



## E. F. S de Maths1

## Exercice1:(4,5 pts)

Soit  $f$  une application définie par:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow [1, +\infty[$$

$$x \mapsto f(x) = 1 + x^2$$

(1)  $f$  est-elle injective?(2) Montrer que  $f$  est surjective.(3) Déterminer les deux ensembles suivants:  $f([-1, 0])$  et  $f^{-1}([2, 5])$ .

## Exercice2:(4 pts)

En utilisant le Théorème des accroissements finis, démontrer que:

$$\forall x > 0: \frac{x}{1+x^2} < \operatorname{Arctg} x < x$$

## Exercice3:(6 pts)

(1) Montrer que

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \text{ au voisinage de } 0.$$

(2) Déterminer le développement limité au voisinage de 0 à l'ordre 3 pour chacune des deux fonctions réelles de la variable réelle suivantes:

(i)  $x \mapsto x \sin^2 x$

et

(ii)  $x \mapsto \ln(1 + \sin x)$

(3) En déduire les deux limites suivantes:

(a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x \sin^2 x}$

et

(b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - \ln(1+\sin x)}{x - \sin x}$

## Exercice4:(5,5 pts)

Soit l'application

$$f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y, z, t) \mapsto f(x, y, z, t) = x - 2y + t$$

(1) Montrer que  $f$  est linéaire.(2) Déterminer  $\ker f$ . En déduire  $\operatorname{Im} f$ .(3) L'application  $f$  est-elle injective? surjective?



19 جانفي 2020

Université Abdelhamid Ibn Badis de Mostaganem 2019/2020  
 Faculté des Sciences et de la Technologie 1<sup>ère</sup> année L.M.D S.T  
 Tronc Commun des Sciences Techniques Module: Maths1

### Corrigé de l'examen

#### Exercice1:(4,5 pts)

- 1)  $f$  n'est pas injective car il existe  $(-1), 1 \in \mathbb{R}$  tels que  $f(-1) = f(1)$  et  $-1 \neq 1$ . (0.25p) (0.25p) (0.25p)
- 2) Montrons que  $f$  est surjective.  
 Soit  $y \in [1, +\infty[$ . (0.25p)

$$y = f(x) \Rightarrow x^2 = y - 1 \quad (0.25p)$$

$$\Rightarrow |x| = \sqrt{y-1} \quad (0.25p)$$

$$\Rightarrow x = \pm \sqrt{y-1} \quad (0.25p)$$

Ainsi  $\forall y \in [1, +\infty[ : \exists x \in \mathbb{R} : y = f(x)$ . (0.25p)

$$3) \bullet f([-1, 0]) = \{f(x) / x \in [-1, 0]\} \quad (0.25p)$$

$$= \{f(x) / 0 \leq x^2 \leq 1\} \quad (0.25p)$$

$$= \{f(x) / 1 \leq 1 + x^2 \leq 2\} = [1, 2]. \quad (0.25p) \quad (0.25p)$$

$$\bullet f^{-1}([2, 5]) = \{x \in \mathbb{R} / f(x) \in [2, 5]\} \quad (0.25p)$$

$$= \{x \in \mathbb{R} / 1 < x^2 < 4\} \quad (0.25p)$$

$$= \{x \in \mathbb{R} / (x \in ]-\infty, -1[ \cup ]1, +\infty[) \wedge x \in ]-2, 2[ \} \quad (0.25p) \quad (0.25p)$$

$$= ]-2, -1[ \cup ]1, 2[. \quad (0.25p)$$

#### Exercice2:(4 pts)

On applique le Théorème des accroissements finis pour la fonction:

$f: t \mapsto f(t) = \text{Arctgt}$  sur l'intervalle  $[0, x]$  avec  $x > 0$ .

$$(0.25p) \quad (0.25p) \quad (0.25p)$$

La fonction  $f$  est continue sur  $[0, x]$  et dérivable sur  $]0, x[$ . Alors

$$(0.25p) \quad (0.25p)$$

$$\exists c \in ]0, x[ : f(x) - f(0) = f'(c)(x - 0)$$

$$(0.25p) \quad (0.25p) \quad (0.25p) \quad (0.25p)$$



19 جانفر 2020

$$D'où \forall x \in ]0, x[ : \operatorname{Arctg} x = \frac{x}{1+x^2}$$

$$(0.25p) \quad (0.25p)$$

$$D'autre part, \quad 0 < c < x \Rightarrow 0 < c^2 < x^2 \quad (0.25p)$$

$$\Rightarrow 1 < 1+c^2 < 1+x^2 \quad (0.25p)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+x^2} < \frac{1}{1+c^2} < 1 \quad (0.25p)$$

$$\Rightarrow \frac{x}{1+x^2} < \frac{x}{1+c^2} < x \quad (\text{car } x > 0) \quad (0.25p)$$

$$\text{Ainsi } \forall x > 0 : \frac{x}{1+x^2} < \operatorname{Arctg} x < x \quad (0.25p)$$

