Corrigé de l'épreuve de rattrapage

Exercice 1(5 points)

1. **Résoudre dans son domaine de définition l'équation suivante :** $\ln(x+2)+\ln(x+3)=\ln(x+5)$.

L'équation est bien définie si

$$\begin{aligned} x+2>0 &\Rightarrow x\in]-2,+\infty[,\\ x+3>0 &\Rightarrow x\in]-3,+\infty[,\\ x+5>0 &\Rightarrow x\in]-5,+\infty[\qquad \textbf{(1pt)} \end{aligned}$$

D'où $D=]-2,+\infty[\cap]-3,+\infty[\cap]-5,+\infty[=]-2,+\infty[$.

$\ln(x+2)+\ln(x+3)=\ln(x+5) \Rightarrow \ln[(x+2)(x+3)]=\ln(x+5)$
$\Rightarrow (x+2)(x+3)=(x+5)$
$\Rightarrow x^2+4x+1=0.$ **(0.5pt)**
On a $\Delta=12$, donc $x_1=-2-\sqrt{3}\notin]-2,+\infty[$ *et* $x_2=-2+\sqrt{3}\in]-2,+\infty[$.
D'où l'ensemble des solutions est $S=\{-2+\sqrt{3}\}$. **(1pt)**

2. **Calculer la limite suivante :** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}E\left(x-\frac{1}{x}\right)+2\right]$.

On a pour tout $t\in\mathbb{R}$, $t-1<E(t)\leq t$, d'où pour $x\in\mathbb{R}^*$, on a

$$\begin{aligned} x-\frac{1}{x}-1<E(x-\frac{1}{x})\leq x-\frac{1}{x}\\ 1-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}<\frac{1}{x}E(x-\frac{1}{x})\leq 1-\frac{1}{x^2}\\ 3-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}<\frac{1}{x}E(x-\frac{1}{x})+2\leq 3-\frac{1}{x^2} \qquad \textbf{(1pt)} \end{aligned}$$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3-\frac{1}{x^2}\right)=3$, alors on obtient par passage a la limite dans la double inégalité :

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}E\left(x-\frac{1}{x}\right)+2\right]=3. \quad \textbf{(0.5pt)}$$

3. **Donner la contraposée de la proposition suivante :** $-1\leq x\leq 1\Rightarrow |x|\leq 1$.

On a la contraposée de $P\Rightarrow Q$ est $\overline{Q}\Rightarrow\overline{P}$, alors la contraposée de $-1\leq x\leq 1\Rightarrow |x|\leq 1$ est $|x|>1\Rightarrow x<-1$ ou $x>1$. **(1pt)**

Exercice 2(4 points)

1. **En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que :** $\forall x\in]1,+\infty[$**, on a**

$$\frac{x-1}{1+x^2}<\arctan(x)-\arctan(1)<\frac{1}{2}(x-1).$$

On applique le théorème des accroissement finis à la fonction $x \longmapsto f(x) = \arctan x$ sur l'intervalle $[1, x]$. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, en particulier sur $[1, x]$ et elle est dérivable sur $\mathbb{R}$, en particulier sur $]1, x[$. **(1pt)**

Alors d'après le théorème des accroissements finis il existe un $c \in]1, x[$ tel que

$$f(x) - f(1) = (x-1)f'(c) \Longleftrightarrow \frac{\arctan x - \arctan 1}{x-1} = \frac{1}{1+c^2} \quad \textbf{(0,5pt)}$$

D'autre part

$$\begin{aligned} 1 < c < x &\Rightarrow 1 < c^2 < x^2 \\ &\Rightarrow \frac{1}{1+x^2} < \frac{1}{1+c^2} < \frac{1}{2} \\ &\Rightarrow \frac{1}{1+x^2} < \frac{\arctan x - \arctan 1}{x-1} < \frac{1}{2} \quad \textbf{(1pt)} \end{aligned}$$

multiplions par $x - 1 > 0$, on obtient

$$\forall x \in]1, +\infty[, \quad \frac{x-1}{1+x^2} < \arctan(x) - \arctan(1) < \frac{1}{2}(x-1). \quad \textbf{(0,5pt)}$$

2. **Déduire que :** $\quad \frac{\pi}{4} + \frac{1}{5} < \arctan(2) < \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$.

