \frac{\sqrt{3} \ CD}{2 \ BD} = \frac{1 \ 8}{2 \ 10} + \frac{\sqrt{3} \ 6}{2 \ 10} = 0.9196$$

$$\vec{BM} = 6.18 \vec{i} + 5.90 \vec{j}$$

$$\vec{AG}_3 = \vec{AB} + \vec{BG}_3 = \vec{AB} + \frac{2}{3} \vec{BM}$$

$$\vec{AG}_3 = 12 \vec{i} + \frac{2}{3} (6.18 \vec{i} + 5.90 \vec{j}) = 16.12 \vec{i} + 3.93 \vec{j}$$

$$\vec{AG} = \frac{39.27 (0.66 \vec{i} + 5.39 \vec{j}) + 103.92 (8.5 \vec{i} + 4.33 \vec{j}) + 24 (6.18 \vec{i} + 5.90 \vec{j})}{39.27 + 103.92 + 24}$$

$$\vec{AG} = 6.33 \vec{i} + 4.80 \vec{j}$$

Par rapport au repère (A,x,y), le centre de gravité a pour coordonnées :

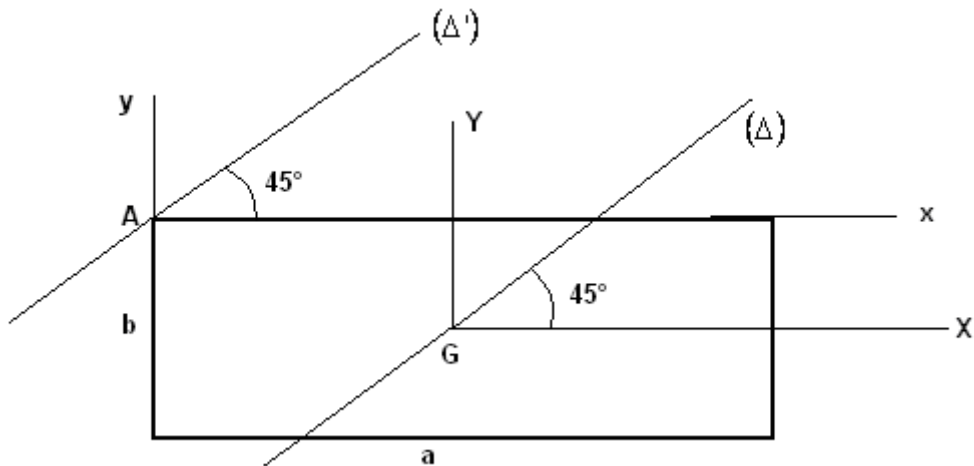
G (6.33, 4.80)

TD N°4

MOMENT D'INERTIE TENSEUR D'INERTIE

Exercice 1

a- Calculer les tenseurs d'inertie suivant les repères (G, X, Y, Z) et (A, x, y, z) d'une plaque rectangulaire de masse M , de longueur a et de largeur b .

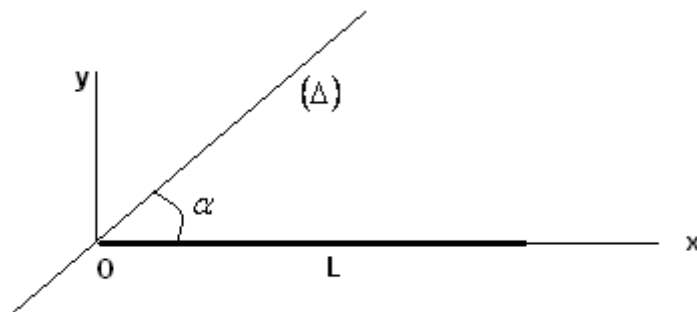


b- Calculer le moment d'inertie de la plaque par rapport à un axe (Δ) passant par G et faisant un angle de 45° avec GX

c- Calculer le moment d'inertie de la plaque par rapport à un axe (Δ') passant par A et faisant un angle de 45° avec Ax

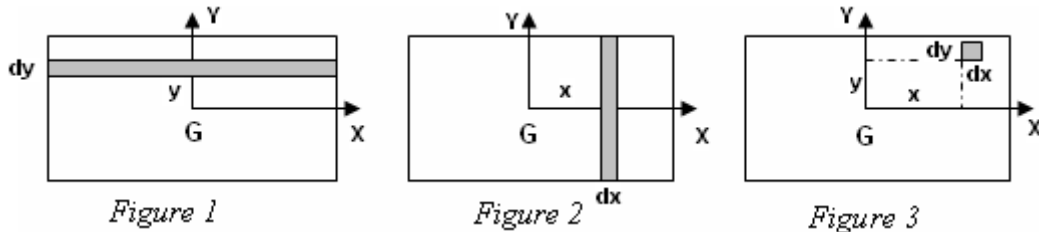
Exercice 2

Calculer le moment d'inertie d'une tige homogène de longueur l , par rapport à une droite (Δ) passant par l'une de ses extrémités et faisant avec elle un angle α



SOLUTION DU TD N°4

Exercice 1



Le solide est une plaque de dimension $a \times b$. Sa surface est $S = ab$, sa Masse : $M = \sigma S$ avec $\sigma = \frac{M}{S} = \frac{M}{ab}$. Pour calculer J_{XX} , on découpe le domaine en plaques rectangulaires horizontales infiniment petites (figure 1) de telle sorte que la distance entre cette plaque et l'axe (GX) soit constante. Cette plaque a pour surface $dS = a dy$ et pour masse :

$$dm = \sigma dS = \frac{M}{ab} dS = \frac{M}{ab} a dy = \frac{M}{b} dy$$

$$J_{XX} = \int_S y^2 dm = \int_{-b/2}^{b/2} y^2 \frac{M}{a} dy = \frac{M}{b} \left[\frac{y^3}{3} \right]_{-b/2}^{b/2} = \frac{M}{3b} \left(\left(\frac{b}{2} \right)^3 - \left(-\frac{b}{2} \right)^3 \right) = \frac{M b^2}{12}$$

En découpant le solide en plaques rectangulaires verticales (figure 2) on obtient:

$$dm = \sigma dS = \frac{M}{ab} dS = \frac{M}{ab} a dy = \frac{M}{b} dy$$

$$J_{YY} = \int_S x^2 dm = \int_{-a/2}^{a/2} x^2 \frac{M}{a} dx = \frac{M}{a} \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-a/2}^{a/2} = \frac{M}{3a} \left(\left(\frac{a}{2} \right)^3 - \left(-\frac{a}{2} \right)^3 \right) = \frac{M a^2}{12}$$

$$J_{ZZ} = \int_S (x^2 + y^2) dm = \int_S (x^2) dm + \int_S (y^2) dm = J_{XX} + J_{YY} = \frac{M}{12} (a^2 + b^2)$$

Pour calculer $J_{XY} = \int_S xy dm$, on découpe le domaine (figure 3) en plaques rectangulaires de

surface $dS = dx dy$ et de masse $= \sigma dS = \frac{M}{ab} dx dy$.

$$J_{XY} = \int_S xy dm = \frac{M}{ab} \int_{-a/2}^{a/2} x dx \int_{-b/2}^{b/2} y dy = \frac{M}{ab} \left(\left(\frac{a}{2} \right)^2 - \left(-\frac{a}{2} \right)^2 \right) \left(\left(\frac{b}{2} \right)^2 - \left(-\frac{b}{2} \right)^2 \right) = 0.$$

$$J_{XZ} = J_{YZ} = 0 \text{ car } z=0$$

Ce résultat était attendu, car les axes (GX), (GY) et (GZ) sont des axes de symétrie, donc des axes principaux et par conséquent les produits d'inertie sont nuls.

Remarque : On pouvait utiliser le découpage de la figure 3, pour calculer J_{XX}

$$J_{XX} = \int_S y^2 dm = \int_S y^2 \frac{M}{ab} dx dy = \frac{M}{ab} \int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-b/2}^{b/2} y^2 dy = \frac{M}{ab} (a - (-a)) \frac{1}{3} \left(\left(\frac{b}{2} \right)^3 - \left(-\frac{b}{2} \right)^3 \right) = \frac{M}{12} b^2.$$

$$[J_G]_{XYZ} = \frac{M}{12} \begin{bmatrix} b^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & b^2 + a^2 \end{bmatrix}$$

Pour calculer le tenseur d'inertie par rapport au repère Axyz, il suffit de changer les bornes de l'intégrale, 0 à a pour x , et 0 à b pour y , ou appliquer le théorème de Huygens pour les moments d'inertie.

$$[J_A]_{xyz} = [J_G]_{XYZ} + \begin{bmatrix} M + \left(\frac{b}{2}\right)^2 & -M \frac{b}{2} \frac{a}{2} & 0 \\ -M \frac{b}{2} \frac{a}{2} & M + \left(\frac{a}{2}\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & M \left(\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \right) \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} \frac{b^2}{3} & \frac{-ab}{4} & 0 \\ \frac{-ab}{4} & \frac{a^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{b^2 + a^2}{3} \end{bmatrix}$$

$$J_{\Delta} = \langle u \rangle [J_G]_{XYZ} \{u\} = \frac{M}{24} (a^2 + b^2) \quad J_{\Delta'} = \langle u \rangle [J_A]_{xyz} \{u\} = \frac{M}{12} (2a^2 + 2b^2 - 3ab)$$

$$\text{avec } \langle u \rangle = \langle \cos 45^\circ, \sin 45^\circ, 0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \langle 1, 1, 0 \rangle$$

Exercice 2

Pour trouver le tenseur d'inertie de la tige, il suffit de remplacer dans la formule de $[J_A]_{xyz}$, l

par a et b par zéro.

$$[J_O]_{xyz} = \frac{M l^2}{3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$J_{\Delta} = \langle u \rangle [J_O]_{xyz} \{u\} = (\cos \alpha, \sin \alpha, 0) \frac{M l^2}{3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{M l^2}{3} \sin^2 \alpha$$

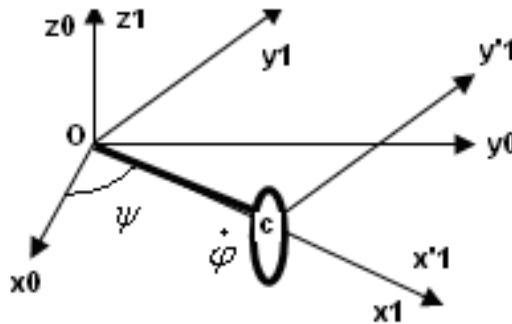
TD N°5

MOMENT CINÉTIQUE, ENERGIE CINÉTIQUE

Exercice 1

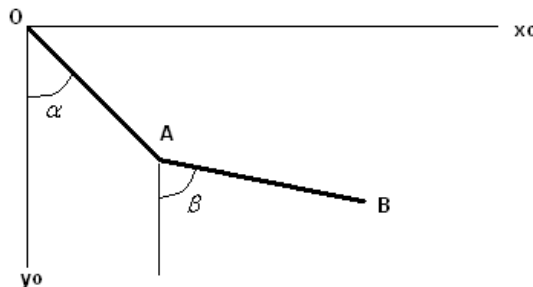
Soit un solide (S) constitué d'une tige OC de masse M' , et d'un cerceau de masse M et de rayon R tournant autour de son axe horizontal, l'ensemble tourne autour de Ozo qui est fixe et vertical.

- a- Calculer le moment cinétique de (S) par rapport à O.
- b- Calculer son énergie cinétique.



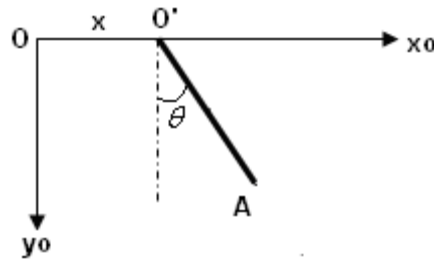
Exercice 2

Deux tiges homogènes OA et AB, de masse M et de longueur l sont articulées entre-elles en A. La première est mobile autour de O. Elles sont assujetties à rester dans le plan vertical x_0y_0 . Calculer le moment cinétique du système $\vec{\sigma}_O$ et son énergie cinétique.



Exercice 3

On considère un pendule dit elliptique constitué d'une barre O'A homogène (masse M , longueur l) qui oscille dans le plan vertical et dont l'extrémité O' glisse sur l'axe horizontal Oxo. Calculer son moment cinétique $\vec{\sigma}_O$ et son énergie cinétique.



Exercice 4

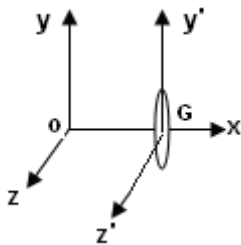
Soit une plaque homogène de masse m , de cotés $2a$ et $2b$, et de centre de gravité G , tournant autour d'une de ses diagonales fixe à la vitesse angulaire $\vec{\omega}$.

Calculer son moment cinétique $\vec{\sigma}_G$ et son énergie cinétique.

SOLUTION DU TD N°5

Rappel

a) Le tenseur d'inertie d'un cerceau de rayon R (voir cours) :

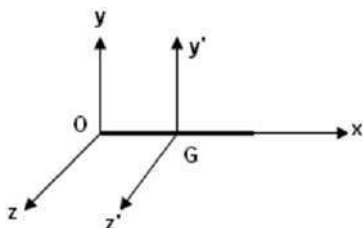


$$[J_G]_{xy'z'} = \frac{MR^2}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

D'après d'Huygens :

$$[J_O]_{xyz} = \begin{pmatrix} MR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{MR^2}{2} + Ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{MR^2}{2} + Ma^2 \end{pmatrix} \quad (2)$$

b) Le tenseur d'inertie d'une barre de longueur l est (TD 4, exercice 2) :

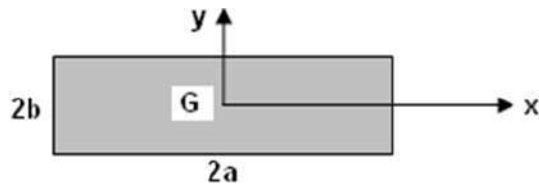


$$[J_G]_{xy'z'} = \frac{Ml^2}{12} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

D'après d'Huygens :

$$[J_O]_{xyz} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{Ml^2}{12} + M\left(\frac{l}{2}\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{Ml^2}{12} + M\left(\frac{l}{2}\right)^2 \end{pmatrix} = \frac{Ml^2}{3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

c) Le tenseur d'inertie d'une plaque rectangulaire de cotés 2a et 2b est (TD 4, exercice 1) :

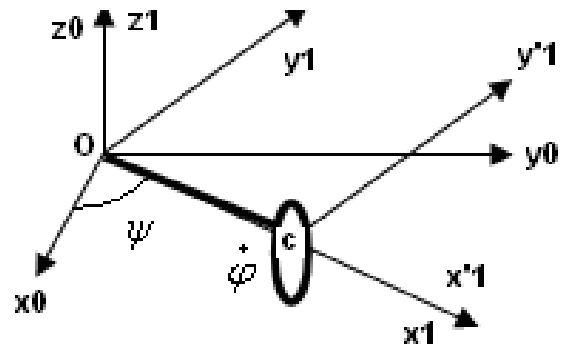


$$[J_G]_{xyz} = \frac{M}{3} \begin{pmatrix} b^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 + b^2 \end{pmatrix} \quad (5)$$

Exercice 1

R₀ : repère fixe Ox₀y₀z₀
R₁ : repère mobile Ox₁y₁z₁
R_c : repère Cx'₁y'₁z'₁

$$\vec{\omega}_{S1/0} = \dot{\psi} \vec{k} \quad \vec{\omega}_{S2/0} = \dot{\phi} \vec{i}_1 + \dot{\psi} \vec{k}$$



Le solide (S) formé de S1 (tige oc) et de S2 (cerceau) :

Le moment cinétique du système est égal à : $\vec{\sigma}_O (S) = \vec{\sigma}_O (S1) + \vec{\sigma}_O (S2)$

$$\vec{\sigma}_O (S1) = [J_O]_{x_1 y_1 z_1} \vec{\omega}_{1/0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{M' l^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{M' l^2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{M' l^2}{3} \dot{\psi} \end{pmatrix} = \frac{M' l^2}{3} \dot{\psi} \vec{k}_1$$

$$\vec{\sigma}_O (S2) = M \vec{OC} \wedge \vec{V}_C + \vec{\sigma}_C \quad \vec{\sigma}_C = [J_C]_{x_1 y_1 z_1} \vec{\omega}_{2/0}$$

$$O\vec{C} = a\vec{i}_1, \quad \vec{V}_c = \frac{d O\vec{C}}{dt} \Big|_{R_0} = a\vec{\omega}_{1/0} \wedge \vec{i}_1 = a\dot{\psi}\vec{k}_1 \wedge \vec{i}_1 = a\dot{\psi}\vec{j}_1$$

$$M O\vec{C} \wedge \vec{V}_c = M a \dot{\psi} \vec{i}_1 \wedge \vec{j}_1 = M a^2 \dot{\psi} \vec{k}_1$$

$$\text{D'après l'éq (4):} \quad \vec{\sigma}_O(S2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (M a^2) \dot{\psi} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} M R^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{M R^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{M R^2}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M R^2 \dot{\phi} \\ 0 \\ \left(\frac{M R^2}{2} + M a^2 \right) \dot{\psi} \end{pmatrix}$$

$$\vec{\sigma}_O(S) = \vec{\sigma}_O(S1) + \vec{\sigma}_O(S2) = \begin{pmatrix} M R^2 \dot{\phi} \\ 0 \\ \left(\frac{M R^2}{2} + M a^2 + \frac{M' l^2}{3} \right) \dot{\psi} \end{pmatrix}$$

L'énergie cinétique du système est égale à :

$$T(S1) = \frac{1}{2} \vec{\omega}_{1/0} \cdot \vec{\sigma}_O(S1) = \frac{M' l^2}{6} \dot{\psi}^2$$

$$T(S2) = \frac{1}{2} M V_C^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega}_{2/0} \cdot \vec{\sigma}_C$$

$$T(S2) = \frac{M a^2}{2} \dot{\psi}^2 + \frac{M R^2}{4} \dot{\psi}^2 = \frac{M}{2} \left(\frac{R^2}{2} + a^2 \right) \dot{\psi}^2$$

$$T(S) = T(S1) + T(S2) = \frac{M' l^2}{6} \dot{\psi}^2 + \frac{M}{2} \left(\frac{R^2}{2} + a^2 \right) \dot{\psi}^2$$

Exercise 2

R0: repère 0 x0 y0 z0

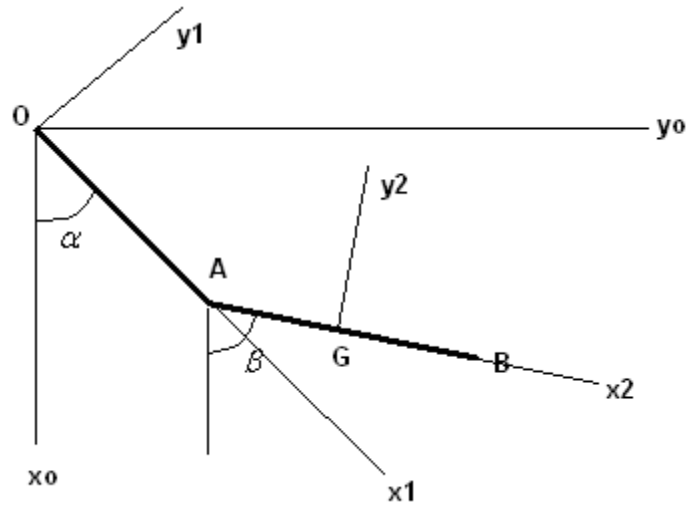
R1: repère 0 x1 y1 z1

RG: repère G x2 y2 z2

$$\vec{k}_0 = \vec{k}_1 = \vec{k}_2$$

$$\vec{\omega}(OA) = \dot{\alpha} \vec{k}_0$$

$$\vec{\omega}(AB) = \dot{\beta} \vec{k}_0$$



$$\vec{\sigma}_O(OA) = [J_O]_{x_1 y_1 z_1} \vec{\omega}(OA) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{M l^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{M l^2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{M l^2}{3} \dot{\alpha} \end{pmatrix} = \frac{M l^2}{3} \dot{\alpha} \vec{k}_1 = \frac{M l^2}{3} \dot{\alpha} \vec{k}_0$$

$$\vec{\sigma}_O(AB) = M \vec{OG} \wedge \vec{V}_G + \vec{\sigma}_G(AB)$$

$$O\vec{G}|_{R_1} = O\vec{A} + A\vec{G} = \begin{pmatrix} l \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{l}{2} \cos(\beta - \alpha) \\ \frac{l}{2} \sin(\beta - \alpha) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l + \frac{l}{2} \cos(\beta - \alpha) \\ \frac{l}{2} \sin(\beta - \alpha) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{V}_G = \frac{d O\vec{G}}{dt} \Big|_{R_0} = \frac{d O\vec{G}}{dt} \Big|_{R_1} + \vec{\omega}_{1/0} \wedge O\vec{G}$$

$$\vec{V}_G = \begin{pmatrix} -\frac{l}{2} (\dot{\beta} - \dot{\alpha}) \sin(\beta - \alpha) \\ \frac{l}{2} (\dot{\beta} - \dot{\alpha}) \cos(\beta - \alpha) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} l + \frac{l}{2} \cos(\beta - \alpha) \\ \frac{l}{2} \sin(\beta - \alpha) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{l}{2} \dot{\beta} \sin(\beta - \alpha) \\ l \dot{\alpha} + \frac{l}{2} \dot{\beta} \cos(\beta - \alpha) \\ 0 \end{pmatrix}_{R_1}$$

$$M \vec{O\vec{G}} \wedge \vec{V_G} = \begin{pmatrix} l + \frac{l}{2} \cos(\beta - \alpha) \\ \frac{l}{2} \sin(\beta - \alpha) \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \frac{l}{2} \dot{\beta} \sin(\beta - \alpha) \\ l \dot{\alpha} + \frac{l}{2} \dot{\beta} \cos(\beta - \alpha) \\ 0 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha} l^2 + \dot{\beta} \frac{l^2}{4} + \frac{l^2}{2} (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \cos(\beta - \alpha) \end{pmatrix}_{R_1}$$

$$\vec{\sigma}_G(AB) = [J_G]_{x_2 y_2 z_2} \vec{\omega}(AB) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{M l^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{M l^2}{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{M l^2}{12} \dot{\beta} \end{pmatrix}$$

$$\vec{\sigma}_O(AB) = M \left[\dot{\alpha} l^2 + \dot{\beta} \frac{l^2}{4} + \frac{l^2}{2} (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \cos(\beta - \alpha) \right] \vec{k}_1 + \left(\frac{M l^2}{12} \dot{\beta} \right) \vec{k}_2$$

$$\vec{\sigma}_O(AB) = M \left[\dot{\alpha} l^2 + \dot{\beta} \frac{l^2}{3} + \frac{l^2}{2} (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \cos(\beta - \alpha) \right] \vec{k}_0$$

$$\vec{\sigma}_O(\text{systeme}) = \vec{\sigma}_O(OA) + \vec{\sigma}_O(AB) = M \left[\dot{\alpha} \frac{4l^2}{3} + \dot{\beta} \frac{l^2}{3} + \frac{l^2}{2} (\dot{\alpha} + \dot{\beta}) \cos(\beta - \alpha) \right] \vec{k}_0$$

$$T(OA) = \frac{1}{2} \vec{\omega}(OA) \cdot \vec{\sigma}_O(OA) = \frac{M l^2}{6} \dot{\alpha}^2$$

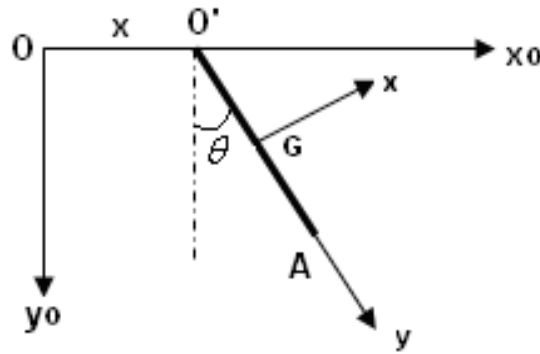
$$T(AB) = \frac{1}{2} M V_G^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega}(AB) \cdot \vec{\sigma}_G(AB)$$

$$T(AB) = \frac{1}{2} M \left(\frac{l^2}{4} \dot{\beta}^2 + l^2 \dot{\alpha}^2 + l^2 \dot{\alpha} \dot{\beta} \cos(\beta - \alpha) \right) + M \frac{l^2}{24} \dot{\beta}^2$$

$$T(AB) = \frac{1}{2} M l^2 \left(\frac{\dot{\beta}^2}{3} + \dot{\alpha}^2 + \dot{\alpha} \dot{\beta} \cos(\beta - \alpha) \right)$$

$$T(\text{systeme}) = T(OA) + T(AB) = \frac{1}{2} M l^2 \left(\frac{\dot{\beta}^2}{3} + \frac{4\dot{\alpha}^2}{3} + \dot{\alpha} \dot{\beta} \cos(\beta - \alpha) \right)$$

Exercise 3



$$\vec{\sigma}_O(O'A) = M \vec{OG} \wedge \vec{V}_G + \vec{\sigma}_G, \quad \vec{\sigma}_G = [J_G]_{xyz} \vec{\omega}(O'A) / R_0,$$

$$\vec{\sigma}_G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{M l^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{M l^2}{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{M l^2}{12} \dot{\theta} \end{pmatrix} = \frac{M l^2}{12} \dot{\theta} \vec{k}$$

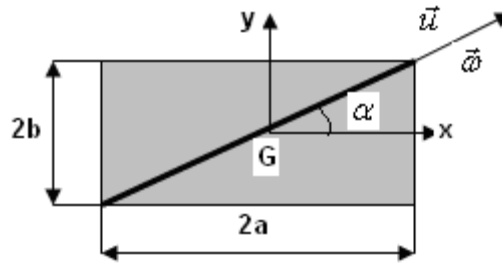
$$\vec{OG} = \vec{OO'} + \vec{O'G} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{l}{2} \sin \theta \\ \frac{l}{2} \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + \frac{l}{2} \sin \theta \\ \frac{l}{2} \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{V}_G = \frac{d \vec{OG}}{dt} \Big|_{R_0} = \begin{pmatrix} \dot{x} + \frac{l}{2} \dot{\theta} \cos \theta \\ -\frac{l}{2} \dot{\theta} \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} \quad M \vec{OG} \wedge \vec{V}_G = - \left[\frac{M l}{2} (x \dot{\theta} \sin \theta + \dot{x} \cos \theta) + \frac{M l^2}{4} \dot{\theta} \right] \vec{k}$$

$$\vec{\sigma}_O(O'A) = M \vec{OG} \wedge \vec{V}_G + \vec{\sigma}_G = -M \left[\frac{l}{2} (x \dot{\theta} \sin \theta + \dot{x} \cos \theta) + \frac{l^2}{6} \dot{\theta} \right] \vec{k}$$

$$T(O'A) = \frac{1}{2} M V_G^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega}(AB) \cdot \vec{\sigma}_G = \frac{1}{2} M \left(\dot{x}^2 + \frac{l^2 \dot{\theta}^2}{3} + l \dot{x} \dot{\theta} \cos \theta \right)$$

Exercice 4



La plaque tourne autour de sa diagonale de vecteur unitaire \vec{u}

$$\vec{\omega}(\text{plaque}) = \omega \vec{u} = \omega (\vec{i} \cos \alpha + \vec{j} \sin \alpha) = \omega \left(\vec{i} \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \vec{j} \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) = \frac{\omega}{\sqrt{a^2 + b^2}} (a \vec{i} + b \vec{j})$$

$$\vec{\sigma}_G(\text{plaque}) = [J_G]_{xyz} \vec{\omega}(\text{plaque}) = \frac{M}{3} \begin{pmatrix} b^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 + b^2 \end{pmatrix} \frac{\omega}{\sqrt{a^2 + b^2}} \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{Mab\omega}{3\sqrt{a^2 + b^2}} \begin{pmatrix} b \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T(\text{plaque}) = \frac{1}{2} \vec{\omega}(\text{plaque}) \vec{\sigma}_G(\text{plaque}) = M \omega^2 \frac{a^2 b^2}{3(a^2 + b^2)}$$

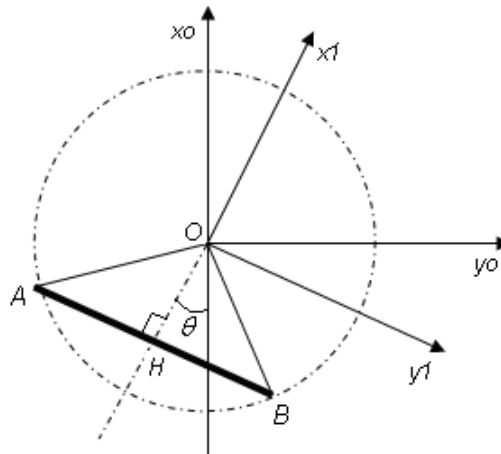
TD N°6

THEOREMES GENERAUX

Exercice 1

Une barre AB homogène de masse M, de longueur l glisse sans frottement dans un cerceau.

