Université ...
Faculté de mathématiques et informatique
Département de mathématiques

05/02/2019
Durée 2h

Examen Final
A.N.1

Exercice 1 :

Considérons le schéma numérique suivant :

$$(*)\begin{cases} \left(\frac{4}{h^2}+\frac{k}{h}\right)u_{ij} - \left(\frac{1}{h^2}+\frac{k}{h}\right)u_{i-1j} - \frac{1}{h^2}u_{i+1j} - \frac{1}{h^2}u_{ij-1} - \frac{1}{h^2}u_{ij+1} = f_{ij}, \quad 1 \le i,j \le n \\ u_{i0} = u_{0j} = u_{in+1} = u_{n+1j} = 0 \end{cases}$$

où $k \in R_+$, $f \in C(\overline{\Omega})$, et $\Omega =]0,1[$.

1) Montrer que si $f_{ij} \le 0$, $\forall i,j \in \{1,...,n\}$ alors $u_{ij} \le \max_{l,m \in I}(u_{lm})$, $\forall i,j \in \{1,...,n\}$, tel que $I = \{(i,j),\ (ih,jh) \in \partial\Omega\}$.

2) Ecrire le schéma $(*)$ sous forme matricielle dans le cas $n = 2$, en explicitant la matrice et le second membre.

Exercice 2 :

Considérons la formulation variationnelle suivante :

$$(FV)\begin{cases} \text{Trouver } u \in H^1(\Omega) \text{ tel que} \\ a(u,w) = L(w)\ ,\ \forall w \in H^1(\Omega), \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} a(u,w) = \int_\Omega g(x)u'(x)w'(x)dx + \int_\Omega h(x)u(x)w(x)dx + \beta u(b)w(b) + \beta u(a)w(a), \\ L(w) = \int_\Omega f(x)w(x)dx, \end{cases}$$

$\Omega =]a,b[$, $0 < M_1 \le g(x) \le M_2 < +\infty$, p.p, $x \in \Omega$, $0 < m_1 \le h(x) \le m_2 < +\infty$, p.p, $x \in \Omega$, et $\beta \in R_+$.

1) Montrer que $|w(s)| \le c\|w\|_{H^1(\Omega)}$, pour tout $s \in [a,b]$, $w \in H^1(\Omega)$, tel que la constante $c > 0$ à déterminer.

2) Etudier l'existence et l'unicité de la solution de (FV).

3) On suppose que $(g,h,f) \in C^1(\overline{\Omega}) \times C(\overline{\Omega}) \times L^2(\Omega)$. Montrer que la solution du problème (FV) appartient à $H^2(\Omega)$ et vérifie les équations du problème (P) suivant :

$$(P)\begin{cases} -(g(x)u'(x))' + h(x)u(x) = f\ ,\quad x \in \Omega \\ g(b)u'(b) + \beta u(b) = 0 \\ -g(a)u'(a) + \beta u(a) = 0 \end{cases}$$

4) Dans le cadre d'une résolution par la méthode des éléments finis $P1$, on introduit le maillage de pas $h = \frac{b-a}{n+1}$ défini par les points $x_i = a + ih$, $i = 1,...,n+2$.

On considère l'espace des éléments finis $P1$ de Lagrange défini par :

$$E_h = \left\{ w_h \in C([a,b]),\ \text{tel que} : w_h\big|_{[x_i,x_{i+1}]} \in P1,\ i = 1,...,n+1 \right\}.$$

Ecrire la formulation variationnelle approchée $(FV)_h$ dans l'espace E_h. En déduire que la recherche de la solution de $(FV)_h$ revient à la résolution d'un système linéaire $A_h u_h = L_h$ à expliciter sans calcul.