   D'après la première question si on pose $x = 2$, on obtient

$$\frac{1}{5} < \arctan(2) - \arctan(1) < \frac{1}{2} \Longrightarrow \frac{\pi}{4} + \frac{1}{5} < \arctan(2) < \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}, \text{ car } \arctan 1 = \frac{\pi}{4} \quad \textbf{(1pt)}$$

Exercice 3(5 points)

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} x^2 e^{\frac{1}{x}} & si \quad x < 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \\ x^2(1 + \ln x) & si \quad x > 0 \end{cases}$

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de f en $x_0 = 0$.

- **La continuité en $x_0 = 0$**

  f est continue en $x_0 = 0$ si seulement si $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} x^2 e^{\frac{1}{x}} = 0 = f(0) \quad \textbf{(0,5pt)} \\ et \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} x^2(1 + \ln x) = \lim\limits_{x \to 0^+} x^2 + x^2 \ln x = 0 = f(0) \quad \textbf{(0,5pt)} \end{cases}$$

  Donc f est continue en $x_0 = 0$.

- **La dérivabilité en $x_0 = 0$**

  f est dérivable en 0 si et seulement si $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = l \quad$ (fini).

$$\begin{cases} \underset{x\to 0^-}{lim} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \underset{x\to 0^-}{lim} \frac{x^2 e^{\frac{1}{x}}}{x} = \underset{x\to 0^-}{lim}\, x e^{\frac{1}{x}} = 0 \quad \textbf{(0,5pt)} \\ et \\ \underset{x\to 0^+}{lim} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \underset{x\to 0^+}{lim} \frac{x^2(1+\ln x)}{x} = \underset{x\to 0^+}{lim}\, x(1+\ln x) = \underset{x\to 0^+}{lim}\, (x + x\ln x) = 0 \quad \textbf{(0,5pt)} \end{cases}$$

Donc f est dérivable en $x_0 = 0$ et $f'(0) = 0$.

2. f est-elle de classe C^1 en $x_0 = 0$?

f est de classe C^1 en $x_0 = 0$ si est seulement f est continue et dérivable en $x_0 = 0$ est sa dérivée f' est continue en $x_0 = 0$.

D'après la première question f est continue et dérivable en $x_0 = 0$. **(0,5pt)**

Sa fonction dérivée est donnée par $f'(x) = \begin{cases} (2x-1)e^{\frac{1}{x}} & si \quad x < 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \\ x(3 + 2\ln x) & si \quad x > 0 \end{cases}$ **(1pt)** On a

$$\begin{cases} \underset{x\to 0^-}{lim} f'(x) = \underset{x\to 0^-}{lim}\, (2x-1)e^{\frac{1}{x}} = 0 = f'(0) \quad \textbf{(0,5pt)} \\ et \\ \underset{x\to 0^+}{lim} f'(x) = \underset{x\to 0^+}{lim}\, x(3 + 2\ln x) = \underset{x\to 0^+}{lim}\, (3x + 2x\ln x) = 0 = f'(0) \quad \textbf{(0,5pt)} \end{cases}$$

Donc f' est continue en $x_0 = 0$. D'ou f est de classe C^1 en $x_0 = 0$. **(0,5pt)**

Exercice 4(6 points)

1. **Déterminer le développement limité de $f(x) = \dfrac{e^{\sqrt{1+x^2}} + e^{\sqrt{1-x}}}{1 + \sin(x)}$ à l'ordre 2 au voisinage de 0, puis en déduire l'équation de la tangente au point $(0, f(0))$ à la courbe $(\mathcal{C}_f)$.**

On a $\sqrt{1-x} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$, $1 + \sin x = 1 + x + o(x^2)$, $\sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$.