Trouver la relation $\dot{\theta} = f(\theta)$ à partir du théorème du moment cinétique. (on pose $a=OH$).

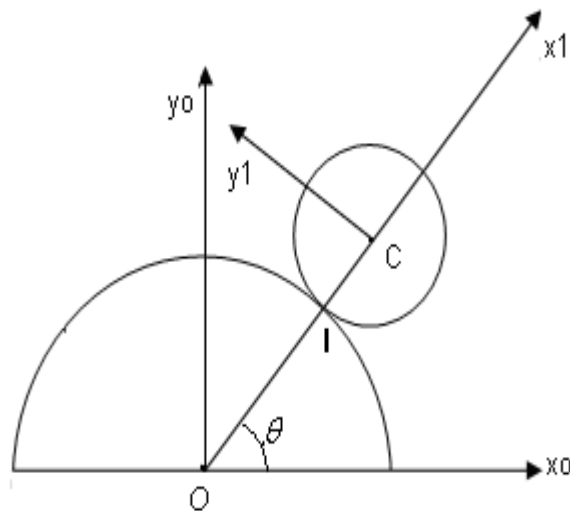


Exercice 2

Soit le roulement sans glissement d'un disque mince de masse M, de rayon r sur un anneau fixe de rayon R.

- Trouver la relation entre $\dot{\theta}$ et $\dot{\phi}$ ($\dot{\phi}$ est la vitesse angulaire du disque)
- Trouver la relation $\dot{\theta} = f(\theta)$ à partir du théorème du moment cinétique
- Calculer \vec{T} et \vec{N} les composantes de la réaction de contact en I.
- Montrer qu'à partir d'une certaine valeur θ_1 de θ , le disque quitte l'anneau.

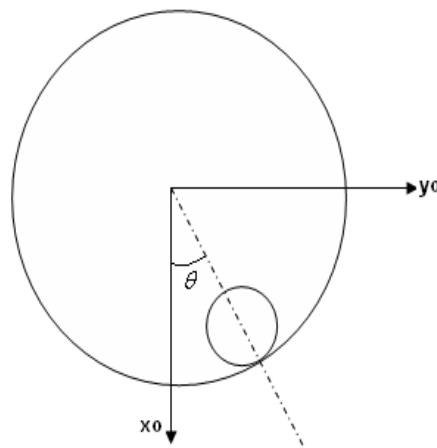
On prend : $\theta(0) = \theta_0$ et $\dot{\theta}(0) = 0$



Exercice 3

Un disque mince (masse M , rayon r) roule sans glisser à l'intérieur d'un anneau fixe de rayon R .

Calculer à partir du théorème de l'énergie cinétique, la période des petites oscillations du disque sachant que les frottements de roulement sont négligeables.

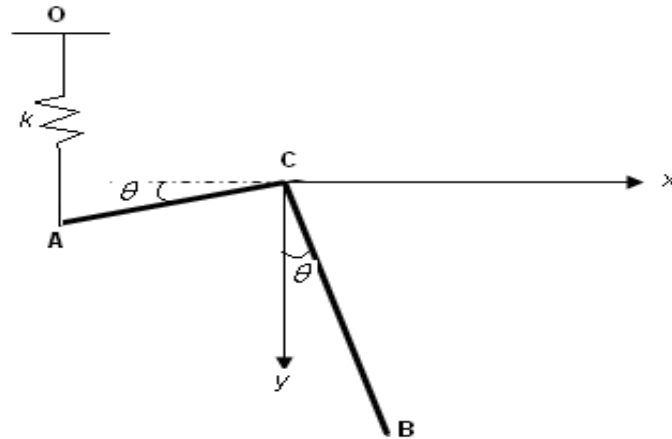


Exercice 4

Deux tiges CA et CB de masse m et $2m$, de longueur l et $2l$ (respectivement) sont solidaires et perpendiculaires entre elles. Elles sont assujetties par des liaisons parfaites à tourner dans un plan vertical autour du point fixe C . En A , est fixé un ressort de raideur k , la position de son

extrémité O est choisie de façon que la tige CA soit horizontale lorsque le système est en équilibre.

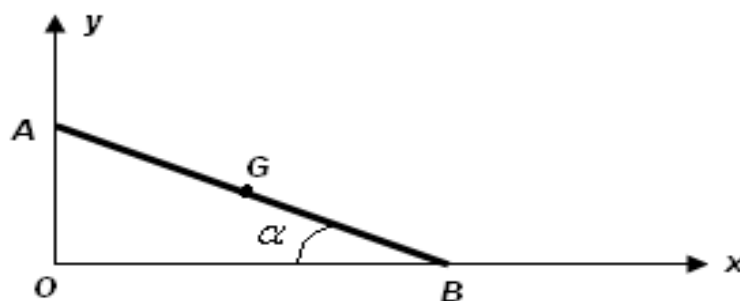
- Calculer la période des oscillations de faible amplitude au voisinage de la position d'équilibre.



Exercice 5

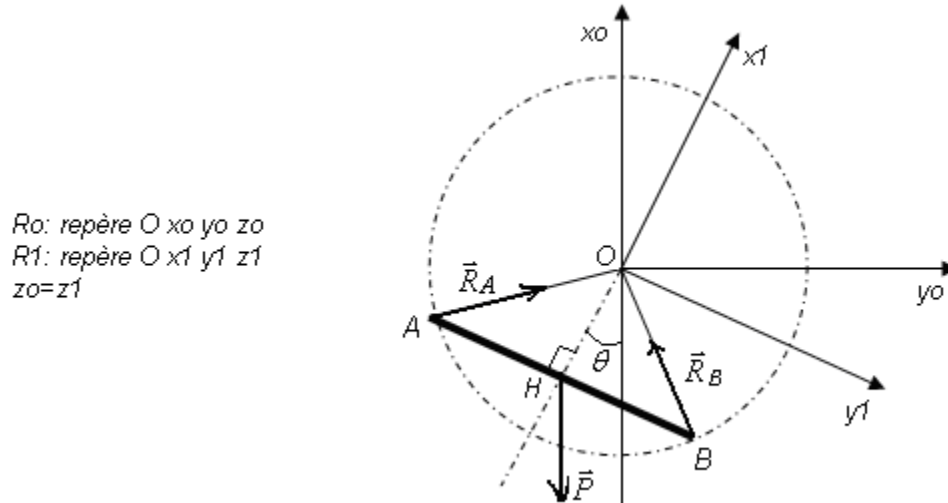
Les extrémités A et B d'une barre homogène de masse M et de longueur 2l glissent sans frottement, A sur un axe vertical, B sur un axe horizontal. On repère la position de la barre par l'angle α qu'elle fait avec l'axe l'horizontal. On prend à $t=0$: $\alpha(0) = \alpha_0$ et $\dot{\alpha}(0) = 0$.

- Ecrire l'équation du mouvement $\ddot{\alpha} = f(\alpha)$ à partir du théorème de l'énergie cinétique.
- Calculer les réactions \vec{R}_A et \vec{R}_B
- Montrer qu'à partir d'une certaine valeur α_1 de α , le point A quitte l'axe vertical.



SOLUTION DU TD N°6

Exercice 1



Le théorème du moment cinétique appliqué au point fixe O donne :

$$\sum \vec{M}_O = \frac{d\vec{\sigma}_O}{dt} \quad (1)$$

$$\sum \vec{M}_O = O\vec{A} \wedge \vec{R}_A + O\vec{B} \wedge \vec{R}_B + O\vec{H} \wedge \vec{P} = O\vec{H} \wedge \vec{P} = \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -Mg \cos \theta \\ Mg \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} = -agM \sin \theta \vec{k}_0$$

$$\vec{\sigma}_O = [J_O]_{x_1 y_1 z_1} \vec{\omega}_{barre} = \begin{pmatrix} M \frac{l^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & M a^2 & 0 \\ 0 & 0 & M \frac{l^2}{12} + M a^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = M \left(\frac{l^2}{12} + a^2 \right) \dot{\theta} \vec{k}_0$$

l'équation (1) donne:

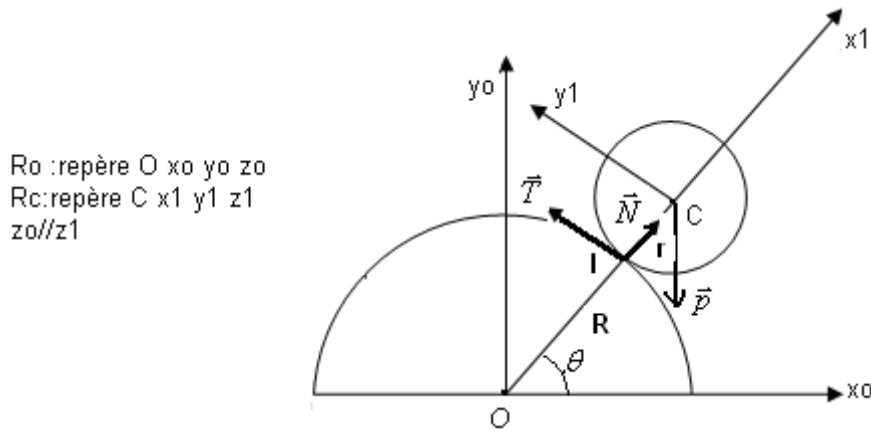
$$\left(\frac{l^2}{12} + a^2 \right) \ddot{\theta} + ag \sin \theta = 0 \quad (2)$$

Pour intégrer cette équation, on multiplie par $d\theta$:

$$\left(\frac{l^2}{12} + a^2 \right) \ddot{\theta} d\theta + ag \sin \theta d\theta = 0$$

$$\dot{\theta} d\dot{\theta} = \frac{d\dot{\theta}}{dt} d\theta = \dot{\theta} d\dot{\theta} \quad \text{Soit après intégration} \quad \left(\frac{l^2}{12} + a^2 \right) \frac{\dot{\theta}^2}{2} - ag \cos \theta = Cte \quad (3)$$

Exercice 2



θ est l'angle de rotation du disque autour de l'axe oz $\vec{\omega}_{1/0} = \dot{\theta} \vec{k}$

φ est l'angle de rotation du disque autour de l'axe Iz.

La vitesse angulaire totale du disque est égale à : $\vec{\omega}_{2/0} = (\dot{\theta} + \dot{\varphi}) \vec{k}$

Roulement sans glissement : $\vec{v}_I = 0$

$$O\vec{C} = (R+r)\vec{i}_1 \Rightarrow \vec{v}_C = (R+r) \frac{d\vec{i}_1}{dt} = (R+r) \dot{\theta} \vec{j}_1$$

$$\vec{v}_I = \vec{v}_C + \vec{\omega}_{disq} \wedge C\vec{I} = 0 \Rightarrow (R+r) \dot{\theta} \vec{j}_1 + (\dot{\theta} + \dot{\varphi}) \vec{k} \wedge (-r \vec{i}_1) = (\dot{R}\theta - r\dot{\varphi}) \vec{j}_1 = 0$$

$$R\dot{\theta} - r\dot{\varphi} = 0 \quad (1)$$

Le théorème du moment cinétique appliqué en C (centre de gravité) donne :

$$\Sigma \vec{M}_c = \frac{d\vec{\sigma}_c}{dt} \quad (2)$$

$$\Sigma \vec{M}_c = C\vec{I} \wedge \vec{T} = -r \vec{i}_1 \wedge (T \vec{j}_1) = -rT(\vec{i}_1 \wedge \vec{j}_1) = -rT\vec{k}$$

$$\vec{\sigma}_c = [J_c]_{x_1 y_1 z_1} = \frac{M r^2}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} + \dot{\varphi} \end{pmatrix} = \frac{M r^2}{2} (\dot{\theta} + \dot{\varphi}) \vec{k} = \frac{M r}{2} (r+R) \dot{\theta} \quad \text{car } \dot{\varphi} = \frac{R}{r} \dot{\theta}$$

$$D'après l'équation (2) on obtient : T = -\frac{M}{2} (r+R) \ddot{\theta} \quad (3)$$

Appliquons maintenant le théorème du centre de masse :

$$\vec{N} + \vec{T} + \vec{P} = M \vec{\gamma}_C \quad (4)$$

$$\vec{v}_C = \frac{d\vec{V}_C}{dt} = \frac{d}{dt}((R+r)\dot{\theta}\vec{j}_1) = (R+r)\ddot{\theta}\vec{j}_1 + (R+r)\dot{\theta}\frac{d\vec{j}_1}{dt} = (R+r)\ddot{\theta}\vec{j}_1 - (R+r)\dot{\theta}^2\vec{i}_1$$

En projetant l'équation (4) dans le repère R_c , on obtient :

$$\begin{cases} T - Mg \cos \theta = M(R+r)\ddot{\theta} \\ N - Mg \sin \theta = -M(R+r)\dot{\theta}^2 \end{cases} \quad (5)$$

En remplaçant T par (3) on obtient :

$$\dot{\theta} + \frac{2g}{3(r+R)} \cos \theta = 0 \quad (6)$$

$$\ddot{\theta} + \frac{2g}{3(r+R)} \cos \theta = 0 \Rightarrow \dot{\theta} d\theta + \frac{2g}{3(r+R)} \cos \theta d\theta = 0 \Rightarrow \frac{\dot{\theta}^2}{2} + \frac{2g}{3(r+R)} \sin \theta = Cte$$

En utilisant les conditions initiales ($\theta(0) = \theta_0, \dot{\theta}(0) = 0$), on obtient $\frac{2g}{3(r+R)} \sin \theta_0 = Cte$

$$\frac{\dot{\theta}^2}{2} + \frac{2g}{3(r+R)} (\sin \theta - \sin \theta_0) = 0 \quad (7)$$

Calcul des réactions

D'après les éq (3) et (6) $T = \frac{1}{3} Mg \cos \theta$ (8)

D'après les éq (5) et (7) $N = \frac{1}{3} Mg (7 \sin \theta - 4 \sin \theta_0)$ (9)

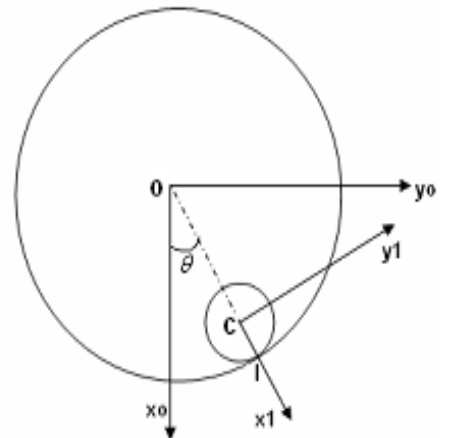
Le disque quitte l'anneau quand $N=0$, d'où $\sin \theta = \frac{4}{7} \sin \theta_0$ (10)

Exercice 3

θ est l'angle de rotation du disque autour de l'axe \vec{oz} $\vec{\omega}_{1/0} = \dot{\theta} \vec{k}$

φ est l'angle de rotation du disque autour de l'axe \vec{lz} .

La vitesse totale du disque est égale à : $\vec{\omega}_{2/0} = (\dot{\theta} + \dot{\varphi}) \vec{k}$



D'après le théorème de l'énergie cinétique :

$$\frac{dT}{dt} = P(\sum \vec{F}) \quad (1)$$

$$P(\sum \vec{F}) = \vec{p} \cdot \vec{V}_C + \vec{R} \cdot \vec{V}_I = \vec{p} \cdot \vec{V}_C \quad \text{car } \vec{V}_I = 0 \quad (\text{roulement sans glissement})$$

I est le point de contact appartenant au disque, \vec{R} est force de réaction en I.

$$O\vec{C} = (R-r)\vec{i}_1 \Rightarrow \vec{V}_C = (R-r) \frac{d\vec{i}_1}{dt} = (R-r)\dot{\theta} \vec{j}_1$$

$$P(\sum \vec{F}) = \vec{p} \cdot \vec{V}_C = Mg(R-r)\dot{\theta} \cos(\vec{p}, \vec{j}_1) = Mg(R-r)\dot{\theta} \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -Mg(R-r)\dot{\theta} \sin \theta$$

$$\vec{V}_I = \vec{V}_C + \vec{\omega}_{2/0} \wedge C\vec{I} = (R-r)\dot{\theta} \vec{j}_1 + (\dot{\theta} + \dot{\phi})\vec{k} \wedge r\vec{i}_1 = (R\dot{\theta} + r\dot{\phi})\vec{i}_1 = 0$$

$$\vec{V}_I = 0 \quad \Rightarrow \quad R\dot{\theta} + r\dot{\phi} = 0$$

L'énergie cinétique du disque est égale à :

$$T = \frac{1}{2} M V_C^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega}_{2/0} [J_C]_{x_1 y_1 z_1} \vec{\omega}_{2/0}$$

Le disque est en mouvement plan, d'où :

$$T = \frac{1}{2} M V_C^2 + \frac{1}{2} J_c \vec{\omega}_{2/0}^2 = \frac{M}{2} (R-r)^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \frac{M r^2}{2} (\dot{\theta} + \dot{\phi})^2 = \frac{3}{4} M (R-r)^2 \dot{\theta}^2 \quad (\text{car } \dot{\phi} = -\frac{R}{r} \dot{\theta})$$

$$\text{L'équation (1) donne: } \frac{3}{2} M (R-r)^2 \ddot{\theta} = -Mg(R-r) \sin \theta$$

$$\text{soit :} \quad \ddot{\theta} + \frac{2g}{3(R-r)} \sin \theta = 0$$

Pour des petites oscillations (θ très petite), on a $\sin \theta \approx \theta$

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \theta = 0 \quad \text{avec } \omega^2 = \frac{2g}{3(R-r)}$$

La période des petites oscillation est égale à :

$$\text{Période} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{2g}{3(R-r)}}} = 2\pi \sqrt{\frac{3(R-r)}{2g}}$$

Remarque : La seule force qui travaille est celle de la pesanteur (poids), on peut donc appliquer la loi de conservation de l'énergie totale. $T + E_p$ est constante.

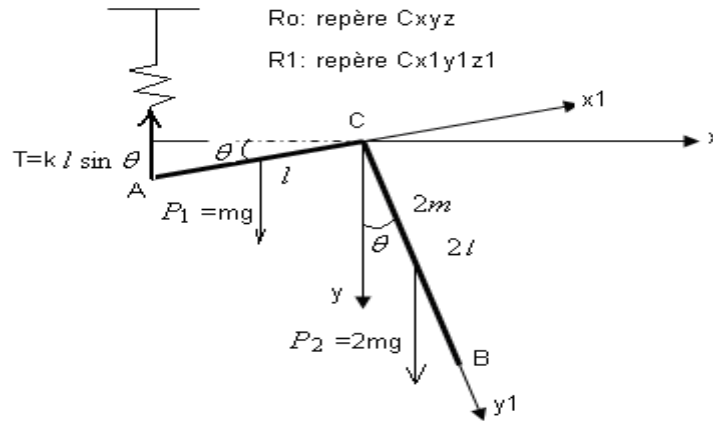
L'énergie potentielle $E_p = -Mg(R-r) \cos \theta$

$$T + E_p = \frac{3}{4} M (R-r)^2 \dot{\theta}^2 - Mg(R-r) \cos \theta = \text{Constante}$$

$$\frac{d(T + E_p)}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{3}{2} M (R-r)^2 \ddot{\theta} + Mg(R-r) \dot{\theta} \sin \theta = 0$$

$$\text{Soit :} \quad \ddot{\theta} + \frac{2g}{3(R-r)} \sin \theta = 0$$

Exercice 4



D'après le théorème du moment cinétique appliqué en c (c fixe) :

$$\sum \vec{M}_c = \frac{d\vec{\sigma}_c}{dt} \quad (1)$$

$$\vec{\sigma}_c = \vec{\sigma}(CA) + \vec{\sigma}(CB) = \frac{l^2}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}_{R1} + 2m \frac{(2l)^2}{3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}_{R1} = 3ml^2 \dot{\theta} \vec{k} \quad (2)$$

$$\sum \vec{M}_c = -Tl \cos \theta - P_2 l \sin \theta + P_1 \frac{l}{2} \cos \theta = -k l^2 \sin \theta \cos \theta - 2mgl \sin \theta + mg \frac{l}{2} \cos \theta$$

Pour des oscillations de faible amplitude on prend : $\sin \theta \approx \theta$ $\cos \theta = 1$

$$\sum \vec{M}_c = -\theta l (kl + 2mg) + mg \frac{l}{2} \quad (3)$$

D'après l'équation (1) on obtient :

$$\ddot{\theta} + \frac{(kl + 2mg)}{3ml} \theta = \frac{g}{6l} \quad (4)$$

d'où

$$\text{Période} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{(kl + 2mg)}{3ml}}} = 2\pi \sqrt{\frac{3ml}{(kl + 2mg)}} \quad (5)$$

Remarque : Les seules forces qui travaillent sont le poids et celle engendrée par le ressort, on peut donc appliquer la loi de conservation de l'énergie. L'énergie totale $T + E_p$ est constante.

Le système (2 tiges) est rotation autour de l'axe fixe Cz, L'énergie cinétique est égal à:

$$T = \frac{1}{2} J_C \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 \left(m \frac{l^2}{3} + 2m \frac{(2l)^2}{3} \right) = \frac{3}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 \quad J_C \text{ est le moment d'inertie autour de Cz.}$$

$$\text{L'énergie potentielle } E_p = \frac{1}{2} k (l \sin \theta)^2 - mg \frac{l}{2} \sin \theta - 2mgl \cos \theta$$

$$T + E_p = \frac{3}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} k (l \sin \theta)^2 - mg \frac{l}{2} \sin \theta - 2mgl \cos \theta$$

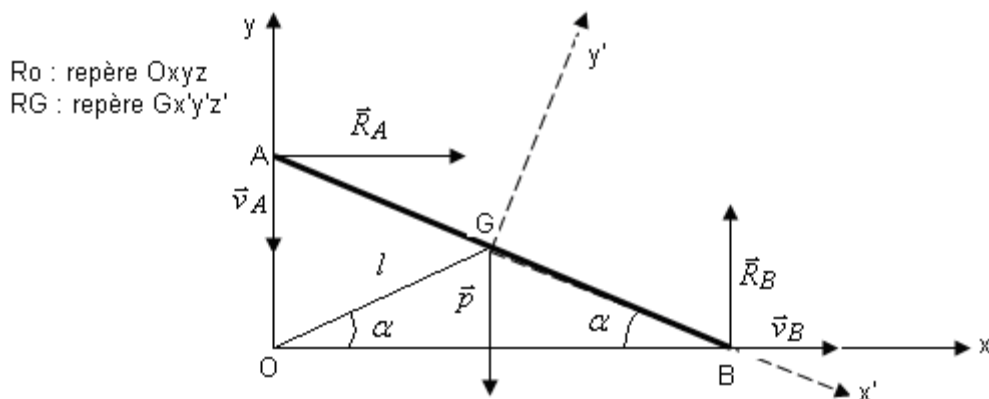
$$\frac{dt(T + E_p)}{dt} = 3m l^2 \dot{\theta} \ddot{\theta} + k l^2 \dot{\theta} \sin \theta \cos \theta - mg \frac{l}{2} \dot{\theta} \cos \theta + 2mgl \dot{\theta} \sin \theta$$

Pour des oscillations de faible amplitude on prend $\sin \theta \approx \theta$ $\cos \theta = 1$

$$\frac{dt(T + E_p)}{dt} = \dot{\theta} \left(3m l^2 \ddot{\theta} + (k l^2 + 2mgl) \theta - mg \frac{l}{2} \right)$$

$$\frac{dt(T + E_p)}{dt} = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{(kl + 2mg)}{3ml} \theta = \frac{g}{6l}$$

Exercice 5



D'après le théorème de l'énergie cinétique on a

$$\frac{dT}{dt} = P(\sum \vec{F}) \quad (1)$$

$$O\vec{G} = \begin{pmatrix} l \cos \alpha \\ l \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix}_{R_0} \quad \vec{V}_G = \begin{pmatrix} -l\dot{\alpha} \sin \alpha \\ l\dot{\alpha} \cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix}_{R_0} \quad \vec{\gamma}_G = \begin{pmatrix} -l\dot{\alpha}^2 \cos \alpha - l\ddot{\alpha} \sin \alpha \\ -l\dot{\alpha}^2 \sin \alpha + l\ddot{\alpha} \cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix}_{R_0}$$

Le solide est en mouvement plan, son énergie cinétique vaut :

$$T = \frac{1}{2} J_G \omega^2 + \frac{1}{2} M V_G^2$$

$$\vec{\omega} = \dot{\alpha} \vec{k} \quad J_G = \frac{M (2l)^2}{12} = \frac{M l^2}{3}$$

$$T = \frac{1}{2} M (l\dot{\alpha})^2 + \frac{1}{2} \frac{M l^2}{3} \dot{\alpha}^2 = \frac{2}{3} M l^2 \dot{\alpha}^2$$

$$P(\sum \vec{F}) = \vec{p} \cdot \vec{v}_G + \vec{R}_A \cdot \vec{v}_A + \vec{v}_B \cdot \vec{R}_B = \vec{p} \cdot \vec{v}_G = -Mgl \dot{\alpha} \cos \alpha$$

En absence du frottement, les réactions sont normales au plan de déplacement.

$$D'où \quad \vec{R}_A \cdot \vec{v}_A = \vec{v}_B \cdot \vec{R}_B = 0$$

D'après le théorème de l'énergie cinétique :

$$\frac{dT}{dt} = P(\sum \vec{F}) \quad \Rightarrow \quad \ddot{\alpha} + \frac{3g}{4l} \cos \alpha = 0$$

$$\text{Après intégration : } \frac{\dot{\alpha}^2}{2} + \frac{3g}{4l} \sin \alpha = Cte$$

Remarque : La seule force qui travaille est celle de la pesanteur (poids), on peut donc appliquer la loi de conservation de l'énergie. L'énergie totale $T + E_p$ est constante.

