Corrigé de l'épreuve finale

Exercice 1. (6 points)

1. **Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:**

$$\mathcal{P}(n) : \quad \sum_{k=1}^{n} 3k^2 + k = n(n+1)^2.$$

Pour $n = 1$, on a : $3 \cdot 1^2 + 1 = 4$ et $1 \cdot 2^2 = 4$, donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Supposons que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. On a par hypothèse :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} 3k^2 + k &= \sum_{k=1}^{n} 3k^2 + k + 3(n+1)^2 + (n+1) \\
&= n(n+1)^2 + 3(n+1)^2 + (n+1) \\
&= (n+1)(n(n+1) + 3(n+1) + 1) \\
&= (n+1)(n^2 + 4n + 4) \\
&= (n+1)(n+2)^2,
\end{aligned}$$

donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. D'où, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

2. **Montrer que l'application $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, définie par $f(n) = E(\frac{n}{2})$ n'est pas injective.**

L'application f n'est pas injective car il existe deux entiers naturels n_1 et n_2 différents tels que $f(n_1) = f(n_2)$ et $n_1 \neq n_2$. On peut prendre par exemple $n_1 = 0$ et $n_2 = 1$ $f(0) = f(1) = 0$.

3. **Montrer que la relation $\mathcal{R}$ est symétrique.** $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x\mathcal{R}y \Leftrightarrow ch(x)sh(-y) = -sh(x)ch(y)$.

On a

$$\begin{aligned}
\forall x, y \in \mathbb{R},\quad x\mathcal{R}y &\Rightarrow ch(x)sh(-y) = -sh(x)ch(y) \\
&\Rightarrow -sh(x)ch(y) = ch(x)sh(-y),
\end{aligned}$$

comme sh est une fonction impaire ($\forall x \in \mathbb{R}$, $sh(-x) = -sh(x)$), alors

$$\begin{aligned}
\forall x, y \in \mathbb{R},\quad x\mathcal{R}y &\Rightarrow sh(-x)ch(y) = -ch(x)sh(y) \\
&\Rightarrow y\mathcal{R}x.
\end{aligned}$$

D'où $\mathcal{R}$ est symétrique.

4. **Soit $A = \{3 - \frac{1}{2n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, déterminer, s'ils existent,** $\sup A$, $\inf A$, $\min A$ **et** $\max A$.

Première méthode.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} n \geq 0 \quad &\Rightarrow \quad 2n+1 \geq 1 \\ &\Rightarrow \quad 0 < \frac{1}{2n+1} \leq 1 \\ &\Rightarrow \quad 2 \leq 3 - \frac{1}{2n+1} < 3. \end{aligned}$$

Donc 2 est un minorant de A et $2 \in A$ (pour $n = 0$) par conséquent $\min A = \inf A = 2$

D'autre part, 3 est un majorant de A et $3 \notin A$. Comme $\underset{x \to +\infty}{lim} \left(3 - \frac{1}{2n+1}\right) = 3$, alors $\sup A = 3$.
Le $\max A$ n'existe pas (car $3 \notin A$).

Deuxième méthode.

On considère la suite $(U_n)_n$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par

$$U_n = 3 - \frac{1}{2n+1}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$U_{n+1} - U_n = \left(3 - \frac{1}{2n+3}\right) - \left(3 - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{2}{(2n+1)(2n+3)} > 0,$$

donc, la suite $(U_n)_n$ est strictement croissante, donc $U_0 < U_1 < U_2 \cdots < U_n, \forall n \in \mathbb{N}^\star$.
On en déduit que $\min A = \inf A = U_0 = 2$.
Etant donné que la suite $(U_n)_n$ est croissante et majorée par 3 (car $3 - \frac{1}{2n+1} < 3$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $(U_n)_n$ converge vers $l = \sup A$.

$$l = \underset{n \to +\infty}{lim} U_n = \underset{n \to +\infty}{lim} \left(3 - \frac{1}{2n+1}\right) = 3.$$

On remarque que $3 \notin A$, donc $\max A$ n'existe pas.

Exercice 2. (8 points)

Soit $f : [-1, +\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} -\sqrt{1+x}, & -1 \leq x \leq 0 \\ -cos(\pi x) + ax + b, & x > 0. \end{cases} \quad \text{où } a \text{ et } b \text{ sont deux paramètres réels}$$

1. **Etudier la continuité et la dérivabilité de f sur $]-1, 0[\cup]0, +\infty[$.**
   - **La continuité de f sur** $]-1, 0[\cup]0, +\infty[$:
     — Pour $x \in]-1, 0[$, la fonction f est la composée de la fonction polynôme $x \mapsto 1+x$, continue sur $\mathbb{R}$ par la fonction racine carrée $x \mapsto \sqrt{x}$ continue sur $\mathbb{R}^+$ donc f est continue $]-1, 0[$.
     — Pour $x \in]0, +\infty[$, f est la somme de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ (l'une est la fonction $x \mapsto cosx$, l'autre est une fonction polynôme $x \mapsto ax+b$), donc f est continue sur $]0, +\infty[$.

