U.S.T.H.B
Faculté des Mathématiques
1ère année Licence ST

Coordination SM-ST du module MATHS I
Année universitaire 2019-2020
Vague 1

Corrigé de l'épreuve finale

Exercice 1. (6 points)

1. Soit la fonction f définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{cos(x)}$.

   (a) **Déterminer $f([0, \frac{\pi}{2}])$, $f([\frac{-\pi}{2}, 0])$ et $f^{-1}(\{3\})$.**

   $$f([0, \frac{\pi}{2}]) = \left\{ f(x) \mid x \in [0, \frac{\pi}{2}] \right\}.$$

   Comme la fonction $x \mapsto cos(x)$ est continue et décroissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, alors on a

   $$\begin{aligned} 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \quad &\Rightarrow \quad cos(\frac{\pi}{2}) \leq cos(x) \leq cos(0), \\ &\Rightarrow \quad e^{cos(\frac{\pi}{2})} \leq e^{cos(x)} \leq e^{cos(0)} \\ &\Rightarrow \quad 1 \leq e^{cos(x)} \leq e. \end{aligned}$$

   D'où, $f([0, \frac{\pi}{2}]) = [1, e]$. **(0.5pt)**

   $$f([\frac{-\pi}{2}, 0]) = \left\{ f(x) \mid x \in [\frac{-\pi}{2}, 0] \right\}.$$

   La fonction $x \mapsto cos(x)$ est continue et croissante sur $[\frac{-\pi}{2}, 0]$, alors

   $$\begin{aligned} \frac{-\pi}{2} \leq x \leq 0 \quad &\Rightarrow \quad cos(\frac{-\pi}{2}) \leq cos(x) \leq cos(0), \\ &\Rightarrow \quad e^{cos(\frac{-\pi}{2})} \leq e^{cos(x)} \leq e^{cos(0)} \\ &\Rightarrow \quad 1 \leq e^{cos(x)} \leq e. \end{aligned}$$

   D'où, $f([\frac{-\pi}{2}, 0]) = [1, e]$. **(0.5pt)**

   $$f^{-1}(\{3\}) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in \{3\}\}.$$

   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $cos(x) \leq 1 \Rightarrow e^{cos(x)} \leq e < 3$. D'où, l'équation $f(x) = 3$ n'admet pas de solution. Ainsi,

   $$f^{-1}(\{3\}) = \emptyset. \quad \textbf{(0.5pt)}$$

   (b) **f est-elle injective, surjective ?**

   f n'est pas injective car il existe $x_1 = \frac{-\pi}{2}$ et $x_2 = \frac{\pi}{2}$ tels que $x_1 \neq x_2$ et $f(x_1) = f(x_2) = 1$. **(0.5pt)**

   f n'est pas surjective car il existe $y = 3$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \neq 3$. **(0.5pt)**

2. **Dire si la proposition suivante est vraie ou fausse, justifier : $arcsin(sin(\pi)) = \pi$.**

   La proposition est fausse car $arcsin(sin(\pi)) = arcsin(0) = 0 \neq \pi$. **(1pt)**

   Remarque. La propriété $arcsin(sin(x)) = x$ est vraie uniquement si $x \in [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

3. **Soit** $A = \{x \in \mathbb{R},\ x^2+1 < 5\ et\ |x-2| \geq 3\}$**. Déterminer** $SupA$**,** $InfA$**,** $MinA$ **et** $MaxA$**.**

   A est l'ensemble des réels vérifiant les relations $x^2+1<5$ et $|x-2| \geq 3$ simultanément. On a

$$x^2+1<5 \Rightarrow -2<x<2 \Rightarrow x \in]-2,2[. \quad \textbf{(0.5pt)}$$

   et

$$\begin{aligned} |x-2| \geq 3 &\Rightarrow (|x-2|)^2 \geq 9 \\ &\Rightarrow x^2-4x+5 \geq 9 \\ &\Rightarrow (x-5)(x+1) \geq 0 \\ &\Rightarrow x \in]-\infty,-1] \cup [5,+\infty[. \quad \textbf{(0.5pt)} \end{aligned}$$

   Donc, $A =]-2,2[\cap (]-\infty,-1] \cup [5,+\infty[) =]-2,-1]$. **(0.5pt)**

Ainsi, $Inf(A) = -2$, le $Min(A)$ n'existe pas car $-2 \notin A$ et -1 est un majorant de A et $-1 \in A$ d'où, $Sup(A) = Max(A) = -1$. **(1pt)**

