Examen Final de Maths 1

L'effaceur, la calculatrice et le téléphone portable sont strictement interdits.

Exercice 1(6 points)

1. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$:

$$\sum_{k=1}^{n}(3k^2+k) = (3\cdot 1^2+1)+(3\cdot 2^2+2)+\cdots+(3n^2+n) = n(n+1)^2.$$

2. Montrer que la fonction f définie de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ par : $f(n) = E(\dfrac{n}{2})$ n'est pas injective,

où $E(x)$ désigne la fonction partie entière.

3. Montrer que la relation binaire $\mathcal{R}$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow ch(x)sh(-y) = -ch(y)sh(x)$,
   est symétrique.
4. Soit $A = \left\{3 - \dfrac{1}{2n+1} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$. Déterminer s'ils existent : $\sup A$, $\max A$, $\min A$ et $\inf A$.

Exercice 2(8 points)

Soit la fonction $f : [-1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} -\sqrt{1+x} & si \quad -1 \leq x \leq 0 \\ -\cos(\pi x) + ax + b & si \quad x > 0 \end{cases}, \quad \text{où } a \text{ et } b \text{ sont des paramètres réels.}$$

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de f sur $]-1, 0[\cup]0, +\infty[$ puis calculer f' sur $]-1, 0[\cup]0, +\infty[$. 2.

Déterminer b, pour que f soit continue en 0.

3. Pour cette valeur de b, déterminer les valeurs de a pour que f soit dérivable en 0.
4. On fixe $a = -\dfrac{1}{2}$ et $b = 0$.
   a) Énoncer le Théorème des valeurs intermédiaires.
   b) Montrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet au moins une solution sur $]\dfrac{1}{2}, 1[$.
   c) Étudier la monotonie de f' sur $]\dfrac{1}{2}, 1[$. La solution de l'équation $f'(x) = 0$,
   est-elle unique sur $]\dfrac{1}{2}, 1[$?

Exercice 3(6 points)

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{e^{\sqrt{chx}}}{1 + \arcsin x}.$$

1. Déterminer le développement limité de f à l'ordre 3 au voisinage de 0.
2. En déduire l'équation de la tangente au point $(0, f(0))$ à la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de f et donner sa position par rapport à $\mathcal{C}_f$.
3. Calculer la limite suivante : $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - e}{x}$.

On donne les développements limités au voisinage de 0 suivants.

$chx = 1 + \frac{x^2}{2!} + o(x^3)$, $\quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$, $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3)$

$\arcsin x = x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$, $\quad \dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3)$.