L'énergie potentielle $E_p = Mgl \sin \alpha$

$$T + E_p = \frac{2}{3} M l^2 \dot{\alpha}^2 + Mgl \sin \alpha = Cte \quad d'où \quad \frac{\dot{\alpha}^2}{2} + \frac{3g}{4l} \sin \alpha = Cte$$

Conditions initiales ($\alpha(0) = \alpha_0$ $\dot{\alpha}(0) = 0$), on obtient :

$$\frac{\dot{\alpha}^2}{2} + \frac{3g}{4l} (\sin \alpha - \sin \alpha_0) = 0$$

Réactions : (on applique le théorème du centre de masse)

$$\vec{P} + \vec{R}_A + \vec{R}_B = M \vec{\gamma}_G \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} R_A = M \gamma_x = M(-l\dot{\alpha}^2 \cos \alpha - l\ddot{\alpha} \sin \alpha) \\ R_B = Mg + M \gamma_y = Mg + M(-l\dot{\alpha}^2 \sin \alpha + l\ddot{\alpha} \cos \alpha) \end{cases}$$

Sachant que $\ddot{\alpha} = -\frac{3g}{4l} \cos \alpha$ et $\dot{\alpha}^2 = -\frac{3g}{2l} (\sin \alpha - \sin \alpha_0)$

$$R_A = \frac{3}{2} Mg \cos \alpha \left(\frac{3}{2} \sin \alpha - \sin \alpha_0 \right) \quad R_B = Mg + \frac{3}{4} Mg \sin \alpha (\sin \alpha - 2 \sin \alpha_0)$$

Le point A quitte la verticale quand $R_A = 0$: soit

$$\sin \alpha = \frac{2}{3} \sin \alpha_0$$

PRINCIPE DES TRAVAUX VIRTUELS

EQUATIONS DE LAGRANGE

Objectifs :

- Définir la notion du déplacement virtuel compatible avec une liaison et le travail virtuel associé
- Donner les différents types de liaison
- Enoncer le principe des travaux virtuels
- Etablir les équations de Lagrange.

I – Principe du travail virtuel

1. Déplacement virtuel

On appelle déplacement virtuel (fictif ou imaginaire) d'un système, tout déplacement infiniment petit des particules de ce système, compatible à l'instant t donné, avec les forces et les liaisons imposées à ce système

Soit \vec{r}_i le vecteur position de la particule i du système. Supposons \vec{r}_i fonction de n paramètres qui décrivent la position du système et éventuellement t .

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t)$$

Les paramètres q_i sont appelés coordonnées généralisées.

Le déplacement réel de la particule i pendant l'intervalle du temps dt s'écrit :

$$d\vec{r}_i = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_2} dq_2 + \dots + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_n} dq_n + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} dt$$

Le déplacement virtuel de la particule i pendant l'intervalle du temps dt s'écrit :

$$\delta \vec{r}_i = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_n} \delta q_n$$

Le temps n'intervient pas dans le déplacement virtuel car la transformation est une transformation géométrique à l'instant t.

2. Liaisons imposées au système

Nous avons classé les liaisons en deux catégories principales suivant la nature des équations qui s'y rapportent.

a) Liaisons holonomes

Supposons leur nombre égal à h, elles sont de la forme :

$$h \text{ relations } \begin{cases} f_1(q_1, \dots, q_j, \dots, q_h, t) = 0 \\ f_j(q_1, \dots, q_j, \dots, q_h, t) = 0 \\ f_h(q_1, \dots, q_j, \dots, q_h, t) = 0 \end{cases}$$

b) Liaisons non holonomes

Supposons leur nombre égal à l, elles sont de la forme :

$$l \text{ relations } \begin{cases} a_{11}\dot{q}_1 + \dots + a_{1i}\dot{q}_i + \dots + a_{1n}\dot{q}_n = b_1 \\ a_{j1}\dot{q}_1 + \dots + a_{ji}\dot{q}_i + \dots + a_{jn}\dot{q}_n = b_j \\ a_{l1}\dot{q}_1 + \dots + a_{li}\dot{q}_i + \dots + a_{ln}\dot{q}_n = b_l \end{cases}$$

Le degré de liberté formel est donc : $k=n-(h+l)$

Les liaisons peuvent dépendre ou non du temps.

Les liaisons holonomes peuvent se mettre sous la forme :

$$\frac{\partial f_j}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \dots + \frac{\partial f_j}{\partial q_i} \dot{q}_i + \dots + \frac{\partial f_j}{\partial q_n} \dot{q}_n + \frac{\partial f_j}{\partial t} = 0 \quad j=1 \dots h$$

Elles ont la même forme que les liaisons non holonomes :

$$a_{j1}\dot{q}_1 + \dots + a_{ji}\dot{q}_i + \dots + a_{jn}\dot{q}_n - b_j = 0 \quad j=1 \dots l$$

On appelle déplacement virtuel compatible, tout déplacement vérifiant les équations précédentes en faisant : $\frac{\partial f_j}{\partial t} = 0$ et $b_j = 0$, soit :

$$\frac{\partial f_j}{\partial q_1} \delta q_1 + \dots + \frac{\partial f_j}{\partial q_i} \delta q_i + \dots + \frac{\partial f_j}{\partial q_n} \delta q_n = 0 \quad j=1 \dots h$$

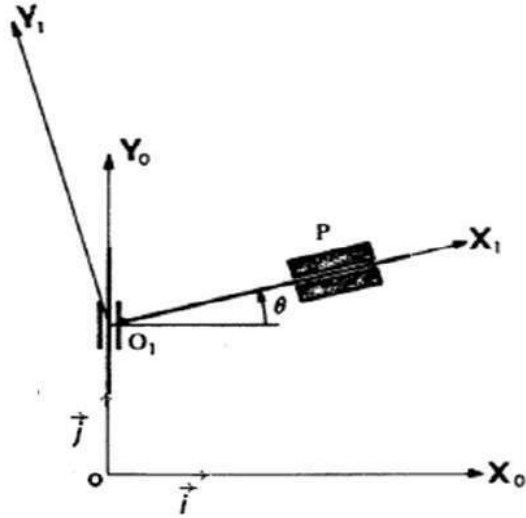
$$a_{j1}\delta q_1 + \dots + a_{ji}\delta q_i + \dots + a_{jn}\delta q_n = 0 \quad j=1 \dots l$$

Exemple : Un point matériel P peut se déplacer sur une droite (D) $= (O_1, \vec{X}_1)$ telle que $O_1 \in (D)$

se déplace sur (O, \vec{Y}_0) de manière que : $\overrightarrow{OO_1} = \frac{1}{2} \gamma t^2 \vec{j}$

Déterminons :

- a) L'équation et le type de la liaison
- b) Le vecteur position compatible avec la liaison
- c) Le déplacement réel compatible avec la liaison
- d) Le déplacement virtuel compatible avec la liaison



Solution :

$$O\vec{P} = x\vec{i} + y\vec{j} = O\vec{O}_1 + O_1\vec{P}$$

L'équation de la liaison s'écrit :

$$y = \frac{1}{2}\gamma t^2 + tg\theta \cdot x$$

qui se met sous la forme habituelle :

$$y - \frac{1}{2}\gamma t^2 + tg\theta \cdot x = 0 \text{ ou } f(x, y, \theta, t) = 0 \text{ c'est une liaison holonome.}$$

$$q_1 \equiv x \quad q_2 \equiv y \quad q_3 \equiv \theta$$

Le vecteur $\vec{r} = O\vec{P}$ compatible avec la liaison s'écrit :

$$\vec{r} = x\vec{i} + \left(\frac{1}{2}\gamma t^2 + tg\theta \cdot x\right)\vec{j} = \vec{r}(x, \theta, t)$$

Le déplacement réel compatible avec la liaison s'écrit :

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} dx + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} dt = (\vec{i} + tg\theta \vec{j})dx + (1 + tg\theta^2)\vec{j} d\theta + \gamma \vec{j} dt$$

Le déplacement virtuel compatible s'écrit :

$$\delta \vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \delta \theta = (\vec{i} + tg\theta \vec{j})\delta x + (1 + tg\theta^2)\vec{j} \delta \theta$$

3. Travail virtuel

Pour un déplacement virtuel $\delta \vec{r}_i$ de la particule i , le travail virtuel de la force \vec{F}_i appliquée à i s'écrit : $\delta W = \vec{F}_i \delta \vec{r}_i$

4. Principe du travail virtuel (PTV)

Soit (S) un système de N particules en mouvement dans un repère galiléen. La loi fondamentale pour une particule i de masse m_i appartenant au système (S) s'écrit :

$$\vec{F}_i = m_i \vec{\gamma}_i \quad \forall i = 1, 2, \dots, N$$

$$\vec{F}_i \delta \vec{r}_i = m_i \vec{\gamma}_i \delta \vec{r}_i \quad \forall i = 1, 2, \dots, N$$

d'où

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^N m_i \vec{\gamma}_i \delta \vec{r}_i$$

\vec{F}_i est la résultante de toutes les forces (intérieures et extérieures) qui s'exercent sur la particule i . $\vec{\gamma}_i$ étant l'accélération.

Enoncé : Le travail virtuels développé par toutes les actions mécaniques dans une transformation virtuelle est égal au travail virtuel développé par les quantités d'accélération

La force \vec{F}_i peut avoir deux origines :

$$\vec{F}_i = \vec{F}_{li} + \vec{F}_{di}$$

Où \vec{F}_{di} : force mécanique donnée

\vec{F}_{li} : force de liaison

Le travail virtuel des actions mécaniques s'écrit : $\delta W = \sum_{i=1}^N \vec{F}_{di} \delta \vec{r}_i + \sum_{i=1}^N \vec{F}_{li} \delta \vec{r}_i$

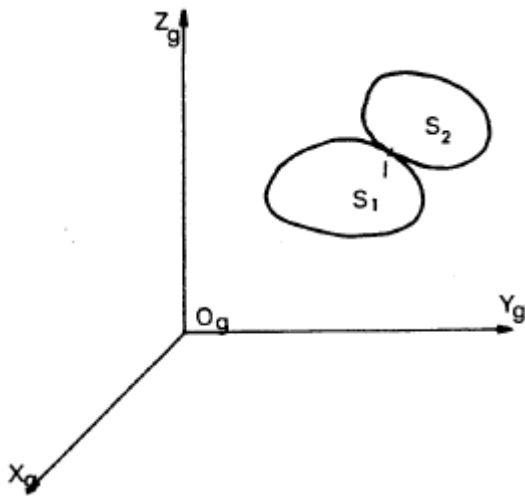
Cas des liaisons parfaites

Une liaison est dite parfaite si le travail virtuel développé par les actions de liaison est nul dans toute transformation virtuelle compatible avec les liaisons.

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_{li} \delta \vec{r}_i = 0$$

Le travail virtuel s'écrit dans ce cas: $\delta W = \sum_{i=1}^N \vec{F}_{di} \delta \vec{r}_i$

Exemple 1 : Liaison intérieure et mouvement de rotation



Le travail virtuel développé par les actions mécaniques de liaison est égal à :

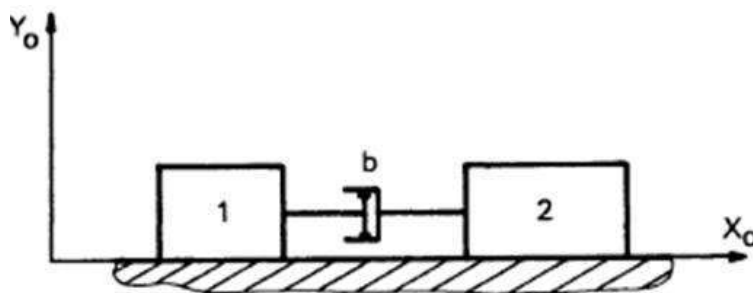
$$\delta W = \vec{F}_{12} \delta \vec{r}_2^1 = \vec{F}_{12} \vec{V}_2^1(I) \delta t$$

\vec{F}_{12} est l'action de 1 sur 2 ; $\vec{V}_2^1(I)$ est la vitesse relative de 2 par rapport à 1.

Si on respecte la liaison, la vitesse de glissement est située dans le plan tangent, et le travail virtuel (liaison parfaite) est nul dans deux cas :

- \vec{F}_{12} est normal au plan de contact (ce qui correspond à l'absence du frottement).
- $\vec{V}_2^1(I) = 0$ la transformation est un roulement sans glissement.

Exemple 2 : Liaison intérieure et mouvement de translation avec frottement visqueux



Par hypothèse l'action de 1 sur 2 est $\vec{F}_{12} = -b\vec{V}_2^1$ (mouvement de translation : tous les points ont la même vitesse). \vec{V}_2^1 est la vitesse relative de 2 par rapport à 1.

Le travail virtuel développé par les actions mécaniques de liaison est égal à :

$$\delta W = \vec{F}_{12} \delta \vec{r}_2^1 = -b\vec{V}_2^1 \delta \vec{r}_2^1 \neq 0 ; \delta \vec{r}_2^1 \text{ est le déplacement de 2 par rapport à 1.}$$

Cette liaison n'est pas parfaite.

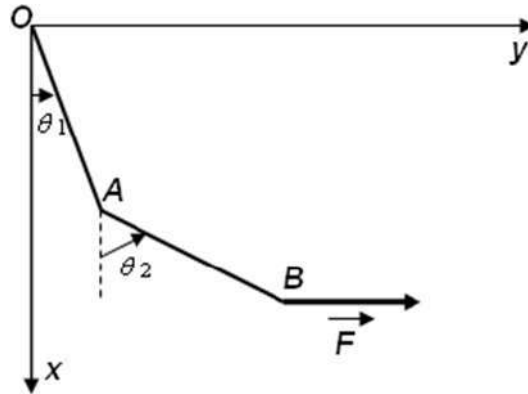
Cas d'un système en équilibre

Si le système est en équilibre ($\vec{\gamma}_i = 0$), on obtient :

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \delta \vec{r}_i = 0$$

Enoncé : Le travail virtuel développé par toutes les actions mécaniques dans une transformation virtuelle quelconque est nul, pour un système en équilibre

Exemple d'un bi-pendule : OA et OB deux barres homogènes identiques de masse m et de longueur 2l parfaitement articulées en O et A. On exerce une force horizontale \vec{F} connue. Etablir la position d'équilibre (calculer θ_1 et θ_2).



Comme les liaisons sont parfaites en O et A, le travail virtuel des forces de liaison est nul. Le travail virtuel des actions mécaniques données est égal à :

$$\delta W = m\vec{g} \delta O\vec{G}_1 + m\vec{g} \delta O\vec{G}_2 + \vec{F} \delta O\vec{B} = mg(\delta Y_{G1} + \delta Y_{G2}) + F \delta X_B = 0$$

G_1 est le centre de gravité de la barre OA, il est situé au milieu de OA.

$$Y_{G1} = l \cos \theta_1 \Rightarrow \delta Y_{G1} = -l \sin \theta_1 \delta \theta_1$$

G_2 est le centre de gravité de la barre AB, il est situé au milieu de AB.

$$Y_{G2} = 2l \cos \theta_1 + l \cos \theta_2 \Rightarrow \delta Y_{G2} = -2l \sin \theta_1 \delta \theta_1 - l \sin \theta_2 \delta \theta_2$$

$$X_B = 2l(\sin \theta_1 + \sin \theta_2) \Rightarrow \delta X_B = 2l(\cos \theta_1 \delta \theta_1 + \cos \theta_2 \delta \theta_2)$$

$$-mgl \sin \theta_1 \delta \theta_1 - mgl(2 \sin \theta_1 \delta \theta_1 + \sin \theta_2 \delta \theta_2) + 2Fl(\cos \theta_1 \delta \theta_1 + \cos \theta_2 \delta \theta_2) = 0 \quad \forall \theta_1, \theta_2$$

$$(-3mgl \sin \theta_1 + 2Fl \cos \theta_1) \delta \theta_1 + (-mgl \sin \theta_2 + 2Fl \cos \theta_2) \delta \theta_2 = 0 \quad \forall \theta_1, \theta_2$$

$$\text{D'où } \begin{cases} -3mgl \sin \theta_1 + 2Fl \cos \theta_1 = 0 \\ -mgl \sin \theta_2 + 2Fl \cos \theta_2 = 0 \end{cases} \quad \text{soit : } \begin{cases} \operatorname{tg} \theta_1 = \frac{2F}{3mg} \\ \operatorname{tg} \theta_2 = \frac{2F}{mg} \end{cases}$$

II – Equations de Lagrange

Les équations que nous allons obtenir ne sont pas de nouvelles équations, elles sont déduites de la loi fondamentale. Le but poursuivi par Lagrange est clairement formulé dans sa préface à la première édition : « *On a déjà plusieurs Traités de Mécanique, mais le plan de celui-ci est entièrement neuf. Je me suis proposé de réduire la théorie de cette science et l'art de résoudre les problèmes qui s'y rapportent, à des formules générales dont le simple développement donne toutes les équations nécessaires pour la solution de chaque problème. J'espère que la manière dont j'ai taché de remplir cet objectif ne laissera rien à désirer* ».

Soit un système de N particules. Soit \vec{r}_i le vecteur position de la particule i du système.

Supposons \vec{r}_i fonction de n paramètres qui décrivent la position du système et éventuellement t.

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t)$$

Le déplacement réel de la particule i pendant l'intervalle du temps dt s'écrit :

$$d\vec{r}_i = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_2} dq_2 + \dots + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_n} dq_n + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} dt$$

La vitesse de la particule i est égale à :

$$\vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_1} \frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_2} \frac{dq_2}{dt} + \dots + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_n} \frac{dq_n}{dt} + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j$$

Le déplacement virtuel de la particule i pendant l'intervalle du temps dt s'écrit :

$$\delta \vec{r}_i = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_n} \delta q_n = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j$$

Le travail virtuel développé par les actions mécaniques est égal à :

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{j=1}^n Q_j \delta q_j$$

$$Q_j = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \quad Q_j \text{ est appelé force généralisée.}$$

Le travail virtuel développé par les quantités d'accélération est égal à :

$$\sum_{i=1}^N m_i \vec{\gamma}_i \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^N m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^N m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j$$

$$m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left(m_i \vec{v}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) - m_i \vec{v}_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right)$$

$$\text{or } \vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j ; \text{ d'où } \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j}$$

$$\frac{d}{dt} \left(m_i \vec{v}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) = \frac{d}{dt} \left(m_i \vec{v}_i \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) \right)$$

$$m_i \vec{v}_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) = m_i \vec{v}_i \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{d\vec{r}_i}{dt} \right) = m_i \vec{v}_i \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{1}{2} m_i v_i^2 \right)$$

$$\sum_{i=1}^N m_i \vec{\gamma}_i \delta \vec{r}_i = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^N \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) \right) - \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) \right] \delta q_j$$

$$\sum_{i=1}^N m_i \vec{\gamma}_i \delta \vec{r}_i = \sum_{j=1}^n \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) - \frac{\partial}{\partial q_j} \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) \right] \delta q_j$$

$$\sum_{i=1}^N m_i \vec{\gamma}_i \delta \vec{r}_i = \sum_{j=1}^n \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right] \delta q_j$$

Le principe des travaux virtuels s'écrit :

$$\boxed{\sum_{j=1}^n \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right] \delta q_j = \sum_{j=1}^n Q_j \delta q_j}$$

1. Equations de Lagrange pour un système à paramètres indépendants

Si les paramètres q_j ($j=1, \dots, n$) sont indépendants, on obtient :

$$\boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j}$$

Si les forces \vec{F}_i dérivent d'un potentiel V (forces de pesanteur ou forces engendrées par les

ressorts) : $\vec{F}_i = -\text{grad } V$, $Q_j = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j}$

Sachant $\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} = 0$ on obtient :

$$\boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j}$$

$L = T - V$ est appelé le Lagrangien du système.

2. Les paramètres ne sont pas indépendants mais liés par des relations de liaison holonomes et non holonomes.

Les relations de liaison peuvent se mettre sous la forme générale :

$$\begin{cases} f_j(q_1, \dots, q_i, \dots, q_n, t) = 0 & j = 1 \dots h \\ a_{j1}\dot{q}_1 + \dots + a_{ji}\dot{q}_i + \dots + a_{jn}\dot{q}_n = b_j & j = 1 \dots l \end{cases}$$

Remarquons tout d'abord que si nous avons des liaisons de type holonome, nous pourrions nous ramener immédiatement à l'étude que nous venons de faire.

Supposons en effet que les seules liaisons existantes soient du type :

$$f_j(q_1, \dots, q_i, \dots, q_n, t) = 0 \quad j = 1 \dots h$$

On peut toujours tirer h paramètres en fonction des $n-h$ autres, et alors se ramener à $n-h$ paramètres indépendantes. Donc du point de vue de la théorie, il n'y a pas de difficulté nouvelle. Si l'on garde ces liaisons dans certains cas, c'est uniquement pour une raison de commodité.

Par contre, il en va tout autrement pour des liaisons de type non holonome :

$$a_{j1}\dot{q}_1 + \dots + a_{ji}\dot{q}_i + \dots + a_{jn}\dot{q}_n = b_j \quad j = 1 \dots l$$

car par hypothèse, elles ne sont pas intégrables et par suite nous ne pouvons pas exprimer certains paramètres en fonction des autres grâce à ses relations.

Si nous conservons les liaisons non holonomes, c'est pour une question de principe et si nous conservons les liaisons holonomes c'est pour une question de commodité.

On a déjà vu que ces liaisons peuvent s'écrire sous la forme :

$$\frac{\partial f_j}{\partial q_1} \delta q_1 + \dots + \frac{\partial f_j}{\partial q_i} \delta q_i + \dots + \frac{\partial f_j}{\partial q_n} \delta q_n = 0 \quad j=1 \dots h$$

$$a_{j1}\delta q_1 + \dots + a_{ji}\delta q_i + \dots + a_{jn}\delta q_n = 0 \quad j=1 \dots l$$

Remarque : ce système peut se mettre sous la forme unique :

$$a_{j1}\delta q_1 + \dots + a_{ji}\delta q_i + \dots + a_{jn}\delta q_n = 0 \quad j=1 \dots m, m=l+h$$

Du point de vue mathématique ce sont des équations linéaires en δq_i .

$$\sum_{i=1}^n a_{ji} \delta q_i = 0 \quad j=1,2,\dots,m \quad \text{ou en permutant les indices } i \text{ et } j \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} \delta q_j = 0 \quad i=1,2,\dots,m$$

En introduisant les multiplicateurs de Lagrange λ_i , le PTV s'écrit :

$$\sum_{j=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right) \delta q_j = \sum_{j=1}^n Q_j \delta q_j + \sum_{i=1}^m \lambda_i \sum_{j=1}^n a_{ij} \delta q_j$$

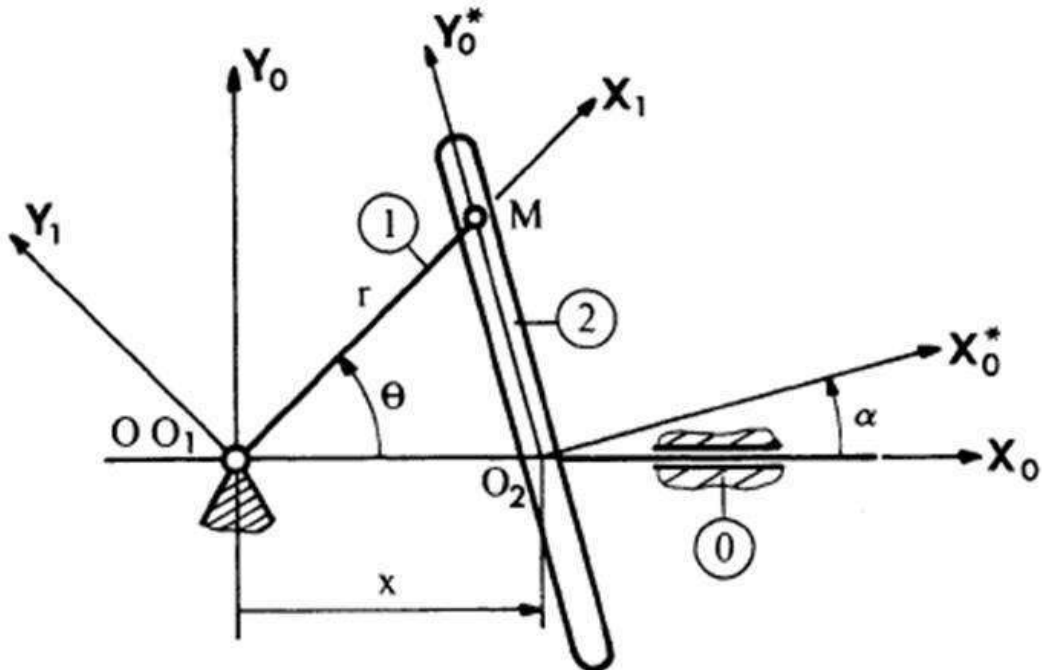
$$\sum_{j=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right) \delta q_j = \sum_{j=1}^n Q_j \delta q_j + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \lambda_i a_{ij} \delta q_j$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j + \sum_{i=1}^m \lambda_i a_{ij}$$

Si les forces \vec{F}_i dérivent d'un potentiel V , l'équation précédente s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^m \lambda_i a_{ij}$$

Exemple : système holonome



- On applique à la manivelle (1) un torseur en O : $\{T_1\}_O = \begin{Bmatrix} \vec{F}_1 = \vec{0} \\ \vec{M}_1 = C\vec{Z}_0 \end{Bmatrix}_O$

- On applique à coulisse (2) un torseur en O_2 : $\{T_2\}_{O_2} = \begin{Bmatrix} \vec{F}_2 = F_2 \vec{X}_0 \\ \vec{M}_2 = 0 \end{Bmatrix}_{O_2}$

Trouver l'équation du mouvement sachant que les liaisons sont parfaites.

a) Equation de liaison

Pour repérer le mouvement, on emploie les paramètres x et θ , mais ils ne sont pas indépendants, ils sont liés par la relation :

$$x - r \frac{\cos(\theta - \alpha)}{\cos \alpha} = 0$$

La liaison est du type holonome.

b) Equation du mouvement en se ramenant à un paramètre

Energie cinétique

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2} J_1 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} M \dot{x}^2$$

J_1 désigne le moment d'inertie de (S_1) par rapport à l'axe (O, \vec{z}_0) et M la masse de (S_2) .

