U.S.T.H.B
Faculté des Mathématiques
1ère année Licence SM

Examen Final de Maths 1

Coordination SM-ST du module MATHS I
Année universitaire 2019-2020
Durée: 01 h 15 mn

La calculatrice, l'effaceur et le téléphone portable sont strictement interdits

---

Exercice 1 (05 points)

1. Soit l'ensemble $A = \{f(x),\ x \in [1, e^2]\}$, où f est la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = E(\ln x)$. A est-il borné? Déterminer $\sup A$, $\inf A$, $\min A$ et $\max A$ s'ils existent.

2. Soit l'application g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = ch(x-1)$. Déterminer les images directes $g([0,1])$ et $g([0,2])$. g est-elle injective?

Exercice 2 (07 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \cos(\frac{\pi}{2}x) & \text{si } x < 1, \\ \arctan(x^3 - 1) & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer la fonction dérivée f' lorsque f est dérivable.
3. Montrer que f réalise une bijection de $[\sqrt[3]{2}, +\infty[$ sur un intervalle J à déterminer.

Exercice 3 (08 points)

1. On considère la fonction f définie sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ par $f(x) = \ln(1 + \sin x)$.
   a. Énoncer le Théorème de Taylor-Young.
   b. Calculer les dérivées successives f', f'' et $f^{(3)}$ de f.
   c. Écrire la formule de Taylor-Young à l'ordre 3 appliquée à f au voisinage de 0.
   d. Déduire la limite suivante:
   $$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin x) - x}{x^2}$$

2. Soit la fonction g définie par $g(x) = (1 + \sin x)^{\sqrt{1-x}}$.
   a. Déterminer le développement limité de la fonction g à l'ordre 2 au voisinage de 0 .
   b. Déduire l'équation de la tangente à la courbe (C) représentative de g au point $(0, g(0))$ ainsi que la position de la courbe (C) par rapport à cette tangente.

On donne les développements limités au voisinage de 0 suivants:

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2), \quad \ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2),$$

$$\sin x = x + o(x^2), \qquad \sqrt{1-x} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2).$$

2. Soit la fonction g définie par $g(x) = (1+\sin x)^{\sqrt{1-x}}$.
   a. Déterminer le développement limité de la fonction g à l'ordre 2 au voisinage de 0 .
   b. Déduire l'équation de la tangente à la courbe (C) représentative de g au point $(0, g(0))$ ainsi que la position de la courbe (C) par rapport à cette tangente.

On donne les développements limités au voisinage de 0 suivants:

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2), \quad \ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2),$$

$$\sin x = x + o(x^2), \quad \sqrt{1-x} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2).$$

Examen Final Maths 1 SM.

EX01: $A = \{ f(x),\ x \in [1, e^2] \}$

$f(x) = E(\ln x)$ E est croissant

$\ln 1 \leq \ln x \leq \ln e^2$ $\ln$ est croissant

$E(\ln 1) \leq E(\ln x) \leq E(\ln e^2) = E(2\ln e) = E(2)$

$E(0) \leq f(x) \leq E(2)$

$\boxed{0 \leq f(x) \leq 2}$

f bornée $\Rightarrow$ A borné $\Rightarrow$ $\sup A$ et $\inf A$ existent. comme f est croissante,

$\sup A = \max A = 2$

$\inf A = \min A = 0$

2 - $g(x) = ch(x-1)$ $D_g = \mathbb{R}$

(*) Pour $x \in [0,1]$, $g'(x) = Sh(x-1)$

comme $x \in [0,1]$, ~~x≤1~~ ≤

$0 \leq x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x-1 \leq 0$

donc $Sh(x-1) \leq 0$, d'où $\left[\begin{array}{l} Sh\,x > 0 \quad x > 0 \\ Sh\,x \leq 0 \text{ si } x \leq 0 \end{array} \right.$

x	0		1
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$	$ch\,1$	$\searrow$	$ch\,0 = 1$

$g([0,1]) = [ch\,0, ch\,1]$
$= [1, \frac{e+e^{-1}}{2}]$

(1)