Master 1
M.A et EDP

Exercice 1 : (5 + 6)

① Posons $M = \max\{U_{ij},\ i,j \in \{0, \dots, n+1\}\}$ et $m = \max\{w_{ij},\ (i,j) \in A\}$, tel que $A = \{0,1,\dots,n+1\}^2 \setminus \{1,\dots,n\}^2$. On a : $m \leq M$, montrons que $M \leq m$.

soit $B = \{(i,j) \in \{0, \dots, n+1\},\ w_{ij} = M\}$, et soit $(i_0, j_0) \in B$ tel que $i_0 = \min\{i,\ (i,j) \in B\}$ et $j_0 = \min\{j,\ (i_0,j) \in B\}$, alors on a deux cas :

1

- si $i_0 \in \{0, n+1\}$ ou $j_0 \in \{0, n+1\}$, alors $(i_0, j_0) \in A$ et donc $M = w_{i_0 j_0} \leq m$.
- si $i_0 \notin \{0, n+1\}$ et $j_0 \notin \{0, n+1\}$, donc $(i_0, j_0) \in \{1, \dots, n\}^2$, dans ce cas on

~~a : $\left(\frac{1}{h^2} + \frac{k}{h}\right)\left(U_{i_0 j_0} - U_{i_0+1 j_0}\right) + \frac{1}{h^2}\left(U_{i_0 j_0} - U_{i_0 j_0}\right) + \frac{1}{h^2}\left(U_{i_0 j_0} - U_{i_0 j_0 - 1}\right) + \frac{1}{h^2}\left(U_{i_0 j_0} - U_{i_0 j_0+1}\right) \leq 0$~~ 1

: qui est impossible car : $U_{i_0 j_0} - U_{i_0-1 j_0} > 0$, $U_{i_0 j_0} - U_{i_0+1 j_0} \geq 0$, $U_{i_0 j_0} - U_{i_0 j_0 -1} > 0$, et $U_{i_0 j_0} - U_{i_0 j_0+1} \geq 0$, $((i_0-1, j_0) \notin B)$. Donc $M \leq m$ ce qui entraîne $M = m$.

② Pour $n = 2$, le schéma est équivalent au système linéaire $AU = L$ tel que :

$$A = \begin{pmatrix} \left(\frac{4}{h^2} + \frac{k}{h}\right) & -\frac{1}{h^2} & -\frac{1}{h^2} & 0 \\ -\frac{1}{h^2} & \left(\frac{4}{h^2} + \frac{k}{h}\right) & 0 & -\frac{1}{h^2} \\ -\left(\frac{1}{h^2} + \frac{k}{h}\right) & 0 & \left(\frac{4}{h^2} + \frac{k}{h}\right) & -\frac{1}{h^2} \\ 0 & \frac{-1}{\left(\frac{1}{h^2} + \frac{k}{h}\right)} & -\frac{1}{h^2} & \left(\frac{4}{h^2} + \frac{k}{h}\right) \end{pmatrix},\ U = \begin{pmatrix} U_{11} \\ U_{12} \\ U_{21} \\ U_{22} \end{pmatrix},\ L \begin{pmatrix} f_{11} \\ f_{12} \\ f_{21} \\ f_{22} \end{pmatrix}$$

2 0,5 0,5

0,25

Exercice 2 :

① $\forall s \in [a,b]$, $\forall w \in H^1(]a,b[)$: $w(s) = \int_x^s w'(t)\,dt + w(x)$, ce qui entraîne :

$$|w(s)| \leq \left|\int_x^s w'(t)\,dt\right| + |w(x)| \overset{C.S}{\leq} \sqrt{b-a}\,\|w'\|_{L^2(\Omega)} + |w(x)|$$

0,5

$$\Rightarrow \int_a^b |w(s)|\,dx = |w(s)|(b-a) \leq (b-a)\sqrt{b-a}\,\|w'\|_{L^2(\Omega)} + \int_a^b |w(x)|\,dx$$

$$\overset{C.S}{\leq} (b-a)\sqrt{b-a}\,\|w'\|_{L^2(\Omega)} + \sqrt{b-a}\,\|w\|_{L^2(\Omega)}$$

0,5

d'où $|w(s)| \leq \left(\sqrt{b-a} + \frac{1}{\sqrt{b-a}}\right)\|w\|_{H^1(\Omega)}$, il suffit de prendre

$C = \sqrt{b-a} + \frac{1}{\sqrt{b-a}} > 0$

0,5

2) Il est clair que $a(\cdot,\cdot)$ est une forme bilinéaire et $L(\cdot)$ est une forme linéaire (par linéarité de l'intégrale).