D'après l'équation de la liaison : $\dot{x} = -r \frac{\sin(\theta - \alpha)}{\cos \alpha} \dot{\theta}$; d'où :

$$T = \frac{1}{2} \left(J_1 + M \left(r \frac{\sin(\theta - \alpha)}{\cos \alpha} \right)^2 \right) \dot{\theta}^2$$

Les liaisons sont parfaites, le travail virtuel des seules actions données :

$$\delta W = M_1 \delta \theta + F_2 \delta x$$

$$\delta x = -r \frac{\sin(\theta - \alpha)}{\cos \alpha} \delta \theta$$

$$\delta W = \left(M_1 - F_2 r \frac{\sin(\theta - \alpha)}{\cos \alpha} \right) \delta \theta$$

Cette relation est de la forme $\delta W = Q_\theta \delta \theta$

Equations de Lagrange

Il y a un paramètre indépendant : θ

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial T}{\partial \theta} = Q_\theta$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = \left(J_1 + M \left(r \frac{\sin(\theta - \alpha)}{\cos \alpha} \right)^2 \right) \dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = \left(J_1 + M \left(r \frac{\sin(\theta - \alpha)}{\cos \alpha} \right)^2 \right) \ddot{\theta} + 2Mr^2 \frac{\sin(\theta - \alpha) \cos(\theta - \alpha)}{\cos^2 \alpha} \dot{\theta}^2$$

d'où l'équation :

$$\left(J_1 + M \left(r \frac{\sin(\theta - \alpha)}{\cos \alpha} \right)^2 \right) \ddot{\theta} + Mr^2 \frac{\sin(\theta - \alpha) \cos(\theta - \alpha)}{\cos^2 \alpha} \dot{\theta}^2 = M_1 - F_2 r \frac{\sin(\theta - \alpha)}{\cos \alpha}$$

c) Equation de Lagrange en conservant deux paramètres

D'après l'équation de liaison :

$$\delta x + r \frac{\sin(\theta - \alpha)}{\cos \alpha} \delta \theta = 0$$

Le travail virtuel s'écrit :

$$\delta W = M_1 \delta \theta + F_2 \delta x$$

L'énergie cinétique est :

$$T = \frac{1}{2} J_1 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} M \dot{x}^2$$

On peut donc écrire les équations de Lagrange en employant la méthode des multiplicateurs :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial T}{\partial \theta} = M_1 + \lambda r \frac{\sin(\theta - \alpha)}{\cos \alpha}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} = F_2 + \lambda$$

$$\begin{cases} J_1 \ddot{\theta} = M_1 + \lambda r \frac{\sin(\theta - \alpha)}{\cos \alpha} & (1) \\ M \ddot{x} = F_2 + \lambda & (2) \end{cases}$$

De l'équation de liaison, nous tirons :

$$\dot{x} = -r \frac{\sin(\theta - \alpha)}{\cos \alpha} \dot{\theta}$$

$$\ddot{x} = -r \frac{\sin(\theta - \alpha)}{\cos \alpha} \ddot{\theta} - r \frac{\cos(\theta - \alpha)}{\cos \alpha} \dot{\theta}^2$$

d'où de (2) on tire :

$$\lambda = -Mr \frac{\sin(\theta - \alpha)}{\cos \alpha} \ddot{\theta} - Mr \frac{\cos(\theta - \alpha)}{\cos \alpha} \dot{\theta}^2 + F_2$$

en portant en (1) :

$$J_1 \ddot{\theta} = M_1 - Mr^2 \frac{\sin^2(\theta - \alpha)}{\cos^2 \alpha} \ddot{\theta} - Mr^2 \frac{\cos \alpha \cos(\theta - \alpha)}{\cos^2 \alpha} \dot{\theta}^2 - F_2 r \frac{\sin(\theta - \alpha)}{\cos \alpha}$$

Soit :

$$\left(J_1 + M \left(r \frac{\sin(\theta - \alpha)}{\cos \alpha} \right)^2 \right) \ddot{\theta} + Mr^2 \frac{\sin(\theta - \alpha) \cos(\theta - \alpha)}{\cos^2 \alpha} \dot{\theta}^2 = M_1 - F_2 r \frac{\sin(\theta - \alpha)}{\cos \alpha}$$

C'est bien l'équation déjà trouvée.

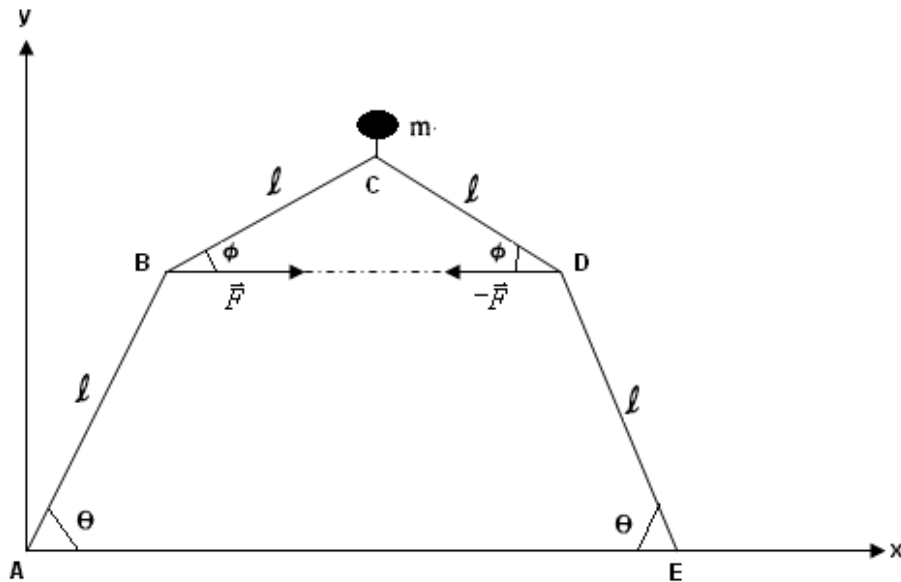
TD N° 7

PRINCIPE DU TRAVAIL VRTUEL

Exercice 1

Soit le système (S), on exerce en B et D une force \vec{F} selon l'axe horizontal, en C est appliqué le poids \vec{P} de la masse m. Les barres sont de masse négligeables et toutes les liaisons sont parfaites.

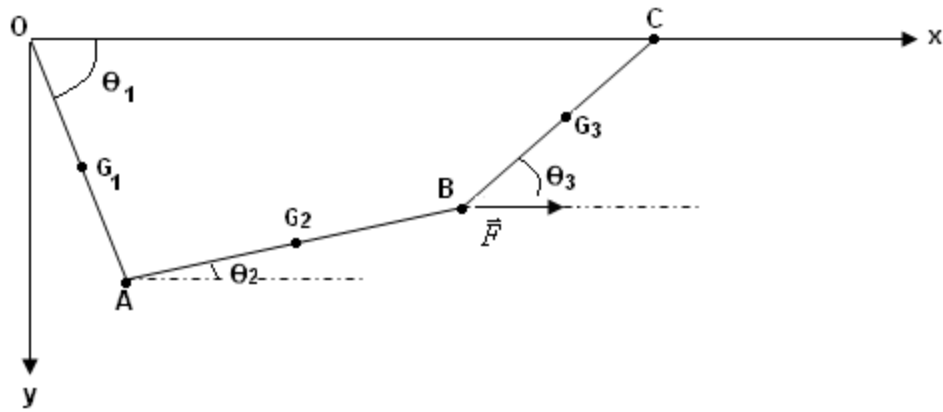
Trouver la relation entre F et P lorsque le système est en équilibre sachant que θ , ϕ , et AE sont constantes (E point fixe).



Exercice 2

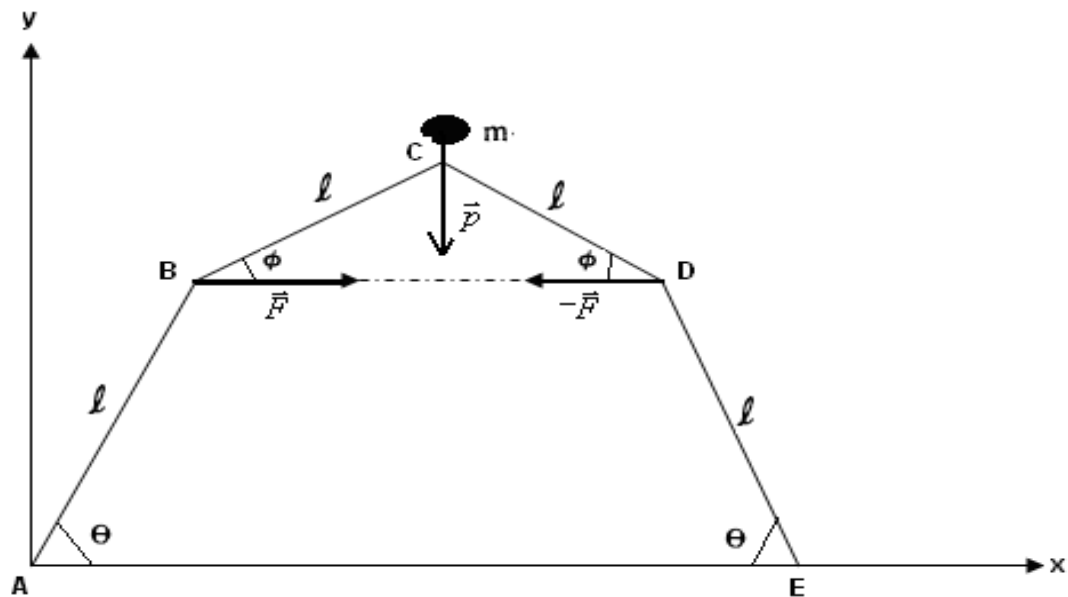
OA, AB et BC sont des barres homogènes identiques de masse m et de longueur 2l, mobiles dans un plan vertical et parfaitement articulées entre elles. O est un point fixe. Le point C est astreint à rester sur l'axe ox, il n'y a pas de frottements en O et C. En B, est appliquée une force \vec{F} .

Trouver la position d'équilibre du système.



SOLUTION DU TD N°7

Exercice 1



Le système est en équilibre, donc d'après le principe du travail virtuel, on a :

$$\sum \vec{F}_i \delta \vec{r}_i = 0$$

Puisque les liaisons sont parfaites, les seules forces qui travaillent sont \vec{F} et \vec{p} :

$$\vec{F} \delta \vec{r}_B - \vec{F} \delta \vec{r}_D + \vec{p} \delta \vec{r}_C = F \delta x_B - F \delta x_D - mg \delta y_C = 0$$

$$\begin{cases} x_B = l \cos \theta \\ x_D = l \cos \theta + 2l \cos \phi \\ y_C = l \sin \theta + l \sin \phi \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} \delta x_B = -l \sin \theta \delta \theta \\ \delta x_D = -l \sin \theta \delta \theta - 2l \sin \phi \delta \phi \\ \delta y_C = l \cos \theta \delta \theta + l \cos \phi \delta \phi \end{cases}$$

$$-Fl \sin \theta \delta \theta + F(l \sin \theta \delta \theta + 2l \sin \phi \delta \phi) - mg(l \cos \theta \delta \theta + l \cos \phi \delta \phi) = 0$$

$$(2Fl \sin \phi - mgl \cos \phi) \delta \phi - mgl \cos \theta \delta \theta = 0$$

$$F \delta \phi = \frac{mg}{2} \left(\frac{\cos \phi}{\sin \phi} \delta \phi + \frac{\cos \theta}{\sin \phi} \delta \theta \right)$$

θ et ϕ ne sont pas indépendants.

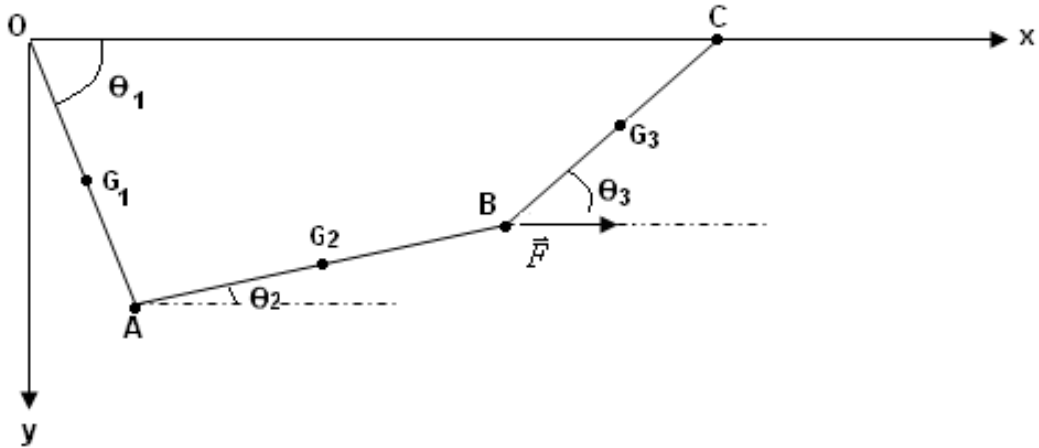
En effet : $AE = 2l \cos \theta + 2l \cos \phi = Cte$ d'où $\delta AE = -2l(\sin \theta \delta \theta + \sin \phi \delta \phi) = 0$

$\delta \theta = -\frac{\sin \phi}{\sin \theta} \delta \phi$, en injectant cette expression dans la relation de la force, on obtient :

$$F \delta \phi = \frac{mg}{2} \left(\frac{1}{\tan \phi} - \frac{1}{\tan \theta} \right) \delta \phi$$

$$F = \frac{mg}{2} \left(\frac{1}{\tan \phi} - \frac{1}{\tan \theta} \right)$$

Exercice 2



Le système est en équilibre, donc d'après le principe du travail virtuel, on a :

$$\sum \vec{F}_i \delta \vec{r}_i = 0$$

Les seules forces qui travaillent sont les poids des barres appliqués en leurs centres de gravité, et la force \vec{F} .

$$\vec{p}_1 \delta OG_1 + \vec{p}_2 \delta OG_2 + \vec{p}_3 \delta OG_3 + \vec{F} \delta OB = p \delta y_{G1} + p \delta y_{G2} + p \delta y_{G3} + F \delta x_B = 0 \quad (1)$$

$$\begin{cases} y_{G1} = l \sin \theta_1 \\ y_{G2} = 2l \sin \theta_1 - l \sin \theta_2 \\ y_{G3} = 2l \sin \theta_1 - 2l \sin \theta_2 - l \sin \theta_3 \\ x_B = 2l \cos \theta_1 + 2l \cos \theta_2 \end{cases}$$

$$y_C = 2l(\sin \theta_1 - \sin \theta_2 - \sin \theta_3) = 0 \quad \text{d'où} \quad \sin \theta_3 = \sin \theta_1 - \sin \theta_2 \Rightarrow y_{G3} = l \sin \theta_1 - l \sin \theta_2$$

$$\begin{cases} \delta y_{G1} = l \cos \theta_1 \delta \theta_1 \\ \delta y_{G2} = 2l \cos \theta_1 \delta \theta_1 - l \cos \theta_2 \delta \theta_2 \\ \delta y_{G3} = l \cos \theta_1 \delta \theta_1 - l \cos \theta_2 \delta \theta_2 \\ \delta x_B = -2l(\sin \theta_1 \delta \theta_1 + \sin \theta_2 \delta \theta_2) \end{cases}$$

En injectant ces expressions dans l'équation (1), on obtient :

$$4pl \cos \theta_1 \delta \theta_1 - 2pl \cos \theta_2 \delta \theta_2 - 2Fl(\sin \theta_1 \delta \theta_1 + \sin \theta_2 \delta \theta_2) = 0$$

$$(2p \cos \theta_1 - F \sin \theta_1) \delta \theta_1 - (p \cos \theta_2 + F \sin \theta_2) \delta \theta_2 = 0 \quad \forall \delta \theta_1, \delta \theta_2$$

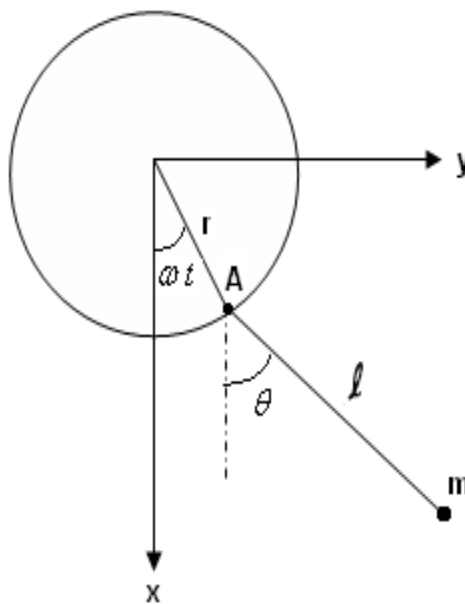
$$\text{d'où} \quad \begin{cases} 2p \cos \theta_1 - F \sin \theta_1 = 0 \\ p \cos \theta_2 + F \sin \theta_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} \theta_1 = \frac{2mg}{F} \\ \operatorname{tg} \theta_2 = \frac{-mg}{F} \end{cases}$$

TD N°8

EQUATIONS DE LAGRANGE

Exercice 1

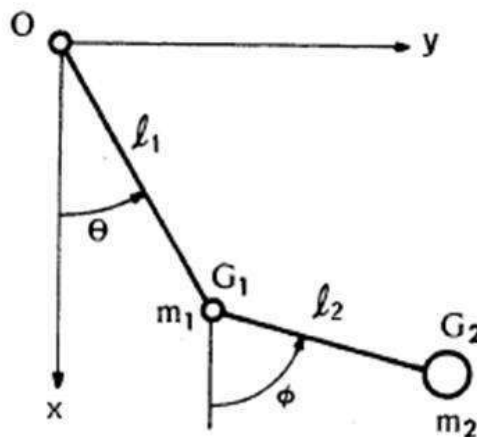
Dans un plan vertical oxy , on considère un pendule simple de masse m et de longueur l dont le point de suspension A se déplace à vitesse angulaire constante ω , sur un cercle de rayon r . Calculer le lagrangien du système et en déduire l'équation du mouvement.



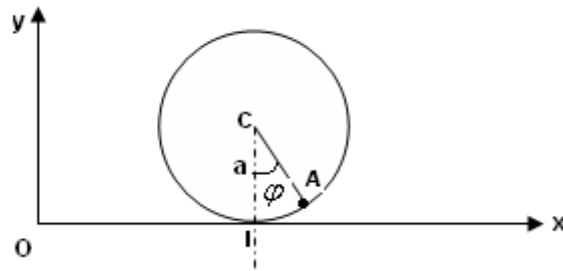
Exercice 2

En G_1 et G_2 sont disposées deux masses ponctuelles m_1 et m_2 . La masse des barres est négligeable et les liaisons sont parfaites.

Déterminer les équations du mouvement.



Exercice 3



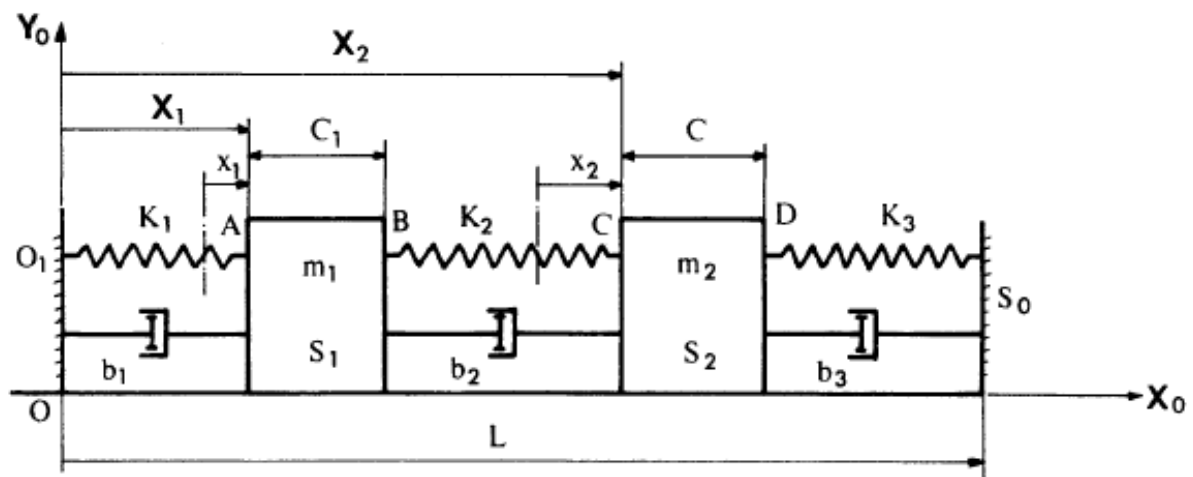
Une bille A, assimilée à un point matériel de masse m , peut se déplacer librement sans frottement sur un cerceau (C) (masse m , rayon a et centre C) grâce à une liaison bilatérale parfaite. Le cerceau est astreint à se déplacer dans un plan vertical fixe en roulant sans glisser sur l'axe Ox , $\varphi = (Ox, CA)$, θ est l'angle de rotation propre du cerceau.

- Ecrire les équations du mouvement à partir des équations de Lagrange.
- Calculer la période des petites oscillations.

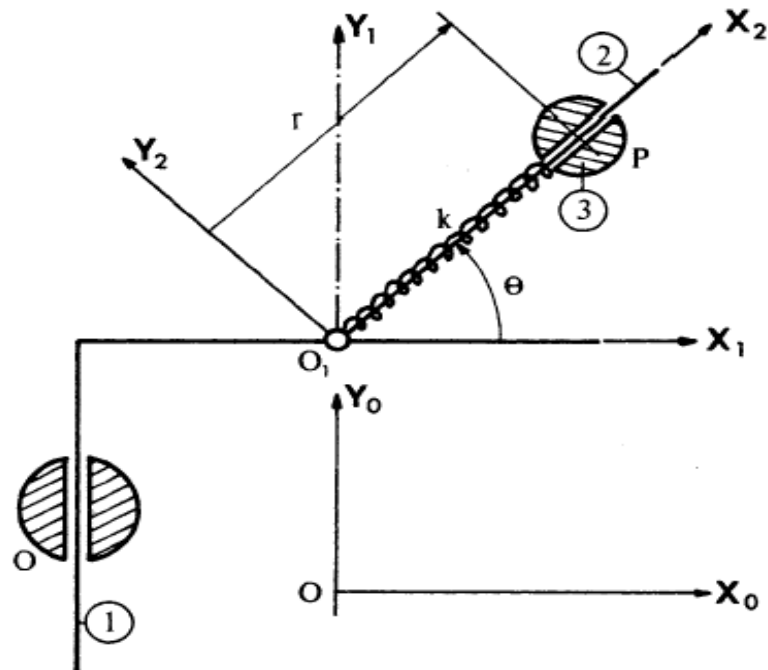
Exercice 4

Les raideurs des ressorts sont k_1, k_2, k_3 . Les liaisons sont dissipatives (non- parfaites). Les coefficients d'amortissement sont b_1, b_2, b_3 .

Trouver les équations de mouvement.



Exercice 5



Toutes les liaisons sont parfaites. La raideur du ressort est k et sa longueur à vide est r_0 . La masse de (3) est m . Le mouvement de O_1 est tel que $O\vec{O}_1 = \frac{1}{2}\gamma t^2 \vec{Y}_0$.

- 1- Calculer les énergies cinétique et potentielle du système.
- 2- Etablir les équations du mouvement en utilisant les équations de Lagrange.

SOLUTION DU TD N°8

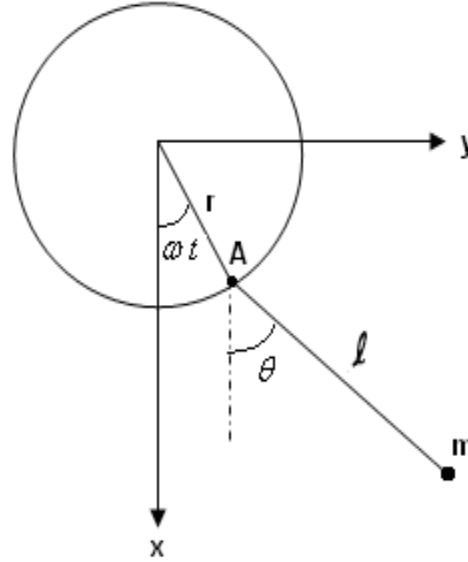
Exercice 1

La masse m a pour coordonnées :

$$\begin{cases} x = r \cos \omega t + l \cos \theta \\ y = r \sin \omega t + l \sin \theta \end{cases}$$

Sa vitesse est égale à :

$$\begin{cases} \dot{x} = -r\omega \sin \omega t - l\dot{\theta} \sin \theta \\ \dot{y} = r\omega \cos \omega t + l\dot{\theta} \cos \theta \end{cases}$$



son énergie cinétique est égale à :

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{m}{2} (\omega^2 r^2 + l^2 \dot{\theta}^2 + 2l\omega r \dot{\theta} (\cos \omega t \cos \theta + \sin \omega t \sin \theta))$$

$$T = \frac{m}{2} (\omega^2 r^2 + l^2 \dot{\theta}^2 + 2l\omega r \dot{\theta} \cos(\omega t - \theta))$$

Son énergie potentielle est :

$$U = -mgx = -mg(r \cos \omega t + l \cos \theta)$$

On en déduit le lagrangien :

$$L = T - U = \frac{m}{2} (\omega^2 r^2 + l^2 \dot{\theta}^2 + 2l\omega r \dot{\theta} \cos(\omega t - \theta)) + mg(r \cos \omega t + l \cos \theta)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m(l^2 \dot{\theta} + l\omega r \cos(\omega t - \theta))$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m(l^2 \ddot{\theta} - l\omega r \sin(\omega t - \theta))$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{m}{2} (2l\omega r \dot{\theta} \sin(\omega t - \theta)) - mgl \sin \theta = mlr\omega \dot{\theta} \sin(\omega t - \theta) - mgl \sin \theta$$

L'équation du mouvement donnée par Lagrange est :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = m(l^2 \ddot{\theta} - l\omega r \sin(\omega t - \theta)) - mlr\omega \dot{\theta} \sin(\omega t - \theta) + mgl \sin \theta = 0$$

Soit :

$$l^2 \ddot{\theta} - l\omega^2 r \sin(\omega t - \theta) + gl \sin \theta = 0$$

Exercice 2

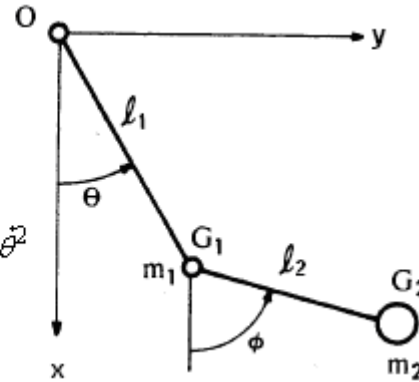
La masse m_1 a pour coordonnées :

$$\begin{cases} x_1 = l_1 \cos \theta \\ y_1 = l_1 \sin \theta \end{cases} \quad \text{et sa vitesse} \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = -l_1 \dot{\theta} \sin \theta \\ \dot{y}_1 = l_1 \dot{\theta} \cos \theta \end{cases}$$

Son énergie cinétique: $T_1 = \frac{m_1}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) = \frac{m_1}{2} l_1^2 \dot{\theta}^2$

Son énergie potentielle:

$$U_1 = -m_1 g x_1 = -m_1 g l_1 \cos \theta$$



La masse m_2 a pour coordonnées :

$$\begin{cases} x_2 = l_1 \cos \theta + l_2 \cos \phi \\ y_2 = l_1 \sin \theta + l_2 \sin \phi \end{cases} \quad \text{et sa vitesse} \quad \begin{cases} \dot{x}_2 = -l_1 \dot{\theta} \sin \theta - l_2 \dot{\phi} \sin \phi \\ \dot{y}_2 = l_1 \dot{\theta} \cos \theta + l_2 \dot{\phi} \cos \phi \end{cases}$$

Son énergie cinétique: $T_2 = \frac{m_2}{2} (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) = \frac{m_2}{2} l_1^2 \dot{\theta}^2 + \frac{m_2}{2} l_2^2 \dot{\phi}^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta} \dot{\phi} \cos(\theta - \phi)$