Pour $x \in [1,2]$

$1 \leq x \leq 2$ $0 \leq x-1 \leq 1$

donc $x - 1 \geq 0$ et $g'(x) = Sh(x-1) \geq 0$

d'où

x	0		1		2
$g'(x)$		$-$		$+$	
$g(x)$	$ch\,1$	$\searrow$		$\nearrow$	$ch\,1$

2 - $g(x) = ch(x-1)$ $\quad D_g = \mathbb{R}$

* Pour $x \in [0,1]$, $g'(x) = Sh(x-1)$

comme $x \in [0,1]$, ~~$x \leq 1$~~

$0 \leq x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x-1 \leq 0$

donc $Sh(x-1) < 0$, d'où $\left[\begin{array}{l} Sh x > 0 \ x > 0 \\ Sh x \leq 0 \leq x \leq 0 \end{array}\right.$

x	0		1
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$	$ch\,1$	$\searrow$	$ch\,0 = 1$

$g([0,1]) = [ch\,0, ch\,1] = [1, \frac{e+e^{-1}}{2}]$ ①

Pour $x \in [1,2]$

$1 \leq x \leq 2$ $\quad 0 \leq x-1 \leq 1$

donc $x-1 \geq 0$ et $g'(x) = Sh(x-1) \geq 0$

d'où

x	0		1		2
$g'(x)$		$-$		$+$	
$g(x)$	$ch\,1$	$\searrow$	$ch\,0 = 1$	$\nearrow$	$ch\,1$

on sait que ch est paire donc $ch\,1 = ch\,1$

$g([0,2]) = [ch\,0, ch\,1] = [1, \frac{e+e^{-1}}{2}]$

on remarque que $g([0,1]) = g([1,2])$

et (Tableau de Variation)

$g(0) = g(2)$ alors que $0 \neq 2$

donc g non injective.

<u>EXO2</u>: $f(x) = \begin{cases} \cos\frac{\pi}{2}x & x < 1 \\ \operatorname{arctg}(x^3-1) & x \geq 1 \end{cases}$

* La continuité et dérivabilité sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

$\cos x$ continue dérivable sur $\mathbb{R}$ $\Rightarrow f$ continue dérivable sur $\mathbb{R} \setminus$

$\operatorname{arctg} x$ continue dérivable sur $\mathbb{R}$

x^3-1 // // //

Pour $x = 1$

Pour $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 1} f(x) = \lim\limits_{x \xrightarrow{<} 1} \cos\frac{\pi}{2}x = \cos\frac{\pi}{2} = 0 = f(1)$

donc f continue à gauche de 1

$= f(1)$

$\left\{ \text{arctg}\,(x^3-1) \quad x \geq \right.$

(*) La continuité et dérivabilité sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

$\cos x$ continue dérivable sur $\mathbb{R}$
arctg x continue dérivable sur $\mathbb{R}$ $\Rightarrow f$ continue dérivable sur $\mathbb{R}\setminus$
x^3-1 // // //

-2-

Pour $x = 1$

Pour $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} f(x) = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} \cos \frac{\pi}{2} x = \cos \frac{\pi}{2} = 0 = f(1)$

donc f continue à gauche de 1

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} f(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} \text{arctg}(x^3-1) = \text{arctg}\,0 = 0 = f(1)$

donc f est continue à droite de 1

$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} f(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} f(x) = f(1) \Rightarrow f$ continue en $x=1$

donc continue sur $\mathbb{R}$.

* La dérivabilité en $x = 1$

$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} \frac{\cos \frac{\pi}{2} x - 0}{x-1}$

on pose $y = x-1$
td $x \to 1, y \to 0$

$= \lim\limits_{y \to 0} \frac{\cos(\frac{\pi}{2} y + \frac{\pi}{2})}{y}$

$= \lim\limits_{y \to 0} - \frac{\sin \frac{\pi}{2} y}{y} = \lim\limits_{y \to 0} -\frac{\pi}{2} \frac{\sin \frac{\pi}{2} y}{\frac{\pi}{2} y} = -\frac{\pi}{2}$

$[\cos(\alpha+\frac{\pi}{2}) = -\sin\alpha]$

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} \frac{\text{arctg}(x^3-1) - 1}{x-1} = 3$

-3-

$\ldots = \ldots$

donc f non dérivable en $x = 1$

* Pour $x \neq 1$

$\left\{ -\frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} x \qquad x < 1 \right.$

$[\cos(\alpha+\pi) = -\sin\alpha]$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^{+}} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\arctan(x^3-1)-1}{x-1} = 3 \\ \end{cases}$$

-3-

$\ldots = 6 - 2 \ldots$

donc f non dérivable en $x = 1$

* Pour $x \neq 1$

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} x & x < 1 \\ \dfrac{3x^2}{1+(x^3-1)^2} & x > 1 \end{cases}$$