On a $e^{\sqrt{1+x^2}} = e^{1+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)} = e \cdot e^{\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}$.

On pose $u = \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$ avec $u \to 0$ quand $x \to 0$, alors : $e^u = 1 + u + \dfrac{1}{2}u^2 + o(u^2)$. d'où,

$$e^{\sqrt{1+x^2}} = e \cdot e^{\frac{1}{2}x^2+o(x^2)} = e \cdot \left(1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right). \qquad \textbf{(0,5pt)}$$

Maintenant, on calcule le DL de $e^{\sqrt{1-x}} = e^{1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+o(x^2)} = e \cdot e^{-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+o(x^2)}$.

On pose $t = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$ avec $t \to 0$ quand $x \to 0$, on obtient

$$e^{-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+o(x^2)} = 1 + \left(-\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)\right)^2 + o(x^2).$$

On développe l'expression ci-dessus en ne gardant que les monômes de degré inférieur ou égal à 2, on obtient

$$e^{\sqrt{1-x}} = e \cdot \left(1 - \frac{1}{2}x + o(x^2)\right). \qquad \textbf{(0,5pt)}$$

Alors, $f(x) = \frac{e\left(2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right)}{1+x+o(x^2)}$.

Pour calculer le DL du quotient $\dfrac{2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}{1+x+o(x^2)}$, on peut appliquer l'une des méthodes suivantes :
Méthode 1 : On effectue la division suivant les puissances croissantes.

$$\begin{array}{ccc|c}
2 & -\frac{1}{2}x & +\frac{1}{2}x^2 & 1+x \\ \cline{4-4}
-2 & -2x & & 2-\frac{5}{2}x+3x^2 \\ \cline{1-3}
 & -\frac{5}{2}x & +\frac{1}{2}x^2 & \\
 & +\frac{5}{2}x & +\frac{5}{2}x^2 & \\ \cline{1-3}
 & & 3x^2 &
\end{array}$$

d'où,

$$\frac{2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}{1+x+o(x^2)} = 2-\frac{5}{2}x+3x^2+o(x^2). \qquad \textbf{(1pt)}$$

Au final, on obtient

$$f(x) = 2e-\frac{5e}{2}x+3ex^2+o(x^2). \qquad \textbf{(0,5pt)}$$

Méthode 2 :

On peut aussi mettre la fonction f sous la forme

$$\frac{e\left(2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right)}{1+x+o(x^2)} = e\left(2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right)\frac{1}{1+x+o(x^2)}.$$

Il suffit d'utiliser le DL de $\dfrac{1}{1+y}$ et déduire le DL final par le produit.
L'équation de la tangente à la courbe (C_f) au point $(0, f(0))$:
De la question précédente, on déduit que (C_f) admet au point $(0, e)$ une tangente d'équation

$$y = 2e-\frac{5e}{2}x. \qquad \textbf{(1pt)}$$

1. **En utilisant les développements limités calculer la limite suivante : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\mathrm{ch}x\cos x)}{x^4}$.**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\mathrm{ch}x\cos x)}{x^4} \quad \text{est une forme indéterminée}$$

Au voisinage de 0, on a

$$\mathrm{ch}x\cos x = \left(1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+o(x^4)\right)\left(1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+o(x^4)\right) = 1-\frac{1}{6}x^4+o(x^4). \quad \textbf{(1pt)}$$

D'autre part le DL de $\ln(\mathrm{ch}x\cos x) = \ln(1-\dfrac{1}{6}x^4+o(x^4))$.
On pose $t = -\frac{1}{6}x^4+o(x^4)$ avec $t\to 0$ quand $x\to 0$, on obtient

$$\ln(\mathrm{ch}x\cos x) = -\frac{1}{6}x^4+o(x^4). \quad \textbf{(1pt)}$$

D'où

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\mathrm{ch}x\cos x)}{x^4} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{-\frac{1}{6}x^4+o(x^4)}{x^4}\right) = -\frac{1}{6}. \quad \textbf{(0,5pt)}$$