- Montrons que $L(\cdot)$ est continue : on a : $\forall w \in H^1(\Omega)$

$$|L(w)| \overset{C.S}{\leq} \|f\|_{L^2(\Omega)} \left(\int_a^b |w(x)|^2 dx\right)^{1/2} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \left(\int_a^b (|w(x)|^2 + |w'(x)|^2) dx\right)^{1/2} = \|f\|_{L^2(\Omega)} \|w\|_{H^1(\Omega)}$$

0,5 0,5

d'où $L(\cdot)$ est bornée alors $L(\cdot)$ est continue. 0,5

- $a(\cdot,\cdot)$ est continue : $\forall v, w \in H^1(\Omega)$ on a :

$$|a(v,w)| \leq \left|\int_\Omega g(x) v'(x) w'(x) dx\right| + \left|\int_\Omega h(x) v(x) w(x) dx\right| + \left|\beta v(b) w(b)\right| + \left|\beta v(a) w(a)\right|$$

$$\overset{C.S}{\leq} M_2 \left(\int_\Omega |v'(x)|^2 dx\right)^{1/2} \left(\int_\Omega |w'(x)|^2 dx\right)^{1/2} + m_2 \left(\int_\Omega |v(x)|^2 dx\right)^{1/2} \left(\int_\Omega |w(x)|^2 dx\right)^{1/2} + \beta |v(b)||w(b)| + \beta |v(a)||w(a)|$$

0,5

$$\leq M_2 \|v\|_{H^1(\Omega)} \|w\|_{H^1(\Omega)} + m_2 \|v\|_{H^1(\Omega)} \|w\|_{H^1(\Omega)} + 2\beta \left(\sqrt{b-a} + \frac{1}{\sqrt{b-a}}\right)^2 \|v\|_{H^1(\Omega)} \|w\|_{H^1(\Omega)}$$

0,5

$$= C \|v\|_{H^1(\Omega)} \|w\|_{H^1(\Omega)}, \text{ avec } C = M_2 + m_2 + 2\beta \left(\frac{b-a+1}{\sqrt{b-a}}\right)^2 > 0.$$

0,5

$a(\cdot,\cdot)$ est bornée alors $a(\cdot,\cdot)$ est continue 0,5

$a(\cdot,\cdot)$ est coercive : $\forall v \in H^1(\Omega)$ on a :

$$a(v,v) = \int_\Omega g(x) v'(x)^2 + \int_\Omega h(x) v(x)^2 + \underbrace{\beta v(b)^2 + \beta v(a)^2}_{\geq 0}$$

$$\geq M_1 \int_\Omega v'(x)^2 + m_1 \int_\Omega v(x)^2 \geq \min(M_1, m_1) \int_\Omega v'(x)^2 + v(x)^2 = C\|v\|$$

0,5 0,5

avec $C = \min(M_1, m_1) > 0$, d'où $a(\cdot,\cdot)$ est coercive.

0,25

D'après le théorème de (L.M) le problème (FV) admet une unique solution

Intégrons le premier terme de $a(v,w)$ par partie on obtient :

$$-\int_\Omega (g(x) v'(x))' w dx + \int_\Omega h(x) v(x) w(x) dx + g(b) v'(b) w(b) - g(a) v'(a) w(a) + \beta v(b) w(b) + \beta v(a) w(a) =$$

0,5

- Pour $w \in D(\Omega)$ on a : $\int_\Omega \left(-(g(x) v'(x))' + h(x) v(x) - f(x)\right) w(x) = 0 \quad \forall w \in H^1(\Omega)$

0,5

$$\Rightarrow -(g(x) v'(x))' + h(x) v(x) - f(x) = 0, \text{ p.p, et on a } v'' \in L^2(\Omega)$$