3- Pour $x \in [\sqrt[3]{2}, +\infty[$ $\quad (\sqrt[3]{2} > 1)$

$f(x) = \arctan(x^3-1)$

$\left.\begin{array}{l} f \text{ continue sur } [\sqrt[3]{2}, +\infty[\\ f' > 0 \text{ donc } f \text{ strictement croissante} \end{array}\right\} \Rightarrow f$

est bijective de $[\sqrt[3]{2}, +\infty[\to f([\sqrt[3]{2}, +\infty[)$

x	$\sqrt[3]{2}$		$+\infty$
f'		$+$	
f	$\arctan(2-1) = \arctan 1 = \pi/4$	$\nearrow$	$\pi/2$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \arctan(x^3-1) = \pi/2$

car $\arctan +\infty = \pi/2$

donc $J = [\pi/4, \pi/2[$

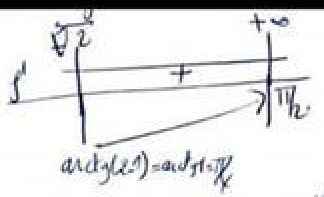
EXO3

$f(x) = \ln(1+\sin x)$

1) Énoncer le Thm de Taylor Young.

(Regardez le cours).

2) $f(x) = \ln(1+\sin x)$



$\lim\limits_{x \to +\infty} \arctg(x^3-1) = \pi/2$

car $\arctg +\infty$

donc $J = [\pi/4, \pi/2[$

Exo3

$f(x) = \ln(1+\sin x)$

1) Énoncer le Thm de Taylor Young.

(Regardez le cours).

2) $f(x) = \ln(1+\sin x)$

$f'(x) = \dfrac{\cos x}{1+\sin x}$ $\qquad f''(x) = -\dfrac{\sin x(1+\sin x) - \cos^2 x}{(1+\sin x)^2}$

$= -\dfrac{\sin x - (\sin^2 x + \cos^2 x)}{(1+\sin x)^2}$

$f''(x) = \dfrac{-(1+\sin x)}{(1+\sin x)^2} = -\dfrac{1}{1+\sin x}$

$f^{(3)}(x) = \dfrac{\cos x}{(1+\sin x)^2}$

3) Formule de Taylor Young à l'ordre 3

$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2} f''(0) + \frac{x^3}{6} f^{(3)}(0) + x^3 \varepsilon(x)$

$\varepsilon(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$

$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1 \quad f''(0) = -1 \quad f^{(3)}(0) = 1$

$\boxed{f(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \underbrace{x^3 \varepsilon(x)}_{x^3}}$

---

4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+\sin x) - x}{x^2}$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x) - x}{x^2}$

$\ldots x\,\varepsilon(x) = -\frac{1}{2}$

$$f^{(3)}(x) = \frac{\cos x}{(1+\sin x)^2}$$

(c) Formule de Taylor Young à l'ordre 3

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2} f''(0) + \frac{x^3}{6} f^{(3)}(0) + x^3 \varepsilon(x)$$

$\varepsilon(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$

$f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ $f''(0) = -1$ $f^{(3)}(0) = 1$

$$\boxed{f(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \underbrace{x^3 \varepsilon(x)}_{o(x^3)}}$$

- 5 -

(d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+\sin x) - x}{x^2}$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - x^2/2 + x^3/6 + x^3\varepsilon(x) - x}{x^2}$

$= \lim\limits_{x \to 0} -\frac{1}{2} + \frac{x}{6} + x\varepsilon(x) = -\frac{1}{2}$

(2) $g(x) = (1+\sin x)^{\sqrt{1-x}} = e^{\sqrt{1-x}\,\ln(1+\sin x)}$

$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$

$\ln(1+\sin x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ (question 1°)

$\sqrt{1-x}\,\ln(1+\sin x) = x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$

$= x - x^2 + o(x^2)$

$e^{\sqrt{1-x}\,\ln(1+\sin x)} = e^{x-x^2} = 1 + x - x^2 + \frac{1}{2}(x-x^2)^2 + o(x^2)$

$= 1 + x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$

$Y = 1 + x$ équation de la tangente au pt $(0, f(0))$

$f(x) - Y \sim -\frac{1}{2}x^2 < 0$ la courbe est au dessous de la tangente.

-6-