Son énergie potentielle: $U_2 = -m_2 g x_2 = -m_2 g (l_1 \cos \theta + l_2 \cos \phi)$

Pour le système (les 2 masses) on a :

$$T = T_1 + T_2 = \frac{(m_1 + m_2)}{2} l_1^2 \dot{\theta}^2 + \frac{m_2}{2} l_2^2 \dot{\phi}^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta} \dot{\phi} \cos(\theta - \phi)$$

$$U = U_1 + U_2 = -(m_1 + m_2) g l_1 \cos \theta - m_2 g l_2 \cos \phi$$

Le Lagrangien du système est :

$$L = T - U = \frac{(m_1 + m_2)}{2} l_1^2 \dot{\theta}^2 + \frac{m_2}{2} l_2^2 \dot{\phi}^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta} \dot{\phi} \cos(\theta - \phi) + (m_1 + m_2) g l_1 \cos \theta + m_2 g l_2 \cos \phi$$

Pour les faibles oscillations (θ et ϕ sont très petites) :

$$\cos \phi \approx 1 - \frac{\phi^2}{2} \quad \text{et} \quad \cos(\theta - \phi) \approx 1 - \frac{(\theta - \phi)^2}{2}$$

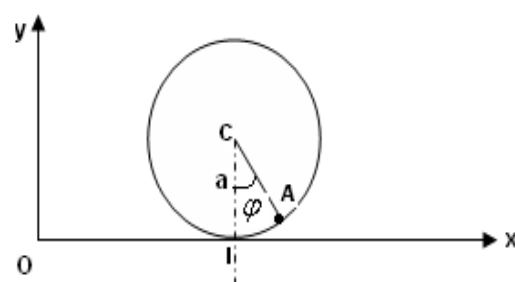
En négligeant les termes d'ordre 4, on obtient :

$$L = \frac{(m_1 + m_2)}{2} l_1^2 \dot{\theta}^2 + \frac{m_2}{2} l_2^2 \dot{\phi}^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta} \dot{\phi} - (m_1 + m_2) g l_1 \frac{\theta^2}{2} - m_2 g l_2 \frac{\phi^2}{2} + (m_1 + m_2) g l_1 + m_2 g l_2$$

Les équations du mouvement :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} - \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0 \end{cases} \quad \text{Soit} \quad \begin{cases} (m_1 + m_2) l_1 \ddot{\theta} + m_2 l_2 \ddot{\phi} + (m_1 + m_2) g \theta = 0 \\ l_2 \ddot{\phi} + l_1 \ddot{\theta} + g \phi = 0 \end{cases}$$

Exercice 3



Pour la bille A on a : (on pose $X=OI$) :

$$\begin{cases} x = X + a \sin \varphi \\ y = a - a \cos \varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \dot{X} + a \dot{\varphi} \cos \varphi \\ \dot{y} = a \dot{\varphi} \sin \varphi \end{cases}$$

$$\text{Son énergie cinétique est : } T_A = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2} m (\dot{X}^2 + a^2 \dot{\varphi}^2 + 2a\dot{X}\dot{\varphi} \cos \varphi)$$

Son énergie potentielle : $U_A = -mga \cos \varphi$

$$\text{Le cerceau est en mouvement plan : } T_C = \frac{1}{2} m V_C^2 + \frac{1}{2} J_C \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} m \dot{X}^2 + \frac{1}{2} m a^2 \dot{\theta}^2$$

Son énergie potentielle est constante, on peut la prendre nulle : $U_C = 0$

Pour le système (bille+cerceau), on a :

$$T = T_C + T_A = \frac{1}{2} m (\dot{X}^2 + a^2 \dot{\varphi}^2 + 2a\dot{X}\dot{\varphi} \cos \varphi) + \frac{1}{2} m \dot{X}^2 + \frac{1}{2} m a^2 \dot{\theta}^2$$

$$U = U_A + U_C = -mga \cos \varphi$$

Le Lagrangien du système est :

$$L = T - U = \frac{1}{2} m (\dot{X}^2 + a^2 \dot{\varphi}^2 + 2a\dot{X}\dot{\varphi} \cos \varphi) + \frac{1}{2} m \dot{X}^2 + \frac{1}{2} m a^2 \dot{\theta}^2 + mga \cos \varphi$$

Le roulement étant sans glissement, d'où $\vec{v}_I = 0$

$$\vec{v}_I = \vec{v}_C + \vec{\omega}_{\text{cerceau}} \wedge C\vec{I} = \dot{X}\vec{i} + \dot{\theta}\vec{k} \wedge (-a\vec{j}) = (\dot{X} + a\dot{\theta})\vec{i} = 0$$

D'où $\dot{X} = -a\dot{\theta}$, En injectant cette relation dans le Lagrangien, on obtient :

$$L = \frac{1}{2} m a^2 (3\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 - 2\dot{\theta}\dot{\varphi} \cos \varphi) + mga \cos \varphi$$

Les équations du mouvement s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3\ddot{\theta} - \dot{\varphi} \cos \varphi + \dot{\varphi}^2 \sin \varphi = 0 \\ a\ddot{\varphi} - a\ddot{\theta} \cos \varphi + a\dot{\varphi}\dot{\theta} \sin \varphi + g \sin \varphi = 0 \end{cases}$$

Pour les petites oscillations, on prend $\sin \varphi = \varphi$ et $\cos \varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2}$

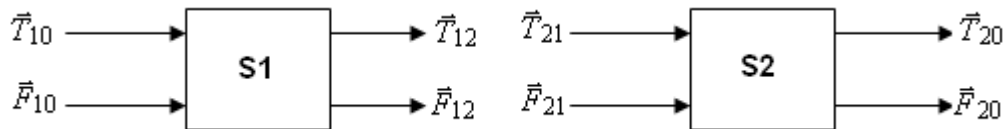
En négligeant les termes d'ordre 3, on obtient : $\begin{cases} 3\ddot{\theta} - \ddot{\varphi} = 0 \\ a\ddot{\varphi} - a\ddot{\theta} + g\varphi = 0 \end{cases}$

La première équation du système donne $\ddot{\theta} = \ddot{\varphi}/3$, en remplaçant dans la seconde :

$$\frac{2}{3}a\ddot{\varphi} + g\varphi = 0 \quad \text{ou} \quad \ddot{\varphi} + \omega^2 \varphi = 0 \quad \text{avec} \quad \omega^2 = \frac{3g}{2a}$$

$$\text{Periode} = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{2a}{3g}}$$

Exercice 4



Considérons le système (les deux masses + 3 ressorts), son énergie cinétique est :

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2$$

Les liaisons étant non parfaites, les équations de Lagrange s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} - \frac{\partial T}{\partial x_1} = Q_1 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} - \frac{\partial T}{\partial x_2} = Q_2 \end{cases} \quad (1)$$

Q_1 est la force totale appliquée sur S1 : $Q_1 = T_{10} + T_{12} + F_{10} + F_{12}$

T_{10} : est la force engendrée par le ressort 1, elle vaut :

$T_{10} = -k_1 r_1^0 = -k_1 x_1$ où r_1^0 est le déplacement de S1 par rapport à So.

T_{12} : est la force engendrée par le ressort 2, elle vaut :

$T_{12} = -k_2 r_1^2 = -k_2 (x_1 - x_2)$ r_1^2 est le déplacement de S1 par rapport à S2

F_{10} et F_{12} sont des forces d'amortissement :

$$F_{10} = -b_1 v_1^0 = -b_1 \dot{x}_1 \quad v_1^0 \text{ est la vitesse de } S1 \text{ par rapport à } S0$$

$$F_{12} = -b_2 v_1^2 = -b_2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) \quad v_1^2 \text{ est la vitesse relative de } S1 \text{ par rapport à } S2$$

$$Q_1 = -k_1 x_1 - k_2 (x_1 - x_2) - b_1 \dot{x}_1 - b_2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) = -(k_1 + k_2) x_1 - (b_1 + b_2) \dot{x}_1 + k_2 x_2 + b_2 \dot{x}_2$$

$$Q_2 \text{ est la force totale appliquée sur } S2 : \quad Q_2 = T_{20} + T_{21} + F_{20} + F_{21}$$

$$T_{20} = -k_3 x_2 \quad F_{20} = -b_3 \dot{x}_2$$

$$T_{21} = -T_{12} = k_2 (x_1 - x_2) \quad F_{21} = -F_{12} = b_2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2)$$

$$Q_2 = -k_3 x_2 + k_2 (x_1 - x_2) - b_3 \dot{x}_2 + b_2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) = -(k_3 + k_2) x_2 - (b_3 + b_2) \dot{x}_2 + k_2 x_1 + b_2 \dot{x}_1$$

Le système (1) s'écrit :

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = -(k_1 + k_2) x_1 - (b_1 + b_2) \dot{x}_1 + k_2 x_2 + b_2 \dot{x}_2 \\ m_2 \ddot{x}_2 = -(k_3 + k_2) x_2 - (b_3 + b_2) \dot{x}_2 + k_2 x_1 + b_2 \dot{x}_1 \end{cases}$$

Ou sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 + b_2 & -b_2 \\ -b_2 & b_3 + b_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_3 + k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Remarque :

Si les liaisons étaient parfaites (pas d'amortissement), les équations de Lagrange s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} - \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} - \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \end{cases}$$

U étant l'énergie potentielle des ressorts :

$$U = \frac{1}{2} k_1 x_1^2 + \frac{1}{2} k_2 (x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2} k_3 x_2^2$$

$$L = T - U = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 - \frac{1}{2} k_1 x_1^2 - \frac{1}{2} k_2 (x_2 - x_1)^2 - \frac{1}{2} k_3 x_2^2$$

Puisque les liaisons ne sont pas parfaites, on doit donc ajouter les forces de liaisons :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} - \frac{\partial L}{\partial x_1} = F_{10} + F_{12} \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} - \frac{\partial L}{\partial x_2} = F_{20} + F_{21} \end{cases}$$

Après avoir remplacé et dérivé, on obtient les mêmes équations :

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_2) x_1 - k_2 x_2 = -(b_1 + b_2) \dot{x}_1 + b_2 \dot{x}_2 \\ m_2 \ddot{x}_2 + (k_3 + k_2) x_2 - k_2 x_1 = -(b_3 + b_2) \dot{x}_1 + b_2 \dot{x}_1 \end{cases}$$

Exercice 5

L'énergie cinétique du système (masse de (3) + ressort) est :

$$T = \frac{1}{2} m v_p^2 = \frac{1}{2} m (\dot{x}_p^2 + \dot{y}_p^2)$$

L'énergie potentielle du système est :

$$U = \frac{1}{2} k (r - r_0)^2 + mg y_p$$

$$\text{On a : } \begin{cases} x_p = r \cos \theta \\ y_p = r \sin \theta + \frac{1}{2} \gamma t^2 \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x}_p = \dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta \\ \dot{y}_p = \dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta + t \gamma \end{cases}$$

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + \gamma^2 t^2 + 2t \gamma \dot{r} \sin \theta + 2t \gamma r \dot{\theta} \cos \theta)$$

$$U = \frac{1}{2} k (r - r_0)^2 + mg \left(r \sin \theta + \frac{1}{2} \gamma t^2 \right)$$

Les liaisons sont parfaites, les équations de Lagrange s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{r} + t \gamma \dot{\theta} \cos \theta + (\gamma - g) \sin \theta - \frac{k}{m} (r - r_0) = 0 \\ r^2 \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta} + t \gamma \dot{r} \cos \theta - t \gamma r \dot{\theta} \sin \theta + r \cos \theta (\gamma - g) = 0 \end{cases}$$

RECUEIL DES EXAMENS

EXAMEN DE RATRAPAGE -2008

Exercice 1 (10 pts)

Dans le plan ox, oy l'axe ox est vertical vers le bas et oy horizontal ; une barre AB , de masse m , de longueur $2l$ glisse sans frottement sur ox et oy . On fixe sa position par l'angle $\theta = (\vec{o\vec{x}}, \vec{o\vec{y}})$

- 1- Calculer la vitesse et l'accélération du point G .
- 2- Calculer l'énergie cinétique de la barre
- 3- Calculer l'équation du mouvement en appliquant le théorème de l'énergie cinétique sachant qu'à : $t = 0, \theta = \theta_0, \dot{\theta} = 0$
- 4- Calculer les réactions.

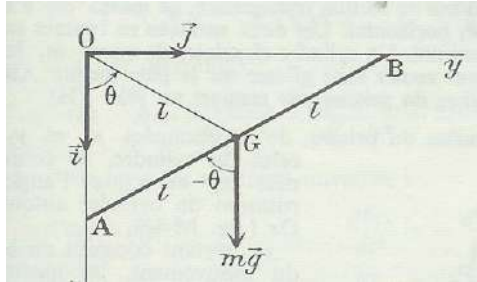


Figure 1

Exercice 2 (10 pts)

Un disque de masse m et de rayon r roule sans glisser le long d'un plan incliné (figure 2), on désigne par :

x : la distance OI

ϕ : l'angle de rotation du cylindre autour de l'axe Gz_1

α : l'angle d'inclinaison du plan sur l'horizontale

- 1- Donner la vitesse et l'accélération du point G
- 2- Donner la condition du roulement sans glissement
- 3- Trouver l'équation du mouvement en appliquant le théorème du moment.

On prend à : $t = 0, x_0 = 0, \dot{x}_0 = 0$

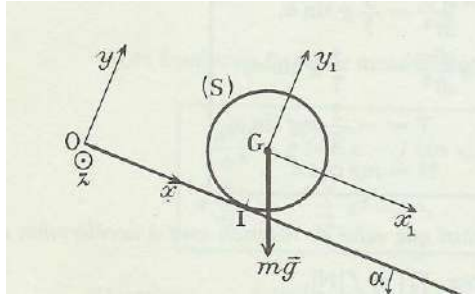


Figure 2

SOLUTION DE L'EXAMEN DE RATRAPAGE -2008

Exercice 1

1- Vitesse et accélération du point G

$$\overrightarrow{OG} = \begin{cases} x_G = l \cos \theta \\ y_G = l \sin \theta \end{cases} \quad \vec{v}_G = \begin{cases} -l \dot{\theta} \sin \theta \\ l \dot{\theta} \cos \theta \end{cases} \quad \vec{\gamma}_G = \begin{cases} -l \ddot{\theta} \sin \theta - l \dot{\theta}^2 \cos \theta \\ l \ddot{\theta} \cos \theta - l \dot{\theta}^2 \sin \theta \end{cases}$$

2- Energie cinétique

$$T = \frac{1}{2} m \vec{v}_G^2 + \frac{1}{2} J_G \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \frac{m l^2}{3} \dot{\theta}^2 = \frac{2}{3} m l^2 \dot{\theta}^2 \text{ (mouvement plan)}$$

3- Equation du mouvement :

Le glissement se fait sans frottement, l'énergie se conserve :

$$E_p + T = Cte$$

$$E_p = -mgl \cos \theta$$

$$\frac{2}{3} m l^2 \dot{\theta}^2 - mgl \cos \theta = Cte$$

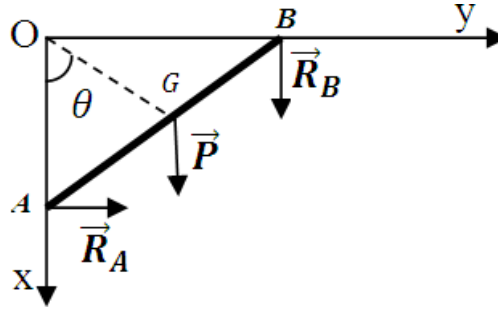
$$\text{à } t = 0, \theta = \theta_0, \dot{\theta} = 0 : -mgl \cos \theta_0 = Cte$$

Soit l'équation du mouvement :

$$\dot{\theta}^2 + \frac{3g}{2l} (\cos \theta_0 - \cos \theta) = 0$$

4- Principe fondamental de la dynamique :

$$\sum \vec{F} = m \vec{\gamma}_G$$



$$\vec{R}_A + \vec{R}_B + \vec{P} = m\vec{\gamma}_G$$

En projetant sur les deux axes :

$$\begin{cases} R_A = -ml(\ddot{\theta} \sin\theta + \dot{\theta}^2 \cos\theta) \\ R_B = ml(\ddot{\theta} \cos\theta - \dot{\theta}^2 \sin\theta) - mg \end{cases}$$

$$\dot{\theta}^2 + \frac{3g}{2l} (\cos\theta_0 - \cos\theta) = 0 \Rightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{3g}{2l} (\cos\theta - \cos\theta_0)$$

En dérivant par rapport au temps :

$$\ddot{\theta} = -\frac{3g}{4l} \sin\theta$$

En remplaçant $\dot{\theta}^2$ et $\ddot{\theta}$ par les expressions ci-dessous :

$$\begin{aligned} R_A &= -\frac{3}{4}mg(2\cos^2\theta - 2\cos\theta \cos\theta_0 - \sin^2\theta) \\ R_B &= \frac{3}{4}mg(2\cos\theta_0 - 3\cos\theta)\sin\theta - mg \end{aligned}$$

Exercice

1- Vitesse et accélération du point G

$$\overrightarrow{OG} \begin{Bmatrix} x \\ r \end{Bmatrix} \quad \vec{V}_G \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \vec{\gamma}_G \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

2 – Le roulement se fait sans glissement si la vitesse du point de contact I est nulle :

$$\vec{V}_I = 0$$

En utilisant la relation entre les vitesses d'un même solide :

$$\begin{aligned} \vec{V}_I &= \vec{V}_G + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{GI} = \dot{x} \vec{i} + \dot{\phi} \vec{k} \wedge (-r\vec{j}) = (\dot{x} + r\dot{\phi})\vec{i} = \vec{0} \\ \dot{x} + r\dot{\phi} &= 0 \end{aligned}$$

3- Appliquons le théorème du moment cinétique par rapport au point I.

$$\frac{d\vec{\sigma}_I}{dt} = \sum \mathbf{M}_I = \overrightarrow{IG} \wedge \vec{P}$$

$$\sum \mathbf{M}_I = \overrightarrow{IG} \wedge \vec{P} = r\vec{j} \wedge mg(\sin\alpha \vec{i} - \cos\alpha \vec{j}) = -mgr \sin\alpha \vec{k}$$

$$\vec{\sigma}_I = \vec{\sigma}_G + m \overrightarrow{OG} \wedge \vec{V}_G = \frac{mr^2}{2} \dot{\phi} \vec{k} - mr\dot{x} \vec{k} = \frac{mr}{2} (r\dot{\phi} - 2\dot{x}) \vec{k}$$

En utilisant la condition du roulement sans glissement, on obtient :

$$\vec{\sigma}_I = -\frac{3}{2} mr\dot{x} \vec{k}$$

Le théorème du moment cinétique donne :

$$\ddot{x} = \frac{2}{3} g \sin \alpha$$

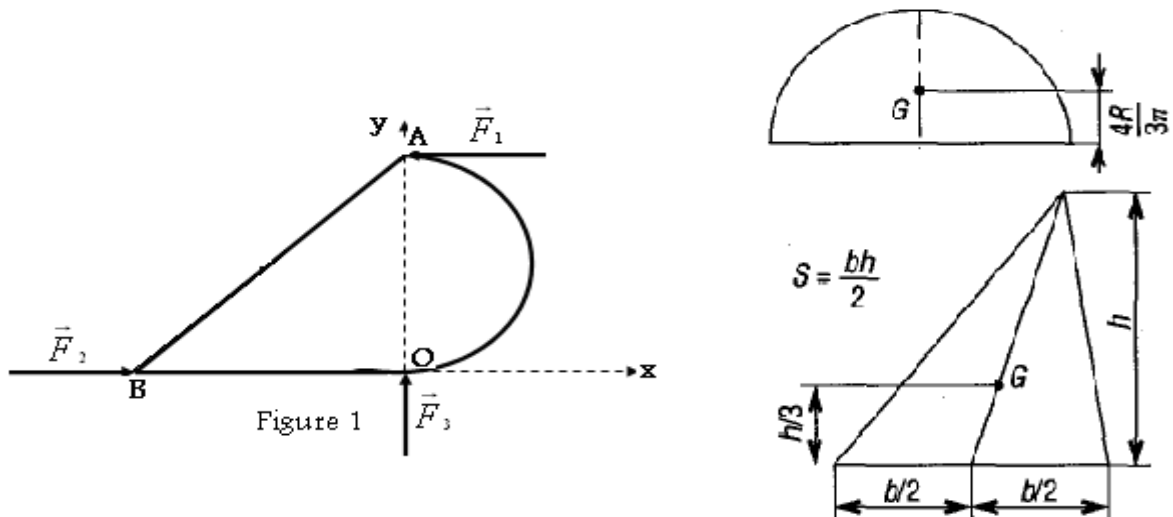
$$x = \left(\frac{1}{3} g \sin \alpha \right) t^2$$

EXAMEN - 2009

Exercice 1

Soit une plaque homogène OAB, de masse surfacique σ (figure 1), située dans le plan vertical oxy. On donne $OA=OB=2R$.

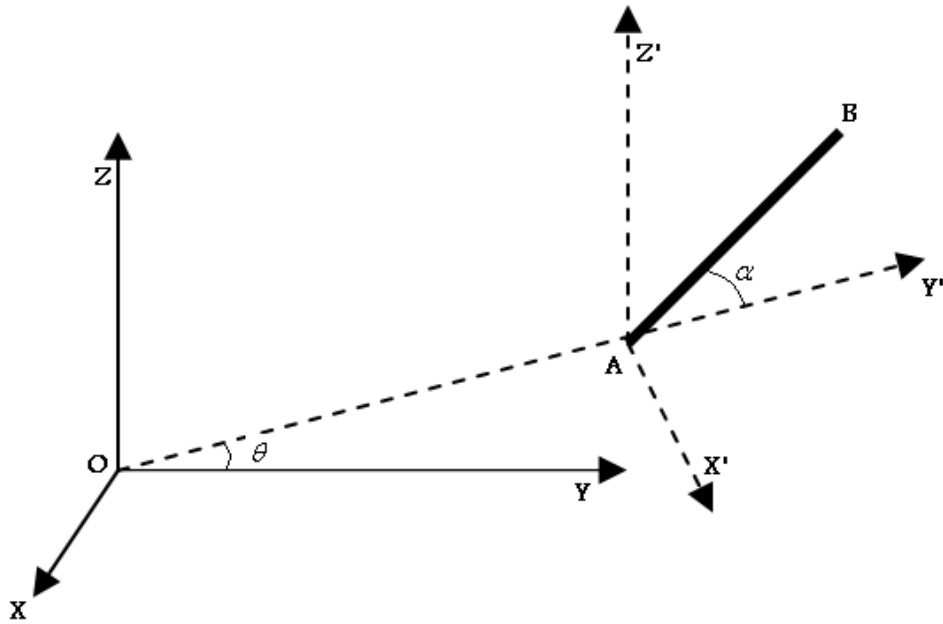
- 1- Calculer le torseur résultant en O en fonction de σ , R et la pesanteur g.
- 2- Calculer F_1 , F_2 , F_3 pour que la plaque soit en équilibre



Exercice 2

On considère un référentiel fixe OXYZ, un repère mobile AX'Y'Z' tournant autour de l'axe OZ, et une tige AB de masse M, de longueur L et de centre de gravité G mobile dans le plan AY'Z'. $OA=d=\text{Constante}$. Calculer :

- 1- La vitesse du point A en utilisant le théorème du vecteur dérivé,
- 2- En déduire la vitesse du point G,
- 3- Le moment cinétique de la tige $\vec{\sigma}_G$,
- 4- L'énergie cinétique de la tige.