0,5

d'où $v \in H^2(\Omega)$ et vérifie l'équation de (P)

Reste à vérifier que v satisfait les conditions aux limites :

On a : $g(b)\,u'(b)\,w(b) - g(a)\,u'(a)\,w(a) + \beta\, u(b)w(b) + \beta\, u(a)\,w(a) = 0$

$\forall w \in H^1(\Omega)$,

en prenant : $w(x) = x - a$ et $w(x) = b - x$ on obtient :

$$\begin{cases} g(b)\,u'(b) + \beta\, u(b) = 0 \\ -g(a)\,u'(a) + \beta\, u(a) = 0 \end{cases}$$

1)

a) Toute fonction $w_h \in E_h$ est entièrement déterminée par ses valeurs en $x_1, \dots, x_{n+2}$, ($\dim E_h = n+2$), soit $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n+2}\}$ une base de E_h, où $\varphi_i(x_j) = \delta_{ij}$, $i,j = 1, \dots, n+2$, il s'ensuit que

$$a(u_h, \varphi_k) = L(\varphi_k) \Rightarrow \sum_{i=1}^{n+2} a(\varphi_i, \varphi_k)\cdot u_{h,i} = L(\varphi_k), \text{ où } u_h = \sum_{i=1}^{n+2} u_{h,i}\varphi_i,$$

d'où : $(FV)_h$: $\begin{cases} \text{Trouver } u_{h,1}, u_{h,2}, \dots u_{h,n+2} \text{ tq} \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n+2} u_{h,i}\left[\int_\Omega [g(x)\,\varphi_i'(x)\,\varphi_k'(x) + h(x)\,\varphi_i(x)\,\varphi_k(x)]\,dx + \beta\,\varphi_i(b)\,\varphi_k(b) + \beta\,\varphi_i(a)\,\varphi_k(a)\right] = \int_\Omega f(x)\,\varphi_k(x)\,dx, \\ k = 1, \dots, n+2 \end{cases}$

Résoudre $(FV)_h$ revient à résoudre le système linéaire $A_h U_h = L_h$,

avec : $A_h = \left(a(\varphi_i, \varphi_k)\right)_{1 \le i,k \le n+2} = (a_{ki})_{1 \le i,k \le n+2}$, $U_h = (u_{h,i})_{1 \le i \le n+2}$, et

$L_h = \left(L(\varphi_k)\right)_{1 \le k \le n+2}$

b) La matrice A_h est tridiagonale, donc les composantes de A_h sont sous la forme :

- $a_{ii} = \displaystyle\int_{x_{i-1}}^{x_i} [g(x)\,\varphi_i'(x)^2 + h(x)\,\varphi_i(x)^2]\,dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} [g(x)\,\varphi_i'(x)^2 + h(x)\,\varphi_i(x)^2]\,dx$ $\quad 1 < i < n+2$
- $a_{11} = \displaystyle\int_{x_1 = a}^{x_2} [g(x)\,\varphi_1'(x)^2 + h(x)\,\varphi_1(x)^2]\,dx + \beta$
- $a_{n+2\,n+2} = \displaystyle\int_{x_{n+1}}^{x_{n+2} = b} [g(x)\,\varphi_{n+2}'(x)^2 + h(x)\,\varphi_{n+2}(x)^2]\,dx + \beta$

$H^s(\mathbb{R}^d)$ si e

La forme F e
Si F vérifie c

Théorè

$$a_{i\,i-1} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left[g(x)\,\varphi_i'(x)\,\varphi_{i-1}'(x) + h(x)\,\varphi_i(x)\,\varphi_{i-1}(x) \right] dx$$ 0,5

$$a_{i\,i+1} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[g(x)\,\varphi_i'(x)\,\varphi_{i+1}'(x) + h(x)\,\varphi_i(x)\,\varphi_{i+1}(x) \right] dx$$ 0,5 1

$$L(\varphi_i) = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,\varphi_i(x)\,dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,\varphi_i(x)\,dx$$ 0,5 $1 \leq$