Exercice 2. (8 points)

Soit $a \in]0,1]$. On considère la fonction f définie par

$$f(x) = arcsin(\sqrt{a-x^2}).$$

1. **Déterminer le domaine de définition de** f**.**

$$D_f = \{x \in \mathbb{R}|\ a-x^2 \geq 0\ et\ -1 \leq \sqrt{a-x^2} \leq 1\}.$$

   On a :

$$a-x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq a \Rightarrow -\sqrt{a} \leq x \leq \sqrt{a}.$$

   D'autre part, on a

$$\begin{aligned} -1 \leq \sqrt{a-x^2} \leq 1 &\Rightarrow 0 \leq \sqrt{a-x^2} \leq 1 \\ &\Rightarrow 0 \leq a-x^2 \leq 1 \\ &\Rightarrow -a \leq -x^2 \leq 1-a \\ &\Rightarrow a-1 \leq x^2 \leq a, \end{aligned}$$

   comme $a-1<0$, alors $0 \leq x^2 \leq a \Rightarrow -\sqrt{a} \leq x \leq \sqrt{a}$.

   D'où, le domaine de définition de f est $[-\sqrt{a},\sqrt{a}]$. **(1pt)**

2. **Etudier la continuité de** f **sur son domaine de définition.**

   La fonction f est la composée de la fonction $x \mapsto \sqrt{a-x^2}$ continue sur $[-\sqrt{a},\sqrt{a}]$ par la fonction $x \mapsto arcsin(x)$ continue sur $[-1,1]$ donc $x \mapsto arcsin(\sqrt{a-x^2})$ est continue $[-\sqrt{a},\sqrt{a}]$. **(1pt)**

3. **Déterminer les valeurs de a pour lesquelles la fonction f est dérivable en 0.**

f est dérivabale en 0 si et seulement si $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$ existe et est finie.

$$\lim_{x\to 0}\frac{arcsin(\sqrt{a-x^2})-arcsin(\sqrt{a})}{x} \text{ est une forme indéterminée } \frac{0}{0}.$$

Pour lever la forme indéterminée, on applique la régle de l'Hopital.

Soient

$$\begin{cases} g(x)=arcsin(\sqrt{a-x^2})-arcsin(\sqrt{a}) \Rightarrow g'(x)=\frac{-x}{\sqrt{a-x^2}\sqrt{1-a+x^2}}, \\ h(x)=x \Rightarrow h'(x)=1 \end{cases} \qquad \textbf{(0.5pt)}$$

D'où,

(i) Si $a\neq 1$ alors

$$\lim_{x\to 0}\frac{-x}{\sqrt{a-x^2}\sqrt{1-a+x^2}}=0 \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{arcsin(\sqrt{a-x^2})-arcsin(\sqrt{a})}{x}=0. \quad \textbf{(0.5pt)}$$

(ii) Si $a=1$ alors

$$\lim_{x\to 0}\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{|x|\sqrt{1-x^2}}$$

donc,

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{-x}{x\sqrt{1-x^2}}=-1 \quad \textbf{(0.5pt)} \quad et \quad \lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{-x\sqrt{1-x^2}}=1. \quad \textbf{(0.5pt)}$$

D'où, pour $a=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$ n'existe pas.

Ainsi, f est dérivable en 0 pour tout $a\in]0,1[$. **(1pt)**

4. **On pose $a=\frac{1}{2}$.**

   (a) **Montrer que l'équation $f(x)=\frac{\pi}{6}$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[0,\frac{1}{\sqrt{2}}]$.**

   Soit $g: x\mapsto f(x)-\frac{\pi}{6}$. La fonction g est continue sur l'intervalle $[0,\frac{1}{\sqrt{2}}]$. **(0.5pt)**

   De plus, on a

$$\begin{aligned} g(0) &= f(0)-\frac{\pi}{6}=arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{12}. \quad \textbf{(0.5pt)} \\ g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) &= f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-\frac{\pi}{6}=arcsin(0)-\frac{\pi}{6}=\frac{-\pi}{6}. \quad \textbf{(0.5pt)} \end{aligned}$$

   d'où, $g(0)\cdot g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)<0$, d'après le Théorème des valeurs intermédiare, il exite au moins un $c\in]0,\frac{1}{\sqrt{2}}[$ tel que $g(c)=0$, d'ù $f(c)=\frac{\pi}{6}$. **(0.5pt)**