SOLUTION DE L'EXAMEN - 2009

Exercice 1

Le solide est soumis à l'action de 5 torseurs

a- Action en A

$$\{T_1\}_A = \begin{Bmatrix} \vec{F}_1 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} -F_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} -F_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 2RF_1 \end{Bmatrix}_O$$

$$\vec{M}_O = \vec{M}_A + \overrightarrow{OA} \wedge \vec{F}_1 = \vec{0} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2R \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -F_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2RF_1 \end{pmatrix}$$

b- Action en B

$$\{T_2\}_B = \begin{Bmatrix} \vec{F}_2 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_B = \begin{Bmatrix} F_2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_B = \begin{Bmatrix} F_2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_O \quad \vec{M}_O = \vec{M}_B + \overrightarrow{OB} \wedge \vec{F}_2 = \vec{0} \text{ car } \overrightarrow{OB} // \vec{F}_2$$

c- Action en O

$$\{T_3\}_O = \begin{Bmatrix} \vec{F}_3 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_O = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ F_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_O$$

d- Action en G1

G1 est le centre de gravité de la partie triangulaire, de surface $S_1 = \frac{1}{2}OA \cdot OB = 2R^2$, de

masse $m_1 = \sigma S_1 = \sigma 2R^2$. Nous avons $\overrightarrow{OG1} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OM} = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} -R \\ R \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\{T_4\}_{G1} = \left\{ \begin{pmatrix} \vec{P}_1 \\ \vec{0} \end{pmatrix} \right\}_{G1} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -P_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}_{G1} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -P_1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3}RP_1 \end{pmatrix} \right\}_O$$

$$\vec{M}_O = \vec{M}_{G1} + \overrightarrow{OG1} \wedge \vec{P}_1 = \vec{0} + \frac{2}{3}\begin{pmatrix} -R \\ R \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -P_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{2}{3}RP_1 \end{pmatrix}$$

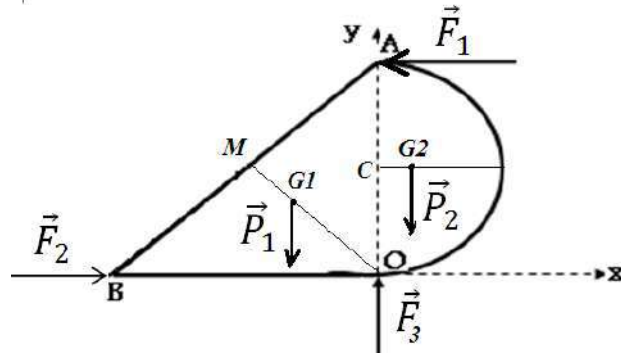
e- Action en G2

G2 est le centre de gravité du demi-disque, de surface $S_2 = \frac{1}{2}\pi R^2$, de masse $m_2 = \sigma S_2$. Nous

$$\text{avons } \overrightarrow{OG2} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CG2} = \begin{pmatrix} 0 \\ R \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{4R}{3\pi} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4R}{3\pi} \\ R \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\{T_5\}_{G2} = \left\{ \begin{pmatrix} \vec{P}_2 \\ \vec{0} \end{pmatrix} \right\}_{G2} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -P_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}_{G2} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -P_2 & 0 \\ 0 & -\frac{4R}{3\pi}P_2 \end{pmatrix} \right\}_O$$

$$\vec{M}_O = \vec{M}_{G2} + \overrightarrow{OG2} \wedge \vec{P}_1 = \vec{0} + \begin{pmatrix} \frac{4R}{3\pi} \\ R \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -P_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{4R}{3\pi}P_2 \end{pmatrix}$$



Le torseur résultant en O est :

$$\{T\}_O = \{T_1\}_O + \{T_2\}_O + \{T_3\}_O + \{T_4\}_O + \{T_5\}_O$$

$$\{T\}_O = \left\{ \begin{pmatrix} -F_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 2RF_1 \end{pmatrix} \right\}_O + \left\{ \begin{pmatrix} F_2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}_O + \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ F_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}_O + \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -P_1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3}RP_1 \end{pmatrix} \right\}_O + \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -P_2 & 0 \\ 0 & -\frac{4R}{3\pi}P_2 \end{pmatrix} \right\}_O$$

$$\{T\}_O = \begin{pmatrix} -F_1 + F_2 & 0 \\ F_3 - 4\sigma g R^2(1 + \pi) & 0 \\ 0 & 2RF_1 + \frac{2}{3\pi}g\sigma R^3(2\pi - 1) \end{pmatrix}_O$$

La structure est en équilibre, d'après le principe fondamental de la statique, le torseur résultant est nul.

$$\{T\}_O = \begin{pmatrix} -F_1 + F_2 & 0 \\ F_3 - 4\sigma g R^2(1 + \pi) & 0 \\ 0 & 2RF_1 + \frac{2}{3\pi}g\sigma R^3(2\pi - 1) \end{pmatrix}_O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d'où

$$\begin{cases} -F_1 + F_2 = 0 \\ F_3 - 4\sigma g R^2(1 + \pi) = 0 \\ 2RF_1 + \frac{2}{3\pi}g\sigma R^3(2\pi - 1) = 0 \end{cases}$$

$$\text{Soit : } F_1 = F_2 = \frac{-2}{3\pi}g\sigma R^2(2\pi - 1) ; F_3 = 4\sigma g R^2(1 + \pi)$$

Exercice 2

Repère de référence R0(OXYZ)

Repère R'(AX'Y'Z')

$$\vec{\omega}_{R'/R0} = \dot{\theta} \vec{Z} = \dot{\theta} \vec{Z}'$$

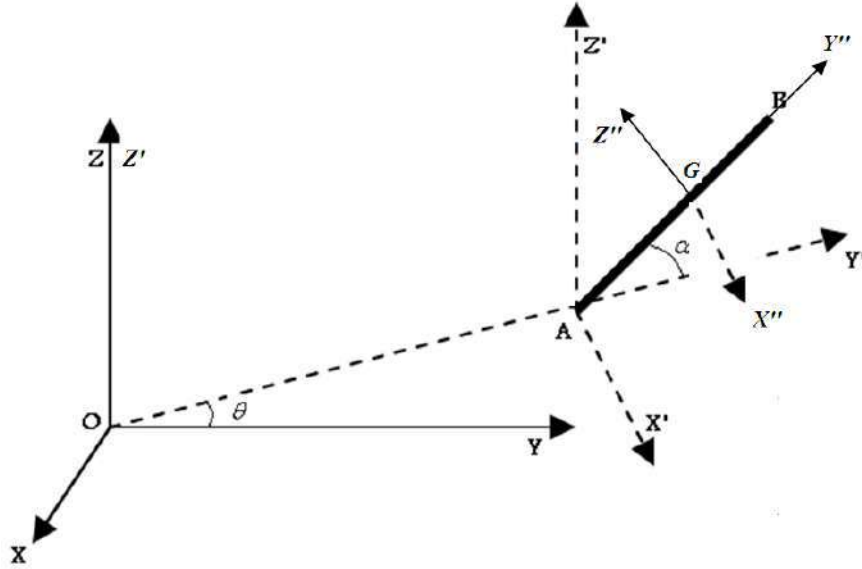
Repère R''(GX''Y''Z'') $\vec{\omega}_{R''/R0} = \vec{\omega}_{R''/R'} + \vec{\omega}_{R'/R0}$

$$\vec{\omega}_{R''/R0} = \vec{\omega}_{R''/R'} + \vec{\omega}_{R'/R0} = \dot{\theta} \vec{Z}' + \dot{\alpha} \vec{X}'$$

1- Vitesse du point A

$$\vec{V}_A = \left(\frac{d\vec{OA}}{dt} \right)_{R0} = \left(\frac{d\vec{OA}}{dt} \right)_{R'} + \vec{\omega}_{R'/R0} \wedge \vec{OA} = \vec{\omega}_{R'/R0} \wedge \vec{OA}$$

$$\vec{V}_A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}_{R'} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ d \\ 0 \end{pmatrix}_{R'} = \begin{pmatrix} -d\dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{R'} = -d\dot{\theta} \vec{X}'$$



2- Vitesse du point G

$$\vec{V}_G = \vec{V}_A + \vec{\omega}_{tige} \wedge \overrightarrow{AG}$$

Comme la vitesse \vec{V}_A est déjà exprimée dans le repère R' , on va exprimer \vec{V}_G dans le même repère.

$$\vec{V}_G = \begin{pmatrix} -d\dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{R'} + \begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}_{R'} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{L}{2}\cos\alpha \\ \frac{L}{2}\sin\alpha \end{pmatrix}_{R'} = \begin{pmatrix} -\dot{\theta}\left(d + \frac{L}{2}\cos\alpha\right) \\ -\frac{L}{2}\dot{\alpha}\sin\alpha \\ \frac{L}{2}\dot{\alpha}\cos\alpha \end{pmatrix}_{R'}$$

3- Moment cinétique $\vec{\sigma}_G$

$$\vec{\sigma}_G = [J_G]\vec{\omega}_{tige}$$

La règle de calcul exige que le tenseur d'inertie $[J_G]$ et la vitesse de rotation $\vec{\omega}_{tige}$ doivent être exprimés dans le même repère. Comme Le tenseur d'inertie $[J_G]$ est facilement calculable dans le repère $R''(GX''Y''Z'')$, alors on doit exprimer aussi $\vec{\omega}_{tige}$ dans $R''(GX''Y''Z'')$.

D'après le TD 4 :

$$[J_G]_{R''} = \frac{ML^2}{12} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\omega}_{tige} = \vec{\omega}_{R''/R_0} = \dot{\theta}\vec{Z'} + \dot{\alpha}\vec{X'} = \dot{\theta} \begin{pmatrix} 0 \\ \sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}_{R''} + \dot{\alpha} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{R''} = \begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\theta}\sin\alpha \\ \dot{\theta}\cos\alpha \end{pmatrix}_{R''}$$

$$\vec{\sigma}_G = \frac{ML^2}{12} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\theta} \sin \alpha \\ \dot{\theta} \cos \alpha \end{pmatrix} = \frac{ML^2}{12} \begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ 0 \\ \dot{\theta} \cos \alpha \end{pmatrix}_{R''}$$

5- Energie cinétique de la tige

$$T = \frac{1}{2} M V_G^2 + \frac{1}{2} \vec{\sigma}_G \cdot \vec{\omega}_{tige}$$

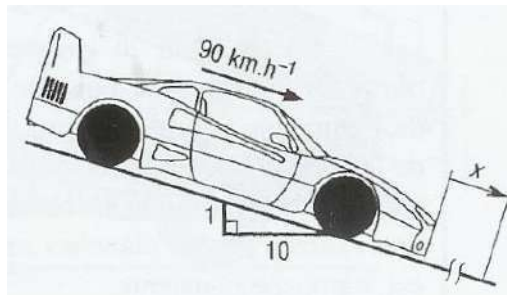
$$T = \frac{1}{2} M \left[\left(\dot{\theta} \left(d + \frac{L}{2} \cos \alpha \right) \right)^2 + \left(\frac{L}{2} \dot{\alpha} \right)^2 \right] + \frac{ML^2}{24} (\dot{\alpha}^2 + (\dot{\theta} \cos \alpha)^2)$$

$$T = \frac{ML^2}{6} (\dot{\alpha}^2 + (\dot{\theta} \cos \alpha)^2) + \frac{1}{2} M \dot{\theta}^2 (d^2 + dL \cos \alpha)$$

EXAMEN DE RATRAPAGE - 2010

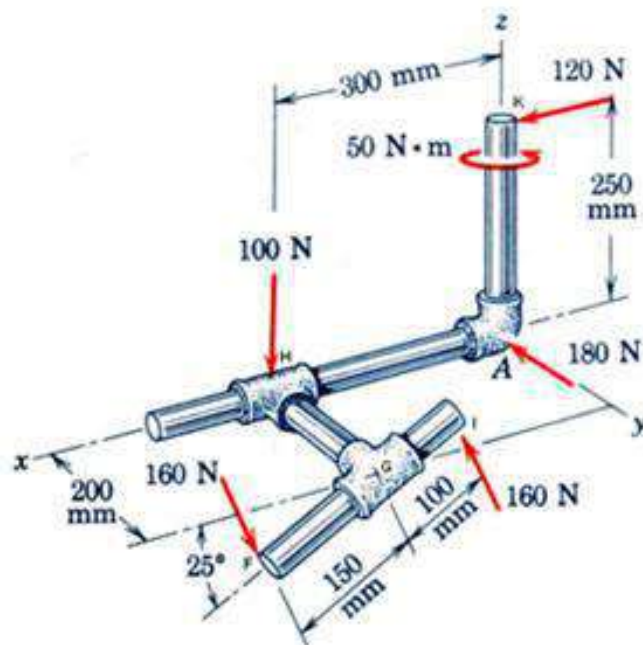
Exercice 1

Une automobile, de masse 1000 kg, descend une pente de 10%. La vitesse initiale est de 90 km/h, les freins sont actionnés et exercent un effort résultant de freinage constant de 2500 N. Déterminer la distance parcouru x avant l'arrêt en utilisant le théorème de l'énergie cinétique (Pour un solide isolé, le travail des forces extérieures est égal à la variation de l'énergie cinétique)



Exercice 2

Calculer le torseur résultant en A



SOLUTION DE L'EXAMEN DE RATRAPAGE - 2010

Exercice 1

Soit \vec{v}_1 la vitesse initiale, \vec{v}_2 la vitesse finale (nulle)

T_1 l'énergie cinétique initiale, T_2 l'énergie cinétique finale

Théorème de l'énergie cinétique :

$$T_2 - T_1 = W(\vec{F}) + W(\vec{P})$$

$W(\vec{F})$ est le travail de la force de frottement

$W(\vec{P})$ est le travail du poids

$$0 - \frac{1}{2}mv_1^2 = -F x + mgh$$

$$h = x \sin \alpha \approx x \operatorname{tg} \alpha = 0.1 x$$

$$x = \frac{\frac{1}{2}mv_1^2}{(F - 0.1 mg)}$$

$$x = 205$$

EXERCICE 2

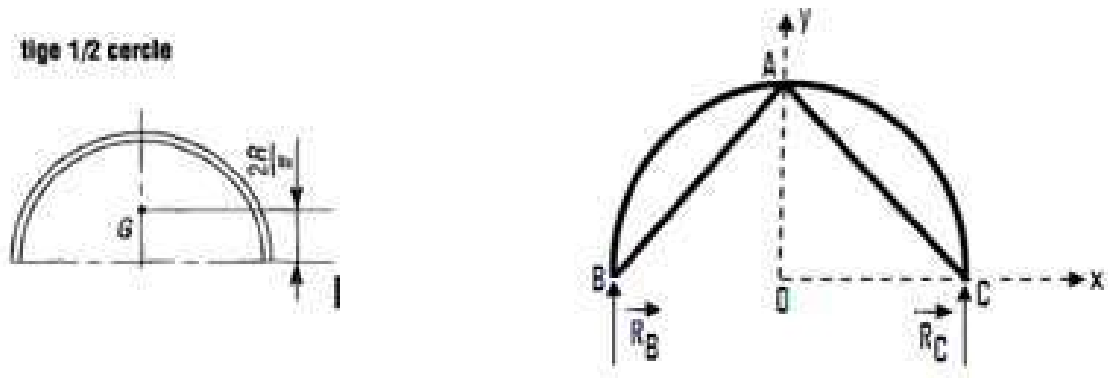
Voir TD 1 exercice 5

EXAMEN - 2011

Exercice 1

Soit une structure homogène de masse M composée d'une tige-demi cercle de rayon r et de deux tiges rectilignes AB et AC de même longueur.

- 1- Calculer les coordonnées du centre de gravité G de la structure
- 2- Calculer le torseur résultant en G
- 3- Calculer les forces de réaction sachant que la structure est en équilibre



Exercice 2

Une barre AB homogène de masse M , de longueur $2l$ et de centre de gravité G glisse sans frottement dans un cerceau de rayon R (voir figure).

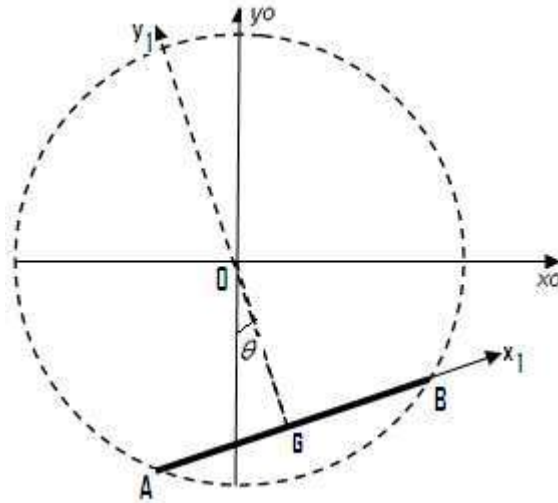
- 1- Calculer son moment cinétique $\vec{\sigma}_G$ puis $\vec{\sigma}_O$, on donne $[J_G]_{x_1y_1z_1} = \frac{Ml^2}{3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
- 2- En appliquant le théorème du moment cinétique $\left(\sum M = \frac{d\vec{\sigma}}{dt}\right)$, montrer que l'équation du mouvement se met sous la forme : $\ddot{\theta} + \mu^2 \sin \theta = 0$ (1)

- 3- En déduire la période des petites oscillations.

En intégrant l'équation (1) par rapport au temps et sachant qu'à l'instant initiale :

$$\theta(0) = \theta_0 \text{ et } \dot{\theta}(0) = 0, \text{ on obtient : } \dot{\theta}^2 - 2\mu^2(\cos \theta - \cos \theta_0) = 0 \quad (2)$$

- 4- En utilisant les relations (1) et (2) Calculer en fonction de θ l'accélération du point G .
- 5- En appliquant le principe fondamental de la dynamique, calculer les forces de réaction aux points A et B .



SOLUTION DE L'EXAMEN - 2011

Exercice 1

1- Centre de gravité de la structure : $\vec{OG} = \frac{m_1 \vec{OG}_1 + m_2 \vec{OG}_2 + m_3 \vec{OG}_3}{m_1 + m_2 + m_3}$

G_3 est le centre de gravité de la tige demi-cercle, il est situé sur l'axe oy tel que $OG_3 = 2r/\pi$.

G_1 et G_2 sont les centres de gravités des tiges AB et AC qui se trouvent en leurs milieux :

$$\vec{OG}_1 = \begin{Bmatrix} -r/2 \\ r/2 \end{Bmatrix} \quad \vec{OG}_2 = \begin{Bmatrix} r/2 \\ r/2 \end{Bmatrix} \quad \vec{OG}_3 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 2r/\pi \end{Bmatrix}$$

Comme la tige est homogène, alors: $m_i = \lambda l_i$ ($l_1 = l_2 = r\sqrt{2}$, $l_3 = \pi r$)

$$X_G = \frac{r\sqrt{2} \left(-\frac{r}{2}\right) + r\sqrt{2} \left(\frac{r}{2}\right)}{r\sqrt{2} + r\sqrt{2} + \pi r} = 0 \quad y_G = \frac{r\sqrt{2} \left(\frac{r}{2}\right) + r\sqrt{2} \left(\frac{r}{2}\right) + \pi r \frac{2r}{\pi}}{r\sqrt{2} + r\sqrt{2} + \pi r} = \frac{2 + \sqrt{2}}{2\sqrt{2} + \pi} r$$

2- Torseur résultant en G

$$\{T\}_1 = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{Mg} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{Bmatrix}_G$$

$$\{T\}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ R_B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{R}_B & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -r\mathbf{R}_B \end{pmatrix}_G \quad \vec{M}_G = \vec{M}_B + \vec{GB} \wedge \vec{R}_B = \begin{pmatrix} -r \\ -y_G \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ R_B \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -rR_B \end{pmatrix}$$

$$\{T\}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ R_C & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_C = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{R}_C & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & r\mathbf{R}_B \end{pmatrix}_G \quad \vec{M}_G = \vec{M}_C + \vec{GB} \wedge \vec{R}_C = \begin{pmatrix} r \\ -y_G \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ R_C \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ rR_C \end{pmatrix}$$

$$\{T\}_G = \{T\}_1 + \{T\}_2 + \{T\}_3 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -M\mathbf{g} + \mathbf{R}_B + \mathbf{R}_C & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & r(\mathbf{R}_C - \mathbf{R}_B) \end{pmatrix}_G$$

3- La structure est en équilibre $\{T\}_G = \{0\}$

$$\begin{cases} -Mg + R_B + R_C = 0 \\ r(R_C - R_B) = 0 \end{cases} \quad R_C = R_B = \frac{1}{2} Mg$$

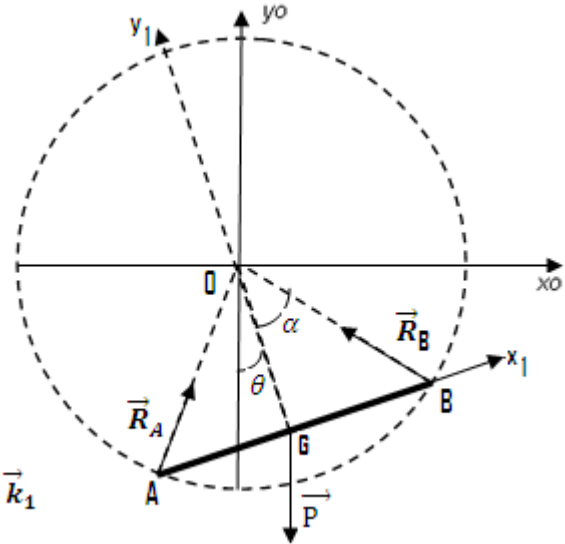
Exercice 2

$R_0 = O x_0 y_0 z_0$ repère fixe

$R_1 = G x_1 y_1 z_1$ repère mobile

$$\vec{\omega}_{R1/R0} = \vec{\omega}_{barys} = \vec{\omega} = \dot{\theta} \vec{k}_0 = \dot{\theta} \vec{k}_1$$

$$1- \vec{\sigma}_G = [J_G]_{x_1 y_1 z_1} \vec{\omega} = \frac{Ml^2}{3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \frac{Ml^2}{3} \dot{\theta} \vec{k}_1$$



$$\vec{\sigma}_O = \vec{\sigma}_G + M \vec{OG} \wedge \vec{V}_G = \frac{Ml^2}{3} \dot{\theta} \vec{k}_1 + M \dot{\theta} a^2 \vec{k}_1 = M \left(\frac{l^2}{3} + a^2 \right) \dot{\theta} \vec{k}_1 \quad \text{avec } a = \sqrt{R^2 - l^2}$$

$$\vec{OG} = -a \vec{j}_1 \quad \vec{V}_G = \left. \frac{d\vec{OG}}{dt} \right|_{R0} = \left. \frac{d\vec{OG}}{dt} \right|_{R1} + \vec{\omega} \wedge \vec{OG} = -a \dot{\theta} \vec{k}_1 \wedge \vec{j}_1 = a \dot{\theta} \vec{i}_1 \quad \vec{OG} \wedge \vec{V}_G = \dot{\theta} a^2 \vec{k}_1$$

$$2- \sum \vec{M}_o = \overrightarrow{M(P)}_o = \overrightarrow{OG} \wedge \vec{P} = \begin{pmatrix} 0 \\ -a \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -Mg \sin \theta \\ -Mg \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} = -Mg a \sin \theta \vec{k}_1$$

$$\sum \vec{M}_o = \frac{d\vec{\sigma}_o}{dt} \Rightarrow M\left(\frac{l^2}{3} + a^2\right) \ddot{\theta} = -Mg a \sin \theta \quad \text{soit : } \ddot{\theta} + \mu^2 \sin \theta = 0 \quad \text{avec } \mu^2 = g a / \left(\frac{l^2}{3} + a^2\right)$$

3- pour les petites oscillations l'équation devient : $\ddot{\theta} + \mu^2 \theta = 0$ d'où **Période** = $2\pi/\mu$

$$4- \quad \vec{\gamma}_G = \left. \frac{d\vec{V}_G}{dt} \right|_{R0} = \left. \frac{d\vec{V}_G}{dt} \right|_{R1} + \vec{\omega} \wedge \vec{V}_G = a\ddot{\theta} \vec{i}_1 + a\dot{\theta}^2 \vec{j}_1 = -a\mu^2 \sin \theta \vec{i}_1 + 2a\mu^2 (\cos \theta - \cos \theta_0) \vec{j}_1$$

$$\text{Car } \ddot{\theta} = -\mu^2 \sin \theta \quad \text{et} \quad \dot{\theta}^2 = 2\mu^2 (\cos \theta - \cos \theta_0)$$

$$5- \quad \vec{P} + \vec{R}_A + \vec{R}_B = M\vec{\gamma}_G$$

Projetons sur les axes \vec{x}_1 et \vec{y}_1

$$\begin{cases} R_A \sin \alpha - R_B \sin \alpha - Mg \sin \theta = M\gamma_{x1} \\ R_A \cos \alpha + R_B \cos \alpha - Mg \cos \theta = M\gamma_{y1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_A - R_B = (g - a\mu^2) M \sin \theta / \sin \alpha \\ R_A + R_B = [g \cos \theta + 2a\mu^2 (\cos \theta - \cos \theta_0)] M / \cos \alpha \end{cases}$$

$$\text{avec } \cos \alpha = a/R \quad \sin \alpha = l/R$$

$$R_A = MR \frac{\sin \theta}{2l} (g - a\mu^2) + \frac{MR}{2a} [g \cos \theta + 2a\mu^2 (\cos \theta - \cos \theta_0)]$$

$$R_B = -MR \frac{\sin \theta}{2l} (g - a\mu^2) + \frac{MR}{2a} [g \cos \theta + 2a\mu^2 (\cos \theta - \cos \theta_0)]$$

Autre méthode

$$1- \vec{\sigma}_G = [J_G]_{x_1 y_1 z_1} \vec{\omega} = \frac{Ml^2}{3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \frac{Ml^2}{3} \dot{\theta} \vec{k}_1 = \frac{Ml^2}{3} \dot{\theta} \vec{k}_0$$

$$\vec{\sigma}_O = \vec{\sigma}_G + M \vec{OG} \wedge \vec{V}_G = \frac{Ml^2}{3} \dot{\theta} \vec{k}_0 + M \dot{\theta} a^2 \vec{k}_0 = M \left(\frac{l^2}{3} + a^2 \right) \dot{\theta} \vec{k}_0 \quad \text{avec } a = \sqrt{R^2 - l^2}$$

$$\vec{OG} = \begin{pmatrix} a \sin \theta \\ -a \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}_{R0} \quad \vec{V}_G = \begin{pmatrix} a \dot{\theta} \cos \theta \\ a \dot{\theta} \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}_{R0} \quad M \vec{OG} \wedge \vec{V}_G = M \dot{\theta} a^2 \vec{k}_0$$

$$2- \sum \vec{M}_O = \overrightarrow{M(P)_O} = \vec{OG} \wedge \vec{P} = \begin{pmatrix} a \sin \theta \\ -a \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -Mg \\ 0 \end{pmatrix} = -Mg a \sin \theta \vec{k}_0$$

$$\sum \vec{M}_O = \frac{d\vec{\sigma}_O}{dt} \Rightarrow M \left(\frac{l^2}{3} + a^2 \right) \ddot{\theta} = -Mg a \sin \theta \quad \text{soit } \ddot{\theta} + \mu^2 \sin \theta = 0 \quad \text{avec } \mu^2 = g a / \left(\frac{l^2}{3} + a^2 \right)$$

3- pour les petites oscillations l'équation devient : $\ddot{\theta} + \mu^2 \theta = 0$ d'où Période = $2\pi/\mu$

$$4- \vec{\gamma}_G = \begin{pmatrix} a (\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta) \\ a (\ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta) \\ 0 \end{pmatrix}_{R0} = \begin{pmatrix} a \mu^2 \sin \theta (2 \cos \theta_0 - 3 \cos \theta) \\ a \mu^2 (3 \cos^2 \theta - 2 \cos \theta \cos \theta_0 - 1) \\ 0 \end{pmatrix}_{R0}$$

$$\text{Car } \ddot{\theta} = -\mu^2 \sin \theta \quad \text{et } \dot{\theta}^2 = 2\mu^2 (\cos \theta - \cos \theta_0)$$

$$5- \quad \vec{P} + \vec{R}_A + \vec{R}_B = M \vec{\gamma}_G$$

Projetons sur les axes \vec{x}_0 et \vec{y}_0

$$\begin{cases} R_A \sin(\alpha - \theta) - R_B \sin(\alpha + \theta) & = & Ma \mu^2 \sin \theta (2 \cos \theta_0 - 3 \cos \theta) \\ R_A \cos(\alpha - \theta) + R_B \cos(\alpha + \theta) - Mg & = & Ma \mu^2 (3 \cos^2 \theta - 2 \cos \theta \cos \theta_0 - 1) \end{cases}$$

Avec $\cos\alpha = a/R$ $\sin\alpha = l/R$

$$R_A = MR \frac{\sin\theta}{2l} (g - a\mu^2) + \frac{MR}{2a} [g\cos\theta + 2a\mu^2(\cos\theta - \cos\theta_0)]$$

$$R_B = -MR \frac{\sin\theta}{2l} (g - a\mu^2) + \frac{MR}{2a} [g\cos\theta + 2a\mu^2(\cos\theta - \cos\theta_0)]$$

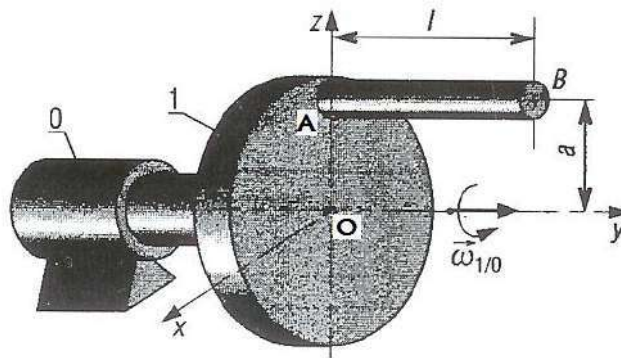
avec $\cos(\alpha + \theta) = \cos\alpha \cos\theta - \sin\alpha \sin\theta$ $\sin(\alpha + \theta) = \sin\alpha \cos\theta + \cos\alpha \sin\theta$

EXAMEN DE RATTRAPAGE - 2011

Exercice1(12 pts)

Une tige mince AB, de longueur l et de masse m est fixé sur un disque (1) en rotation à la vitesse $\vec{\omega}_{1/0}$ par rapport à un bâti fixe (0).

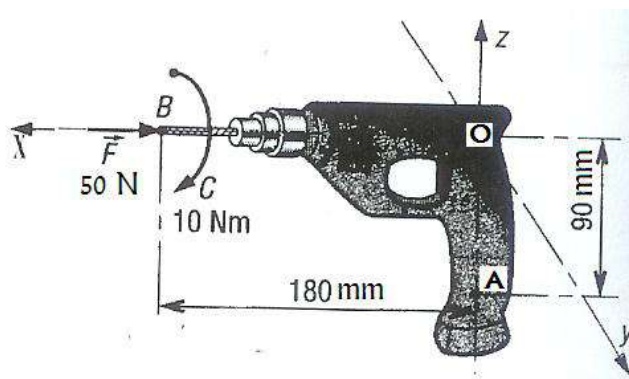
- a- Déterminer le moment cinétique de la tige par rapport à A(6ps).
- b- Calculer son énergie cinétique(3pts).
- c- Calculer les actions d'encastrement en A (Forces de réaction)(3pts).