### Exercice3:(6 pts)

$$1) \text{ On a } \forall x \in ]-1, +\infty[ : (\ln(1+x))' = \frac{1}{1+x} \quad (0.25p)$$

$$\text{et } \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 + o(x^2) \text{ au voisinage de } 0. \quad (0.25p)$$

$$D'où \quad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \text{ au voisinage de } 0. \quad (0.25p)$$

$$2) (i) \text{ On a } \quad \sin x = x + o(x^2) \text{ au voisinage de } 0. \quad (0.25p)$$

$$\begin{aligned} \sin^2 x &= (x + o(x^2))(x + o(x^2)) \quad (0.25p) \\ &= x^2 + o(x^2) \text{ au voisinage de } 0. \quad (0.25p) \end{aligned}$$



D'où  $x \sin^2 x = x (x^2 + o(x^2)) = x^3 + o(x^3)$  au voisinage de 0. (0.25p)

(ii) On a  $\ln(1 + \sin x) = \ln(1 + u)$  avec  $u = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$  (0.25p)

$$= u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + o(u^3) \quad (0.25p)$$

$$u = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \Rightarrow u^2 = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) = x^2 + o(x^3) \quad (0.25p)$$

$$\Rightarrow u^3 = (x^2 + o(x^3)) \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) = x^3 + o(x^3) \quad (0.25p)$$

$$\text{D'où } \ln(1 + \sin x) = x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \quad (0.25p)$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \text{ au voisinage de 0. } (0.25p)$$

$$3)(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\overset{(0.25p)}{x \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)} - \overset{(0.25p)}{\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)}}{\underset{(0.25p)}{x^3 + o(x^3)}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\overset{(0.25p)}{-\frac{x^3}{3} + o(x^3)}}{x^3 + o(x^3)} = -\frac{1}{3} \quad (0.25p)$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x) - \ln(1 + \sin x)}{x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\overset{(0.25p)}{\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)} - \overset{(0.25p)}{\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)}}{\underset{(0.25p)}{x - \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)}}$$



$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{6} + o(x^3)}{\frac{x^3}{6} + o(x^3)} = 1 \quad (0.25p)$$

#### Exercice 4: (5, 5 pts)

1) Soient  $(x_1, y_1, z_1, t_1), (x_2, y_2, z_2, t_2) \in \mathbb{R}^4$  et  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . (0.25p)

$$\begin{aligned} f(\alpha \cdot (x_1, y_1, z_1, t_1) + \beta \cdot (x_2, y_2, z_2, t_2)) &= f(\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2, \alpha z_1 + \beta z_2, \alpha t_1 + \beta t_2) \quad (0.25p) \\ &= (\alpha x_1 + \beta x_2) - 2(\alpha y_1 + \beta y_2) + (\alpha t_1 + \beta t_2) \quad (0.25p) \\ &= \alpha(x_1 - 2y_1 + t_1) + \beta(x_2 - 2y_2 + t_2) \quad (0.25p) \\ &= \alpha f(x_1, y_1, z_1, t_1) + \beta f(x_2, y_2, z_2, t_2) \quad (0.25p) \end{aligned}$$

Ainsi  $f$  est linéaire.

$$\begin{aligned} 2) \ker f &= \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / f(x, y, z, t) = 0\} \quad (0.25p) \\ &= \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x = 2y - t\} \\ &= \{(2y - t, y, z, t) / (y, z, t) \in \mathbb{R}^3\} \quad (0.25p) \\ &= \{y \cdot (2, 1, 0, 0) + z \cdot (0, 0, 1, 0) + t \cdot (-1, 0, 0, 1) / (y, z, t) \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \text{Vect}\{(2, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (-1, 0, 0, 1)\} \quad (0.25p) \end{aligned}$$

Soient  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ .

$$\lambda_1 \cdot (2, 1, 0, 0) + \lambda_2 \cdot (0, 0, 1, 0) + \lambda_3 \cdot (-1, 0, 0, 1) = 0_{\mathbb{R}^4} \Rightarrow \begin{cases} 2\lambda_1 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \quad (0.25p)$$

Donc  $\{(2, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (-1, 0, 0, 1)\}$  est libre (0.25p) et par suite c'est une base de  $\ker f$  (0.25p) et  $\dim(\ker f) = 3$ . (0.25p)

On a  $\dim(\mathbb{R}^4) = \dim(\ker f) + \dim(\text{Im } f)$ . (0.25p)

$$\text{D'où } \dim(\text{Im } f) = \dim(\mathbb{R}^4) - \dim(\ker f) = 4 - 3 = 1. \quad (0.25p)$$

Comme  $\text{Im } f \subset \mathbb{R}$  et  $\dim(\text{Im } f) = \dim(\mathbb{R})$ , alors  $\text{Im } f = \mathbb{R}$ . (0.25p)

3) Comme  $\ker f \neq \{0_{\mathbb{R}^4}\}$  (0.25p), alors  $f$  n'est pas injective. (0.25p)

Comme  $\text{Im } f = \mathbb{R}$  (0.25p), alors  $f$  est surjective. (0.25p)