   (b) **Résoudre l'équation $f(x)=\frac{\pi}{6}$ dans l'intervalle $[0,\frac{1}{\sqrt{2}}]$.**

On a :

$$arcsin\left(\sqrt{\frac{1}{2}-x^2}\right)=\frac{\pi}{6} \;\Rightarrow\; sin\left(arcsin\left(\sqrt{\frac{1}{2}-x^2}\right)\right)=sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$$
$$\Rightarrow\; \sqrt{\frac{1}{2}-x^2}=\frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow\; \frac{1}{2}-x^2=\frac{1}{4}$$
$$\Rightarrow\; x^2=\frac{1}{4}$$
$$\Rightarrow\; x=\pm\frac{1}{2}$$

comme $\frac{-1}{2}\notin[0,\frac{1}{\sqrt{2}}]$ alors la solution est $\{\frac{1}{2}\}$. **(1pt)**

Exercice 3. (6 points)

On considère la fonction f définie pour tout $x\in]\frac{-\pi}{2},0[\cup]0,\frac{\pi}{2}[$ par

$$f(x)=\frac{ln(1+shx)}{thx}.$$

1. **Calculer le développement limité de f au voisinage de 0 à l'ordre 2.**

On a : $sh(x)=x+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)$. Donc

$$ln(1+shx)=ln(1+x+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)),$$

posons le changement de variable $t=x+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)$ avec $t\to 0$ quand $x\to 0$ et on utilise le DL :

$$ln(1+t)=t-\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{3}t^3+o(t^3),$$

on obtient,

$$ln(1+shx)=x+\frac{1}{3}x^6+o(x^3)-\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)\right)^2+\frac{1}{3}\left(x+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)\right)^3+o(x^3).$$

Ensuite, on développe l'expression en ne gardant que les monômes de degré inférieurs ou égals à 3, on obtient

$$ln(1+shx)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x^3+o(x^3).\quad \textbf{(1pt)}$$

Alors,

$$f(x)=\frac{x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x^3+o(x^3)}{x-\frac{1}{3}x^3+o(x^3)}=\frac{1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}{1-\frac{1}{3}x^2+o(x^2)}\quad \textbf{(0.5pt)}$$

Pour calculer le DL du quotient $\frac{1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}{1-\frac{1}{3}x^2+o(x^2)}$, on effectue la division suivant les puissances croissantes

$$\begin{array}{ccc|ccc}
1 & -\frac{1}{2}x & +\frac{1}{2}x^2 & 1 & -\frac{1}{3}x^2 & \\ \cline{4-6}
-1 & & \frac{1}{3}x^2 & 1 & -\frac{1}{2}x & +\frac{5}{6}x^2 \\ \cline{1-3}
 & -\frac{1}{2}x & \frac{5}{6}x^2 & & & \\
 & \frac{1}{2}x & & & & \\ \cline{1-3}
 & & \frac{5}{6}x^2 & & &
\end{array}$$

d'où,

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{5}{6}x^2 + o(x^2). \quad \textbf{(2pt)}$$

2. **Déduire que f est prolongeable par continuité en 0.**

   Du développement limité de f, on déduit que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$. Ainsi, on peut prolonger f par continuité en 0. **(1pt)**

3. **Notons $\widetilde{f}$ le prolongement de f en 0.**

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } x \in]\frac{-\pi}{2}, 0[\cup]0, \frac{\pi}{2}[\\ 1, & \text{si } x = 0. \end{cases} \quad \textbf{(0.5pt)}$$

   De la question (1), on déduit que la courbe $\mathcal{C}_{\widetilde{f}}$ admet au point $(0, \widetilde{f}(0))$ une tangente d'équation $y = 1 - \frac{1}{2}x$. **(0.5pt)**

   La position de la tangente par rapport à la courbe de $\widetilde{f}$: On a $\widetilde{f}(x) - y \sim \frac{5}{6}x^2$, alors $\widetilde{f}(x) - y$ est positive au voisinage de 0. On déduit que, la courbe de $\mathcal{C}_{\widetilde{f}}$ est au-dessus de sa tangent en $(0, \widetilde{f}(0))$. **(0.5pt)**