Exercice 2(8 pts)

Pour la perceuse sans fil proposée, la force \vec{F} (50 N) et le couple C (10 Nm, axe X) schématisent les actions exercées par le mûr à percer sur l'extrémité B de la forêt.

- a- Ecrire les deux actions précédentes sous forme d'un torseur au point B(2ps).
- b- Calculer ce torseur aux points O et A (2pts+2pts).
- c- Si le poids de la perceuse est négligé, Déterminer les actions exercées en A par la main de l'opérateur (2pts).



SOLUTION EXAMEN DE RATRAPAGE - 2011

Exercice 1

a- Moment cinétique en A de la tige AB

$$\begin{aligned}\vec{\sigma}_A &= \vec{\sigma}_G + m\overrightarrow{OG} \wedge \vec{v}_G \\ \vec{\sigma}_G &= [J_G]_{xyz} \vec{\omega}_{1/0} = \frac{ml^2}{12} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_{1/0} \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0} \\ \overrightarrow{OG} &= \frac{1}{2}\vec{j} + a\vec{k} \quad \overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}\vec{j}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{v}_G &= \left(\frac{d\overrightarrow{OG}}{dt} \right)_O = \left(\frac{d\overrightarrow{OG}}{dt} \right)_1 + \vec{\omega}_{1/0} \wedge \overrightarrow{OG} = \omega_{1/0} \vec{j} \wedge \left(\frac{1}{2}\vec{j} + a\vec{k} \right) = a\omega_{1/0} \vec{i} \\ m\overrightarrow{AG} \wedge \vec{v}_G &= m \left(\frac{1}{2}\vec{j} \right) \wedge a\omega_{1/0} \vec{i} = -am\omega_{1/0} \frac{1}{2} \vec{k} \\ \vec{\sigma}_A &= -am\omega_{1/0} \frac{1}{2} \vec{k}\end{aligned}$$

b- Energie cinétique

$$T = E_c = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} \vec{\sigma}_G \cdot \vec{\omega}_{1/0} = \frac{1}{2} m v_G^2 = \frac{1}{2} m a^2 \omega_{1/0}^2$$

c- Action d'encastrement en A

$$\begin{aligned}\vec{P} + \vec{R} &= m\vec{v}_G \\ \vec{v}_G &= \left(\frac{d\vec{v}_G}{dt} \right)_O = \left(\frac{d\vec{v}_G}{dt} \right)_1 + \vec{\omega}_{1/0} \wedge \vec{v}_G = \omega_{1/0} \vec{j} \wedge a\omega_{1/0} \vec{i} = -a\omega_{1/0}^2 \vec{k} \\ \vec{R} &= -m(a\omega_{1/0}^2 + g)\vec{k}\end{aligned}$$

Exercice 2

a- Torseur au point B: $\{T\}_B = \begin{Bmatrix} \vec{F}_B \\ \vec{M}_B \end{Bmatrix}_B = \begin{Bmatrix} -50 & -10 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_B$

b- Torseur au point O: $\{T\}_O = \begin{Bmatrix} \vec{F}_O = \vec{F}_B \\ \vec{M}_O = \vec{M}_B + \overrightarrow{OB} \wedge \vec{F}_O = \vec{M}_B \end{Bmatrix}_O = \begin{Bmatrix} -50 & -10 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_O$

Torseur au point A: $\{T\}_A = \begin{Bmatrix} \vec{F}_A = \vec{F}_O \\ \vec{M}_A = \vec{M}_O + \overrightarrow{AO} \wedge \vec{F}_A \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} -50 & -10 \\ 0 & -4.5 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A$

$$\vec{M}_A = \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.09 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -50 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ -4.5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

c- L'opérateur exerce en A, le torseur :

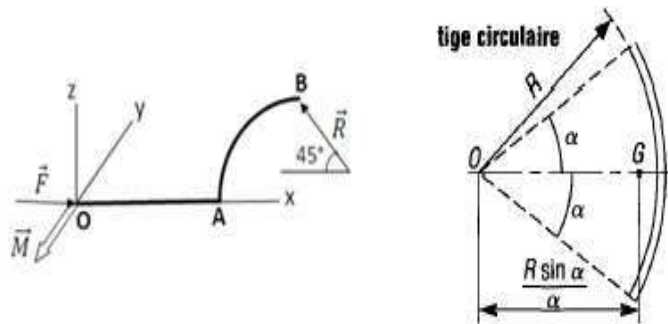
$$\{T\} = -\{T\}_A = \begin{Bmatrix} 50 & 10 \\ 0 & 4.5 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A$$

EXAMEN - 2012

Exercice 1

Une tige curviligne homogène OAB de masse m se trouvant dans le plan vertical (oxz), composée d'une tige droite OA de longueur L et d'une tige $\frac{1}{4}$ cercle AB de rayon r , est soumise en O à une force \vec{F} dirigée suivant l'axe (ox) et un moment \vec{M} dirigé suivant l'axe (oy). En B, la tige est soumise à une force \vec{R} faisant un angle de 45° avec l'axe horizontal.

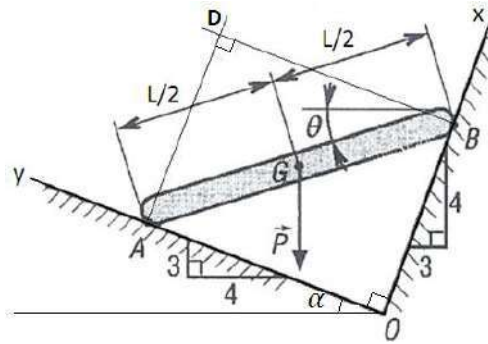
- 1- Calculer les coordonnées (X_G, Y_G, Z_G) du centre de gravité G de la tige OAB.
- 2- En supposant les coordonnées (X_G, Y_G, Z_G) connues, calculer le torseur résultant en O.
- 3- En déduire les efforts F, R et M quand la tige est en équilibre.



Exercice 2

Une tige AB de longueur L , de masse M et de centre de gravité G glisse sans frottement sur deux plans inclinés perpendiculaires entre eux. \vec{P} schématise le poids de la tige. Le mouvement de la tige AB est repéré par l'angle θ que fait cette dernière avec l'axe horizontal.

- 1- Exprimer dans le repère Oxyz la vitesse du point G.
- 2- Calculer le moment cinétique $\vec{\sigma}_G$ puis en déduire $\vec{\sigma}_D$.
D est un point tel que $(AD) \parallel (ox)$, et $(BD) \parallel (oy)$.
- 3- Calculer l'énergie cinétique de la tige et son énergie potentielle.
- 4- En déduire l'équation du mouvement ($\ddot{\theta} = f(\theta)$) en appliquant :
 - a- le théorème de l'énergie cinétique.
 - b- le théorème du moment cinétique appliqué au point D.
- 5- Déterminer la valeur de l'angle θ entraînant l'équilibre de la tige.
- 6- A l'équilibre, calculer en fonction de \vec{P} , les forces de réaction en A et B.



SOLUTION DE L'EXAMEN - 2012

Exercice 1

1- Coordonnées du centre de gravité G

La tige droite AB : $G_1 \begin{pmatrix} L/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $m_1 = \rho L$

La tige $\frac{1}{4}$ de cercle : $G_2 \begin{pmatrix} L + r - \frac{r \sin(\pi/4)}{\pi/4} \cos(\frac{\pi}{4}) \\ 0 \\ \frac{r \sin(\pi/4)}{\pi/4} \sin(\frac{\pi}{4}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L + r - \frac{2r}{\pi} \\ 0 \\ \frac{2r}{\pi} \end{pmatrix}$ et $m_2 = \rho \frac{\pi r}{2}$

$$X_G = \frac{m_1 X_{G_1} + m_2 X_{G_2}}{m_1 + m_2} = \frac{\frac{L^2}{2} + \frac{\pi r}{2} \left(L + r - \frac{2r}{\pi} \right)}{L + \frac{\pi r}{2}} \quad Y_G = 0 \quad Z_G = \frac{m_1 Z_{G_1} + m_2 Z_{G_2}}{m_1 + m_2} = \frac{\frac{\pi r}{2} \left(\frac{2r}{\pi} \right)}{L + \frac{\pi r}{2}}$$

2- Torseur résultant en O

Action en O :

$$\{T_1\}_O = \begin{Bmatrix} F & 0 \\ 0 & -M \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_O$$

Action en G :

$$\{T_2\}_G = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -P & 0 \end{Bmatrix}_G = \begin{Bmatrix} P & 0 \\ 0 & P X_G \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_O \quad \vec{M}_O = \vec{M}_G + \vec{OG} \wedge \vec{P} = \vec{0} + \begin{pmatrix} X_G \\ Y_G \\ Z_G \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ P X_G \\ 0 \end{pmatrix}$$

Action en B :

$$\{T_3\}_B = \begin{Bmatrix} -R\cos(45^\circ) & 0 \\ 0 & 0 \\ R\sin(45^\circ) & 0 \end{Bmatrix}_B = \begin{Bmatrix} -\frac{R}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & -\frac{R}{\sqrt{2}}(L+2r) \\ \frac{R}{\sqrt{2}} & 0 \end{Bmatrix}_O$$

$$\vec{M}_O = \vec{M}_B + \vec{OB} \wedge \vec{R} = \vec{0} + \begin{pmatrix} L+r \\ 0 \\ r \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -\frac{R}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{R}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{R}{\sqrt{2}}(L+2r) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Torseur résultant en O :

$$\{T\}_O = \{T_1\}_O + \{T_2\}_O + \{T_3\}_O = \begin{Bmatrix} F - \frac{R}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & PX_G - M - \frac{R}{\sqrt{2}}(L+2r) \\ \frac{R}{\sqrt{2}} - P & 0 \end{Bmatrix}_O$$

$$3- \quad \text{A l'équilibre } \{T\}_O = \{0\} \text{ d'où } \begin{cases} F = P = mg \\ R = P\sqrt{2} = mg\sqrt{2} \\ M = mg(X_G - L - 2r) \end{cases}$$

Exercice 2

$$1- \quad \vec{OG} = \begin{pmatrix} \frac{L}{2}\sin(\alpha + \theta) \\ \frac{L}{2}\cos(\alpha + \theta) \\ 0 \end{pmatrix}_{R_0} \quad \vec{v}_G = \left. \frac{d\vec{OG}}{dt} \right|_{R_0} = \frac{L}{2}\dot{\theta} \begin{pmatrix} \cos(\alpha + \theta) \\ -\sin(\alpha + \theta) \\ 0 \end{pmatrix}_{R_0}$$

$$2- \quad \vec{\sigma}_G = [J_G]\vec{\omega} = \frac{ml^2}{12}\dot{\theta}\vec{k}$$

$$\vec{\sigma}_D = \vec{\sigma}_G + m\vec{DG} \wedge \vec{v}_G = \vec{\sigma}_G - m\vec{OG} \wedge \vec{v}_G = \frac{ml^2}{3}\dot{\theta}\vec{k}$$

$$3- \quad E_c = \frac{1}{2}m\vec{v}_G^2 + \frac{1}{2}\vec{\omega}\vec{\sigma}_G = \frac{1}{6}mL^2\dot{\theta}^2$$

$$E_p = mg\frac{L}{2}\sin(2\alpha + \theta)$$

4- Théorème de l'énergie cinétique :

$$\frac{dE_c}{dt} = \vec{P} \cdot \vec{v}_G \text{ ou } E_c + E_p = \text{Cte} \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{6l}\cos(2\alpha + \theta) = 0$$

Théorème du moment cinétique cinétique :

$$\Sigma \vec{\mathcal{M}}_D = \overrightarrow{DG} \wedge \vec{P} = -\overrightarrow{OG} \wedge \vec{P} = - \begin{pmatrix} \frac{L}{2} \sin(\alpha + \theta) \\ \frac{L}{2} \cos(\alpha + \theta) \\ 0 \end{pmatrix}_{R_o} \wedge \begin{pmatrix} -P \cos(\alpha) \\ -P \sin(\alpha) \\ 0 \end{pmatrix} = -P \frac{L}{2} \cos(2\alpha + \theta) \vec{k}$$

$$\frac{d\vec{\sigma}_D}{dt} = \Sigma \vec{\mathcal{M}}_D \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{6l} \cos(2\alpha + \theta) = 0$$

5- A l'équilibre $\ddot{\theta} = 0 \Rightarrow \cos(2\alpha + \theta) = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} - 2\alpha = 0.2838 \text{ rad} = 16.3^\circ$

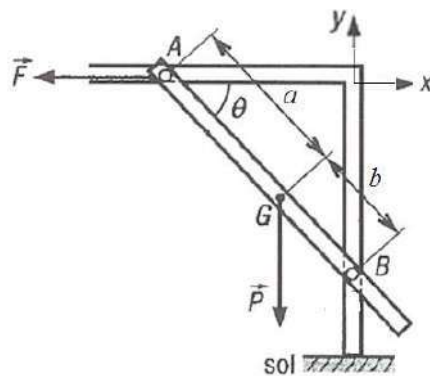
6- A l'équilibre : $\vec{R}_A + \vec{R}_B + \vec{P} = 0 \Rightarrow \begin{cases} R_A = P \cos \alpha = 0.8 P \\ R_B = P \sin \alpha = 0.6 P \end{cases}$

EXAMEN DE RATTRAPGE – 2012

Exercice

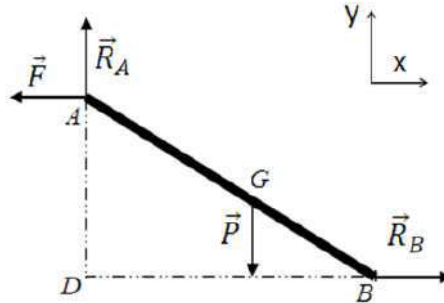
Une tige de masse M , de longueur l , de centre de gravité G coulisse sans frottements en A (glissière horizontale) et en B (glissière verticale) sous l'action de la charge \vec{F} appliquée au point A . \vec{P} schématise le poids de la tige.

- 1- (2pts) Tracer l'ensemble des forces s'exerçant sur la tige.
- 2- (2pts) Calculer par rapport au repère $oxyz$, la vitesse et l'accélération du point G .
- 3- (2pts) Calculer l'énergie cinétique E_c de la tige.
- 4- (2pts) Calculer la puissance de toutes les forces s'exerçant sur la tige.
- 5- (2pts) Calculer les forces de réaction en A et B .
- 6- En utilisant la relation entre les vitesses d'un solide,
 - a- (3pts) Montrer que les vitesses en A et B vérifient la relation d'équiprojectivité :
$$\vec{V}_A \overrightarrow{AB} = \vec{V}_B \overrightarrow{AB}$$
 - b- (1pt) Calculer \vec{V}_B pour $\theta = \frac{\pi}{6}$ et $V_A = 0.5 \text{ m/s}$
- 7- On suppose que la tige est en équilibre, calculer la valeur de l'angle θ en utilisant (prendre $F = P$, $b = 0.6 a$) :
 - a- (4 pts) Le théorème du moment cinétique.
 - b- (2 pts) Le théorème de l'énergie cinétique.



SOLUTION EXAMEN DE RATRAPAGE - 2012

1- Le glissement se fait sans frottement et par conséquent les forces de réaction sont perpendiculaires aux points d'appui A et B.



$$2- \overrightarrow{OG} = \begin{cases} -b \cos \theta \\ -a \sin \theta \end{cases} \quad \overrightarrow{V_G} = \begin{cases} b \dot{\theta} \sin \theta \\ -a \dot{\theta} \cos \theta \end{cases} \quad \overrightarrow{a_G} = \begin{cases} b \ddot{\theta} \sin \theta + b \dot{\theta}^2 \cos \theta \\ a \ddot{\theta} \cos \theta - a \dot{\theta}^2 \sin \theta \end{cases}$$

$$4- E_C = \frac{1}{2} M V_G^2 + \frac{1}{2} J_G \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} M \dot{\theta}^2 (b^2 \sin^2 \theta + a^2 \cos^2 \theta) + \frac{1}{24} M l^2 \dot{\theta}^2$$

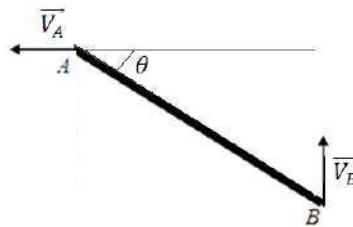
5-

$$4- \delta \mathcal{L} = \overrightarrow{P} \cdot \overrightarrow{V_G} + \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{V_A} + \overrightarrow{R_A} \cdot \overrightarrow{V_A} + \overrightarrow{R_B} \cdot \overrightarrow{V_B} = \overrightarrow{P} \cdot \overrightarrow{V_G} + \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{V_A} \text{ car } \overrightarrow{R_A} \perp \overrightarrow{V_A} \text{ et } \overrightarrow{R_B} \perp \overrightarrow{V_B}$$

$$\delta \mathcal{L} = \dot{\theta} \{ (a+b) F \sin \theta - a P \cos \theta \}$$

$$5- \overrightarrow{P} + \overrightarrow{F} + \overrightarrow{R_A} + \overrightarrow{R_B} = M \overrightarrow{a_G} \text{ Projection sur les axes : } \begin{cases} R_A = (g + b \dot{\theta}^2 \cos \theta + b \ddot{\theta} \sin \theta) M \\ R_B = F + M(a \dot{\theta}^2 \sin \theta - a \ddot{\theta} \cos \theta) \end{cases}$$

$$6- \overrightarrow{V_B} = \overrightarrow{V_A} + \overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{V_B} \cdot \overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{V_A} + \overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{AB}) \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{V_A} \cdot \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{AB}) \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{V_A} \cdot \overrightarrow{AB} \text{ car } (\overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{AB}) \perp \overrightarrow{AB}$$



$$V_B \cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = V_A \cos \theta, \quad V_B = \frac{V_A}{\tan \theta} = \frac{0.5}{\tan \frac{\pi}{6}} = 0.87 \text{ m/s}, \quad \overrightarrow{V_B} = 0.87 \vec{j} \text{ (m/s)}$$

7- a- Théorème du moment cinétique :

$$\frac{d\vec{\sigma}_D}{dt} = \sum \vec{M}_D = \overrightarrow{DA} \wedge \vec{F} + \overrightarrow{DG} \wedge \vec{P} + \overrightarrow{DA} \wedge \vec{R}_A + \overrightarrow{DB} \wedge \vec{R}_B = \{(a+b)F\sin\theta - aP\cos\theta\}\vec{k}$$

b- Théorème de l'énergie cinétique :

$$\frac{dE_C}{dt} = \wp = \dot{\theta} \{(a+b)F\sin\theta - aP\cos\theta\}$$

A l'équilibre on a : $\frac{dE_C}{dt} = 0$ et $\frac{d\vec{\sigma}_D}{dt} = 0$ d'où $(a+b)F\sin\theta - aP\cos\theta = 0$ soit $\text{tg}\theta = \frac{aP}{(a+b)F}$

A.N : $\text{tg}\theta = 0.625$ soit : $\theta = 32^\circ$

EXAMEN – 2013

EXERCICE 1

En utilisant le résultat de la figure 1, calculer le centre de gravité de la masse surfacique homogène donnée par la figure 2.

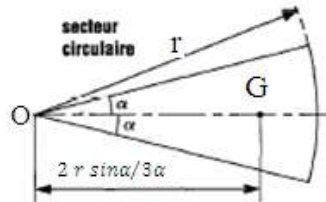


Figure1

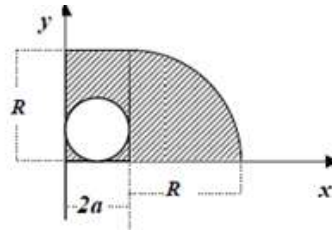
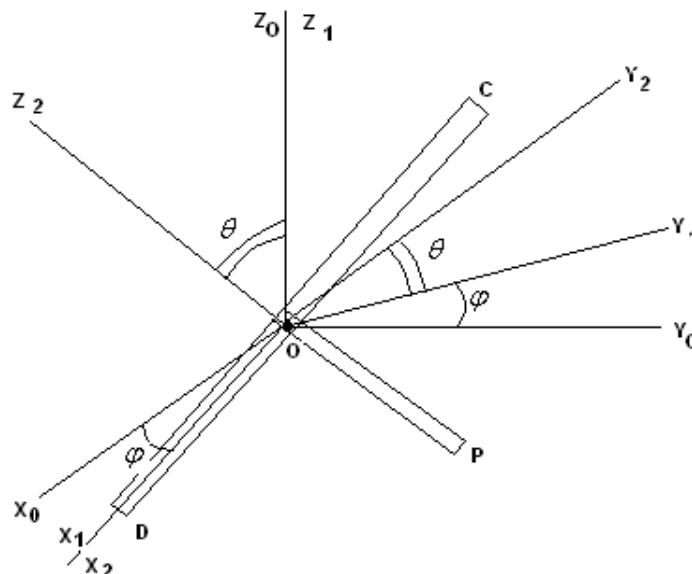


Figure 2

EXERCICE 2

Une barre CD de masse $2m$ et de longueur $2l$ tourne autour d'un axe vertical OZ_0 ou OZ_1 à la vitesse angulaire $\dot{\phi}$. La barre OP de masse m et de longueur l est soudée en O à CD et lui est perpendiculaire. Elle tourne autour de CD d'un angle θ . Sachant que le repère $R_0(O, X_0, Y_0, Z_0)$ est fixe, le repère $R_1(O, X_1, Y_1, Z_1)$ est un repère intermédiaire dont OX_1 est suivant CD, OZ_2 est suivant OP.

- 1- Exprimer dans le repère $R_2(O, X_2, Y_2, Z_2)$ la vitesse de rotation de la barre OP.
- 2- Déterminer la vitesse \vec{V}_P du point P en fonction de $\theta, \dot{\phi}, \dot{\theta}$ en dérivant le vecteur \overrightarrow{OP} .
- 3- En déduire l'accélération du point P
- 4- Calculer l'énergie cinétique de la barre CD
- 5- Calculer l'énergie cinétique de la barre OP



SOLUTION DE L'EXAMEN - 2013

Exercice 1

a) Le rectangle a pour surface $S_1 = 2aR$, son centre de gravité a pour coordonnées $G_1(a, \frac{R}{2})$

b) Le disque a pour surface $S_2 = \pi a^2$, son centre de gravité a pour coordonnées $G_2(a, a)$

c) Le quart du disque a pour surface $S_3 = \frac{\pi R^2}{4}$, son centre de gravité a pour coordonnées :

$$G_3 \begin{cases} 2a + \frac{2R \sin(\pi/4)}{3\pi/4} \cos(\pi/4) = 2a + \frac{4R}{3\pi} \\ \frac{2R \sin(\pi/4)}{3\pi/4} \sin(\pi/4) = \frac{4R}{3\pi} \end{cases}$$

d) Le centre de gravité du solide est :

$$x_G = \frac{m_1 x_{G1} - m_2 x_{G2} + m_3 x_{G3}}{m_1 - m_2 + m_3} = \frac{\sigma S_1 x_{G1} - \sigma S_2 x_{G2} + \sigma S_3 x_{G3}}{\sigma S_1 - \sigma S_2 + \sigma S_3}$$

$$y_G = \frac{m_1 y_{G1} - m_2 y_{G2} + m_3 y_{G3}}{m_1 - m_2 + m_3} = \frac{\sigma S_1 y_{G1} - \sigma S_2 y_{G2} + \sigma S_3 y_{G3}}{\sigma S_1 - \sigma S_2 + \sigma S_3}$$

$$x_G = \frac{2a^2 R - \pi a^3 + \frac{\pi R^2}{4} (2a + \frac{4R}{3\pi})}{2aR - \pi a^2 + \frac{\pi R^2}{4}} ; \quad y_G = \frac{2aR^2 - \pi a^3 + \frac{R^3}{3}}{2aR - \pi a^2 + \frac{\pi R^2}{4}}$$

Exercice 2

$$1- \vec{\omega}_{OP} = \vec{\omega}_{2/0} = \dot{\phi} \vec{k}_1 + \dot{\theta} \vec{i}_2 = \dot{\phi} (\vec{k}_2 \cos \theta + \vec{j}_2 \sin \theta) + \dot{\theta} \vec{i}_2 = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \sin \theta \\ \dot{\phi} \cos \theta \end{pmatrix}_{R_2}$$

$$2- \vec{OP} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -l \end{pmatrix}_{R_2}$$

$$\vec{V}_p = \left(\frac{d\vec{OP}}{dt} \right)_{R_0} = \left(\frac{d\vec{OP}}{dt} \right)_{R_2} + \vec{\omega}_{2/0} \wedge \vec{OP} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \sin \theta \\ \dot{\phi} \cos \theta \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -l\dot{\phi} \sin \theta \\ l\dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix}_{R_2}$$

$$3- \vec{a}_p = \left(\frac{d\vec{V}_p}{dt} \right)_{R_0} = \left(\frac{d\vec{V}_p}{dt} \right)_{R_2} + \vec{\omega}_{2/0} \wedge \vec{V}_p$$

$$\vec{a}_p = \begin{pmatrix} -l\ddot{\phi} \sin \theta - l\dot{\phi} \dot{\theta} \cos \theta \\ l\ddot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \sin \theta \\ \dot{\phi} \cos \theta \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -l\dot{\phi} \sin \theta \\ l\dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -l\ddot{\phi} \sin \theta - 2l\dot{\phi} \dot{\theta} \cos \theta \\ l\ddot{\theta} - l\dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta \\ l\dot{\theta}^2 + l\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}_{R_2}$$

$$4- T_{CD} = \frac{1}{2} \vec{\omega}_{CD} \vec{\sigma}_O(CD) = \frac{1}{2} \vec{\omega}_{CD} [J_O(CD)]_{X_1 Y_1 Z_1} \vec{\omega}_{CD} \text{ (on exprime tout dans le repère R1)}$$

$$T_{CD} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dot{\phi} \end{pmatrix} \frac{2m(2l)^2}{12} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} m l^2 \dot{\phi}^2$$

$$5- T_{OP} = \frac{1}{2} \vec{\omega}_{OP} \vec{\sigma}_O(OP) = \frac{1}{2} \vec{\omega}_{OP} [J_O(OP)]_{X_2 Y_2 Z_2} \vec{\omega}_{OP} \text{ (on exprime tout dans le repère R2)}$$

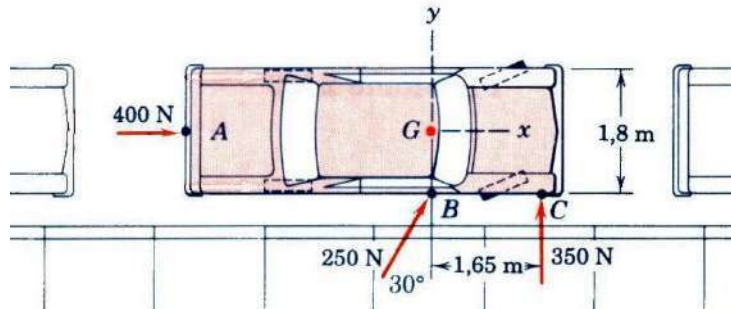
$$T_{OP} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \dot{\theta} & \dot{\phi} \sin \theta & \dot{\phi} \cos \theta \end{pmatrix} \frac{m l^2}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \sin \theta \\ \dot{\phi} \cos \theta \end{pmatrix} = \frac{m l^2}{6} (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \cos^2 \theta)$$

EXAMEN DE RATRAPAGE 2013

Exercice 1 (8 pts)

Pour dégager une voiture en panne prise entre 2 automobiles stationnées, 3 personnes exercent des actions aux points A, B et C.

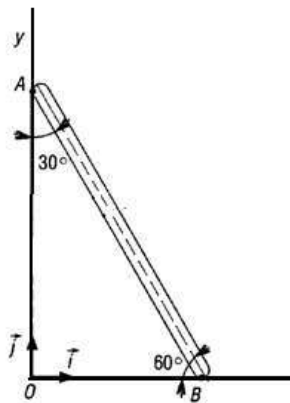
- Calculer le torseur résultant en G :



Exercice 2 (4 pts)

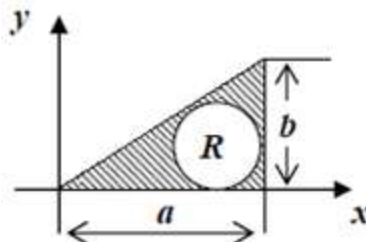
Soit une échelle de longueur AB qui glisse en A vers le bas à la vitesse de 0.5m/s.

- 1- Montrer que : $\vec{V}_A \vec{\omega} = \vec{V}_B \vec{\omega}$ ($\vec{\omega}$ est la vitesse de rotation de l'échelle).
- 2- En déduire la vitesse du point B.



Exercice 3 (8 pts)

Calculer les coordonnées du centre de gravité de la plaque surfacique homogène ci-dessous :



SOLUTION DE L'EXAMEN DE RATRAPAGE 2013

Exercice 1

La voiture est soumise à 3 torseurs :

$$\text{a) action en A : } \{T\}_1 = \begin{Bmatrix} \vec{F}_A \\ \vec{M}_A \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} 400 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} 400 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_G$$

$$\text{car } \vec{M}_G = \vec{M}_A + G\vec{A} \wedge \vec{F}_A = 0 \quad \text{car } \vec{F}_A // \vec{M}_A.$$

$$\text{b) action en B : } \{T\}_2 = \begin{Bmatrix} \vec{F}_B \\ \vec{M}_B \end{Bmatrix}_B = \begin{Bmatrix} 250 \sin 30 & 0 \\ 250 \cos 30 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_B = \begin{Bmatrix} 125 & 0 \\ 216.51 & 0 \\ 0 & 112.5 \end{Bmatrix}_G$$

$$\text{car } \vec{M}_G = \vec{M}_B + G\vec{B} \wedge \vec{F}_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -0.9 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 125 \\ 216.51 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.9 * 125 = 112.5 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) action en C : } \{T\}_3 = \begin{Bmatrix} \vec{F}_C \\ \vec{M}_C \end{Bmatrix}_C = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 350 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_C = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 350 & 0 \\ 0 & 577.5 \end{Bmatrix}_G$$

$$\text{car } \vec{M}_G = \vec{M}_C + G\vec{C} \wedge \vec{F}_C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1.65 \\ -0.9 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 350 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.65 * 350 = 577.5 \end{pmatrix}$$

Le torseur résultant en G est égal à :

$$\{T\}_G = \{T\}_1 + \{T\}_2 + \{T\}_3 = \begin{Bmatrix} 400 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_G + \begin{Bmatrix} 125 & 0 \\ 216.51 & 0 \\ 0 & 112.5 \end{Bmatrix}_G + \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 350 & 0 \\ 0 & 577.5 \end{Bmatrix}_G = \begin{Bmatrix} 525 & 0 \\ 566.51 & 0 \\ 0 & 690 \end{Bmatrix}_G$$

Exercice 2

$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AB}$. Multiplions par \overrightarrow{AB} les deux termes de l'équation précédente :

$$\vec{v}_B \overrightarrow{AB} = \vec{v}_A \overrightarrow{AB} + (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AB}) \overrightarrow{AB}$$

Or $(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AB}) \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ car $(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AB})$ est perpendiculaire à \overrightarrow{AB} .

$$\text{D'où : } \vec{v}_B \overrightarrow{AB} = \vec{v}_A \overrightarrow{AB}$$

$$\vec{v}_B \overrightarrow{AB} = \vec{v}_A \overrightarrow{AB}, \quad v_A \cos 30^\circ = v_B \cos 60^\circ, \quad v_B = v_A \cotan 30^\circ = 0.87 \text{ m/s}$$

Exercice 3

La partie triangulaire a pour surface $S_1 = \frac{ab}{2}$

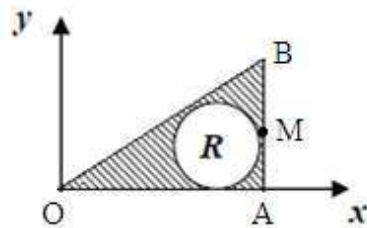
Son centre de gravité G_1 est tel que: $\overrightarrow{OG_1} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OM} = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} a \\ b/2 \end{pmatrix}$

La partie triangulaire a pour surface $S_2 = \pi R^2$

Son centre de gravité G_2 est tel que: $\overrightarrow{OG_2} = \begin{pmatrix} a - R \\ R \end{pmatrix}$

Si G est le centre de gravité de la plaque homogène, alors :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{S_1 \overrightarrow{OG_1} - S_2 \overrightarrow{OG_2}}{S_1 - S_2} = \left(\begin{array}{c} \frac{a^2 b}{3} - \pi R^2 (a - R) \\ \frac{2ab^2}{3} - \pi R^3 \end{array} \right) / \left(\frac{ab}{2} - \pi R^2 \right)$$

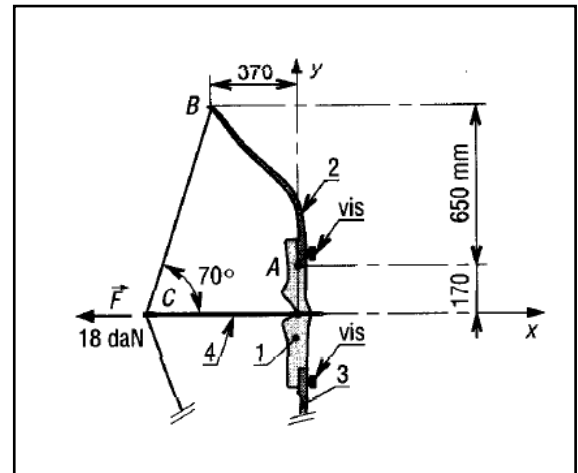


EXAMEN - 2014

Exercice 1

Un arc se compose de trois parties démontables (1), (2) et (3). Après assemblage par vis, l'ensemble est parfaitement solidaire. Si le tireur exerce un effort \vec{F} de 180 N sur la corde, calculer :

- 1- La tension \vec{T} appliquée par la corde en B sur la Partie (2) de l'arc.
- 2- Calculer le torseur exercé entre (1) et (2) au Point A.



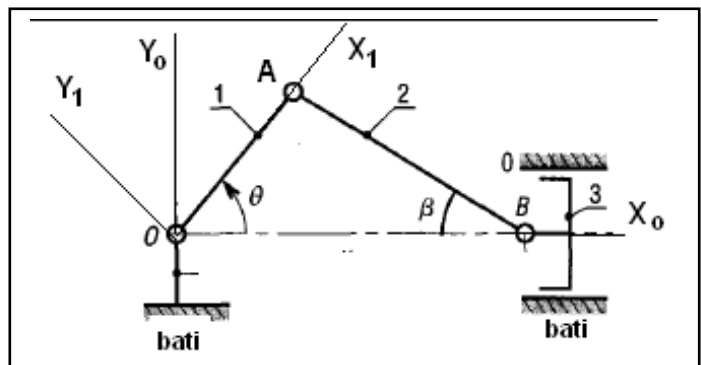
Exercice 2

Le système bielle-manivelle sert de base à de multiples appareils. Le mécanisme se compose d'une manivelle OA de masse M_1 articulée en O sur un bâti et en A sur la bielle AB. La bielle de masse M_2 est articulée en B sur le piston (3) animé d'un mouvement de translation rectiligne par rapport au bâti (direction ox). La manivelle OA possède une vitesse de rotation constante ω . Sachant que : $OA = 1$, $AB = \sqrt{3}$, $\theta = 60^\circ$.

- 1- Calculer la valeur de l'angle β

Calculer en fonction de ω :

- 2- la vitesse de rotation de la bielle AB.
- 3- la vitesse et l'accélération du point A.
- 4- la vitesse et l'accélération du centre de gravité G de la bielle.
- 5- l'énergie cinétique de la manivelle.
- 6- l'énergie cinétique de la bielle



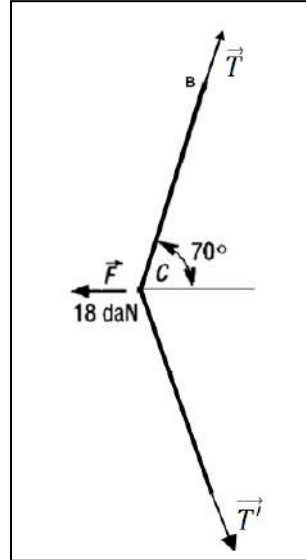
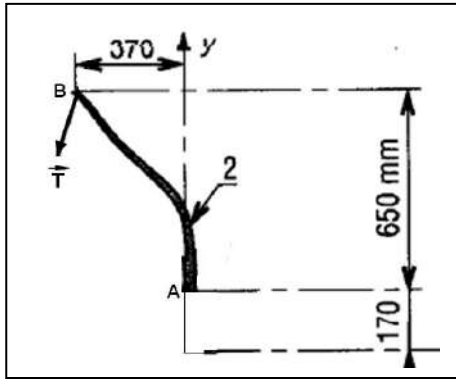
SOLUTION DE L'EXAMEN – 2014

EXERCICE 1

1- Isolons la corde et appliquons le principe de la statique ;

$$\vec{F} + \vec{T} + \vec{T}' = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} -F + T \cos 70^\circ + T' \cos 70^\circ = 0 \\ T \sin 70^\circ - T' \sin 70^\circ = 0 \end{cases}$$

$$T = T' = \frac{F}{2 \cos 70^\circ} = 263,14 \text{ N}$$



2- La partie (2) de l'arc est soumise à 2 torseurs :

a- le 1^{er} torseur $\{T_1\}_B$ est appliqué en B, il est dû à la tension de la corde

$$\{T_1\}_B = \begin{Bmatrix} \vec{T} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_B = \begin{Bmatrix} \vec{T} \\ \vec{M}_A \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} -T \cos 70^\circ \\ -T \sin 70^\circ \\ 0 \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} -90 \\ -247.27 \\ 0 \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} -90 & 0 \\ -247.27 & 0 \\ 0 & 150 \end{Bmatrix}_A$$

$$\vec{M}_A = \vec{M}_B + \vec{AB} \wedge \vec{T} = \vec{0} + \begin{pmatrix} -0.37 \\ 0.65 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -T \cos 70^\circ \\ -T \sin 70^\circ \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 150 \end{pmatrix}$$

b- le 2^{ème} torseur $\{T_2\}_A$ est appliqué en A, il est dû au contact avec la partie (1) de l'arc.

La partie (2) de l'arc est en statique, on a donc :

$$\{T_1\}_B + \{T_2\}_A = \{0\} \Rightarrow \{T_2\}_A = -\{T_1\}_B = \begin{Bmatrix} 90 & 0 \\ 247.27 & 0 \\ 0 & -150 \end{Bmatrix}_A$$

EXERCICE 2

1- Relation entre θ et β

$$AH = OA \sin \theta = AB \sin \beta$$

$$\sin \beta = \frac{OA}{AB} \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \sin 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \beta = 30^\circ$$

2- Vitesse de rotation de la bielle

$$\sin\beta = \frac{OA}{AB}\sin\theta \Rightarrow \dot{\beta}\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{3}}\dot{\theta}\cos\theta \Rightarrow \dot{\beta} = \frac{1}{\sqrt{3}}\omega \frac{\cos\theta}{\cos\beta} = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\omega}{3}$$

$$\vec{\omega}_{bielle} = -\dot{\beta}\vec{k}_1 = -\frac{\omega}{3}\vec{k}_1$$

3- Vitesse et accélération du point A

$$\vec{OA} = OA \vec{i}_1 \Rightarrow \vec{V}_A = \left(\frac{d\vec{OA}}{dt}\right)_{R_0} = \left(\frac{d\vec{OA}}{dt}\right)_{R_1} + \vec{\omega}_{R1/R0} \wedge \vec{OA} = \vec{\omega}_{R1/R0} \wedge \vec{OA}$$

$$\vec{V}_A = \omega \vec{k}_1 \wedge OA \vec{i}_1 = \omega OA \vec{j}_1 = \omega \vec{j}_1$$

$$\vec{V}_A = \omega \vec{j}_1$$

$$\vec{\gamma}_A = \left(\frac{d\vec{V}_A}{dt}\right)_{R_0} = \left(\frac{d\vec{V}_A}{dt}\right)_{R_1} + \vec{\omega}_{R1/R0} \wedge \vec{V}_A = \vec{\omega}_{R1/R0} \wedge \vec{V}_A = \omega \vec{k}_1 \wedge \omega \vec{j}_1$$

$$\vec{\gamma}_A = -\omega^2 \vec{i}_1$$

4- Vitesse et accélération du point G

$$\vec{V}_G = \vec{V}_A + \vec{\omega}_{bielle} \wedge \vec{GA}$$

Sachant que $\theta = 60^\circ$ et $\beta = 30^\circ$, cela implique que l'angle $\widehat{OAB} = 90^\circ$

Et par conséquent $\vec{GA} \parallel \vec{j}_1$

$$\vec{GA} = \frac{AB}{2} \vec{j}_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{j}_1$$

$$\vec{V}_G = \omega \vec{j}_1 - \frac{\omega}{3} \vec{k}_1 \wedge \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{j}_1$$

$$\vec{V}_G = \omega \left(-\frac{\sqrt{3}}{6} \vec{i}_1 + \vec{j}_1 \right)$$

$$\vec{\gamma}_G = \left(\frac{d\vec{V}_G}{dt}\right)_{R_0} = \left(\frac{d\vec{V}_G}{dt}\right)_{R_1} + \vec{\omega}_{R1/R0} \wedge \vec{V}_G = \vec{\omega}_{R1/R0} \wedge \vec{V}_G = \omega \vec{k}_1 \wedge \omega \left(-\frac{\sqrt{3}}{6} \vec{i}_1 + \vec{j}_1 \right)$$

$$\vec{\gamma}_G = -\omega^2 \left(\vec{i}_1 + \frac{\sqrt{3}}{6} \vec{j}_1 \right)$$

5- Energie cinétique de la manivelle

$$E_c = \frac{1}{2} \vec{\omega}_{manivelle} \vec{\sigma}_o(manivelle) = \frac{1}{2} \vec{\omega}_{manivelle} [J_o]_{x_1 y_1 z_1} \vec{\omega}_{manivelle}$$

$$E_c = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \omega \end{pmatrix} \frac{M_1 OA^2}{3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}$$

$$E_c = \frac{1}{6} M_1 \omega^2$$

6- Energie cinétique de la bielle

$$E_c = \frac{1}{2} M_2 V_G^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega}_{bielle} \vec{\sigma}_G(bielle) = \frac{1}{2} M_2 V_G^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega}_{bielle} [J_G]_{x_1 y_1 z_1} \vec{\omega}_{bielle}$$

$$E_c = \frac{1}{2} M_2 \left(\frac{13}{12} \omega^2 \right) + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\omega \end{pmatrix} \frac{M_2 AB^2}{12} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{\omega}{3} \end{pmatrix}$$

$$E_c = \frac{5}{9} M_2 \omega^2$$

EXAMEN DE RATRAPAGE DE PHYSIQUE4 - 2014

(Durée 90 mn Documents non autorisés)

Exercice 1 (5 pts)

Déterminer le torseur résultant au point A (Figure 1)

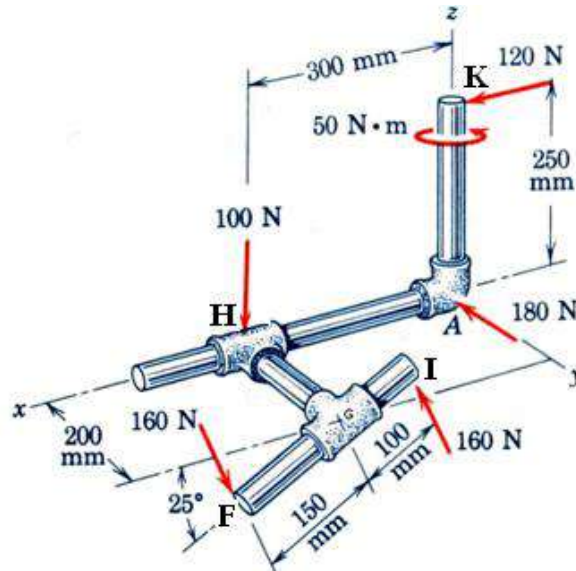


Figure 1

Exercice 2 (7 pts)

Une tige OA de masse M_1 et de longueur L , collée en A à un point matériel de masse M_2 , oscille dans le plan vertical (OX_0Y_0) (voir Figure 2).

- 1- Calculer l'énergie potentielle du point matériel et son énergie cinétique.
- 2- Calculer l'énergie potentielle de la tige OA et son énergie cinétique.
- 3- Calculer l'énergie mécanique totale E_p+T du système (Tige+point matériel)
- 4- En déduire la période des petites oscillations.

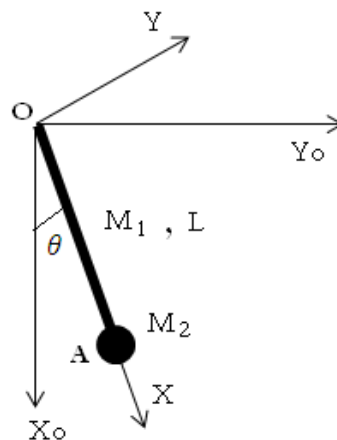


Figure 2

Exercice 3 (8 pts)

Le système bielle-manivelle de la Figure 3 se compose d'une manivelle OA articulée en O sur un bâti et en A sur la bielle AB. La bielle est articulée en B sur le piston (3) animé d'un mouvement de translation rectiligne par rapport au bâti (direction OX). La manivelle OA possède une vitesse de rotation ω . Sachant que $OA = 1$, $AB = \sqrt{2}$:

Calculer la valeur de l'angle θ pour laquelle $V_A = V_B$.

(V_A et V_B sont les modules des vitesses des points A et B)

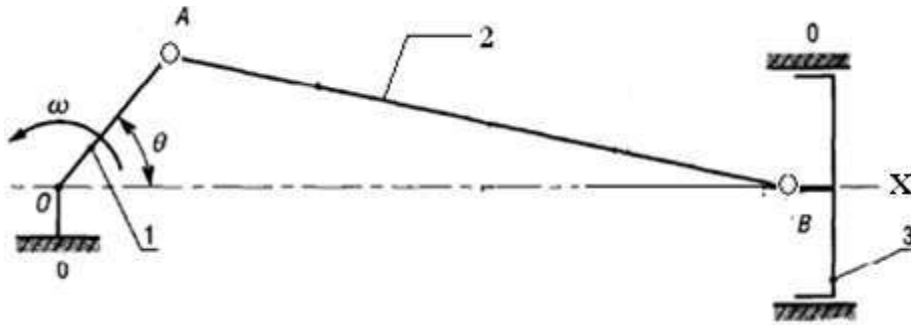


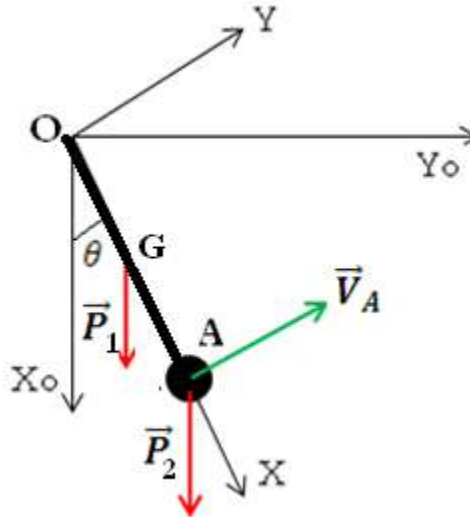
Figure 3 : Système bielle-manivelle

SOLUTION DE L'EXAMEN DE RATTRAPAGE – 2014

Exercice 1

Pour la solution de l'exercice 1, nous envoyons le lecteur avec la série de TD n°1.

Exercice 2



Point matériel

$$\overrightarrow{OA} = L \vec{X} \Rightarrow \vec{V}_A = L \dot{\theta} \vec{Y}$$

$$T_2 = \frac{1}{2} M_2 V_A^2 = \frac{1}{2} M_2 L^2 \dot{\theta}^2$$

$$E_{p2} = -M_2 g L \cos \theta$$

Tige OA

$$T_1 = \frac{1}{2} \vec{\omega} \vec{\sigma}_O(OA) = \frac{1}{2} \vec{\omega} [J_O]_{XYZ} \vec{\omega}$$

$$T_1 = \frac{1}{2} (0 \quad 0 \quad \dot{\theta}) \frac{M_1 L^2}{3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \frac{1}{6} M_1 L^2 \dot{\theta}^2$$

$$E_{p1} = -\frac{1}{2} M_1 g L \cos \theta$$

Tige+point matériel

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{6} M_1 L^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} M_2 L^2 \dot{\theta}^2 = \frac{1}{6} L^2 \dot{\theta}^2 (M_1 + 3M_2)$$

$$E_p = -\frac{1}{2} M_1 g L \cos \theta - M_2 g L \cos \theta = -\frac{1}{2} g L \cos \theta (M_1 + 2M_2)$$

Conservation de l'énergie mécanique totale :

$$T + E_p = \frac{1}{6} L^2 \dot{\theta}^2 (M_1 + 3M_2) - \frac{1}{2} g L \cos \theta (M_1 + 2M_2) = Cte$$

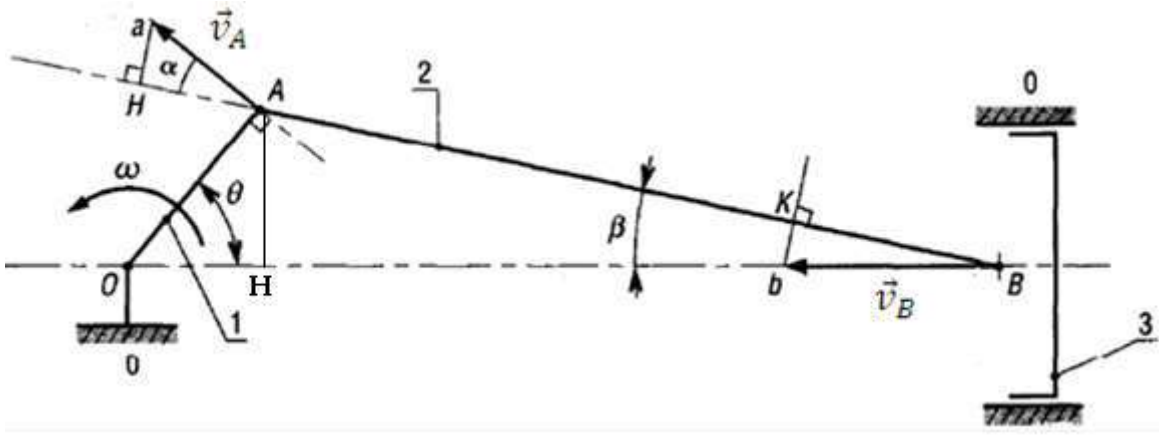
En dérivant par rapport au temps, nous obtenons :

$$\ddot{\theta} + \frac{3g(M_1 + 2M_2)}{2L(M_1 + 3M_2)} \sin \theta = 0$$

La période est petites oscillations est :

$$\lambda = 2\pi \sqrt{\frac{2L(M_1 + 3M_2)}{3g(M_1 + 2M_2)}}$$

Exercice 3



Considérons le solide AB (bielle), nous avons : $\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{\omega}_{AB} \wedge \overrightarrow{AB}$.

Multiplions par \overrightarrow{AB} les deux termes de l'équation précédente :

$$\vec{V}_B \overrightarrow{AB} = \vec{V}_A \overrightarrow{AB} + (\vec{\omega}_{AB} \wedge \overrightarrow{AB}) \overrightarrow{AB}$$

Or $(\vec{\omega}_{AB} \wedge \overrightarrow{AB}) \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ car $(\vec{\omega}_{AB} \wedge \overrightarrow{AB})$ est perpendiculaire à \overrightarrow{AB} , ce qui donne :

$$\vec{V}_B \overrightarrow{AB} = \vec{V}_A \overrightarrow{AB}$$

$$V_A AB \cos \alpha = V_B AB \cos \beta \quad \text{soit : } V_A \cos \alpha = V_B \cos \beta$$

D'après les propriétés des triangles, nous avons :

$$AH = OA \sin \theta = AB \sin \beta \quad \text{et} \quad \alpha + \beta + \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Nous obtenons le système de trois équations : } \begin{cases} V_A \cos \alpha = V_B \cos \beta & (1) \\ OA \sin \theta = AB \sin \beta & (2) \\ \alpha + \beta + \theta = \frac{\pi}{2} & (3) \end{cases}$$

$$\text{Si } V_A = V_B \text{ alors l'Eq. (1) donne } \alpha = \beta, \text{ on obtient alors : } \begin{cases} \sin \beta = \frac{OA}{AB} \sin \theta = \frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} & (4) \\ 2\beta = \frac{\pi}{2} - \theta & (5) \end{cases}$$

$$\text{L'éq(5) implique : } \cos 2\beta = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) = \sin \theta$$

D'après les relations trigonométriques : $\cos 2\beta = 1 - 2\sin^2\beta$

En identifiant les deux relations précédentes, nous obtenons :

$$1 - 2\sin^2\beta = \sin\theta$$

En remplaçant $\sin\beta$ par l'Eq (4), nous obtenons :

$$\sin^2\theta + \sin\theta - 1 = 0$$

La résolution de l'équation de second degré donne : $\sin\theta = 0.618$ ou $\sin\theta = -1.618$

La 2^{ème} valeur est à éliminer car $-1 \leq \sin\theta \leq 1$, d'où $\sin\theta = 0.618$

$$\theta = 38.17^\circ$$

Références

- 1- J.-Ph. Ansermet, « La Mécanique Rationnelle, Formation de base des scientifiques et des ingénieurs » version 2004/2005, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne
- 2- C. Conti, S. Boucher « Mécanique Rationnelle » Faculté Polytechnique de Mons
- 3- Ch. Duval, « Mécanique du solide et Mécanique analytique » 2008, Université de la Méditerranée (France)
- 4- J-L Fanchon, « GUID DE MECANIQUE » Edition Nathan, Paris 1996
- 5- A. Kadi, « Mécanique rationnelle, cours et exercices résolus » Université de Boumerdes
- 6- Mme Rahali, « Notes de cours de physique », Faculté de Technologie, Tlemcen