- **La dérivabilité de f sur $]-1,0[\cup]0,+\infty[$:**

Pour les mêmes raisons que précédemment f est dérivable sur $]-1,0[\cup]0,+\infty[$.

- La dérivée de f sur $]-1,0[\cup]0,+\infty[$ est donnée par

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-1}{2\sqrt{1+x}}, & -1 < x < 0 \\ \pi sin(\pi x) + a, & x > 0. \end{cases}$$

2. **Déterminer la valeur de b pour que f soit continue en 0.**

La fonction f est continue en 0 si est seulement si $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \left(-\sqrt{1+x}\right) = -1 = f(0) \\ et \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (-cos(\pi x) + ax + b) = -1 + b \end{cases} \Rightarrow -1 + b = -1 \Rightarrow b = 0.$$

3. **Déterminer la valeur de a pour que f soit dérivable en 0.**

f est dérivabale en 0 si et seulement si $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = l \qquad (C)$.

(i) $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{-\sqrt{1+x}+1}{x}$ est une forme indéterminée $\frac{0}{0}$. Pour lever cette forme indéterminée, on applique la règle de l'Hopital.

Soient

$$\begin{cases} g(x) = -\sqrt{1+x} + 1 \Rightarrow g'(x) = \dfrac{-1}{2\sqrt{1+x}}, \\ h(x) = x \Rightarrow h'(x) = 1 \end{cases}$$

Remarque : Les conditions d'application de la règle de l'Hopital sont satisfaites. En effet, g et h sont deux fonctions définies, continues, et dérivables au voisinage de 0 et h' ne s'annule pas.

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{g'(x)}{h'(x)} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-1}{2\sqrt{1+x}} = \frac{-1}{2} \Rightarrow \lim_{x\to 0^-} \frac{-\sqrt{1+x}+1}{x} = \frac{-1}{2} \qquad (1).$$

(ii) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{-cos(\pi x) + ax + 1}{x}$ est une forme indéterminée. En appliquant la règle de l'Hopital, on obtient :

$$\lim_{x\to 0^+} \pi sin(\pi x) + a = a \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} \frac{-cos(\pi x) + ax + 1}{x} = a \qquad (2).$$

En utilisant la condition (C) de la dérivabilité de f en 0 et par la limite à gauche (1) et la limite à droite (2) du taux d'accroissement $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x}$, on obtient :

$$a = \frac{-1}{2}$$

4. **On fixe $a = \dfrac{-1}{2}$ et $b = 0$.**

$$f(x) = \begin{cases} -\sqrt{1+x}, & -1 \leq x \leq 0 \\ -cos(\pi x) - \dfrac{x}{2}, & x > 0. \end{cases}$$

   (a) **Énoncer le Théorème des valeurs intermédiaires :** Voir le cours.

   (b) **Montrer que $f'(x) = 0$ admet au moins une solution sur $]\frac{1}{2}, 1[$.**
   De la question (1) on a : $f'(x) = \pi sin(\pi x) - \frac{1}{2}$, $\forall x \in]\frac{1}{2}, 1[$. Comme f' est continue sur l'intervalle $]\frac{1}{2}, 1[$ et $f'(1/2)f'(1) = -(\frac{2\pi-1}{4}) < 0$.
   D'après le Théorème des valeurs intermédiaires appliqué à la fonction f', il existe au moins $c \in]\frac{1}{2}, 1[$ tel que $f'(c) = 0$.

   (c) **Étudier la monotonie de f' sur** $]\frac{1}{2}, 1[$.
   Pour tout $x \in]\frac{1}{2}, 1[$ on a : $f''(x) = \pi^2 cos(\pi x)$ alors $f''(x) = \pi^2 cos(\pi x) < 0$ (car $-1 < cos(\pi x) < 0$ pour tout $x \in]\frac{1}{2}, 1[$), donc f' est strictement décroissante sur $]\frac{1}{2}, 1[$.
   L'équation $f'(x) = 0$ admet une unique solution sur $]\frac{1}{2}, 1[$.

Exercice 3 . (6 points)

Soit

$$f(x) = \frac{e^{\sqrt{ch(x)}}}{1 + arcsin(x)}.$$

1. **Le DL de la fonction f au voisinage de 0.** On a

$$\begin{aligned} ch(x) &= 1 + \frac{1}{2!}x^2 + o(x^3), \\ 1 + arcsin(x) &= 1 + x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

Pour calculer le DL de $\sqrt{ch(x)} = \sqrt{1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)}$, on pose $t = \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)$ avec $t \to 0$ quand $x \to 0$ et on utilise le DL :

$$\sqrt{1+t} = 1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 + \frac{1}{16}t^3 + o(t^3),$$

on obtient :

$$\begin{aligned} \sqrt{ch(x)} = \sqrt{1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)} &= 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x^2 + o(x^3)\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}x^2 + o(x^3)\right)^2 \\ &\quad + \frac{1}{16}\left(\frac{1}{2}x^2 + o(x^3)\right)^3 + o(x^3), \end{aligned}$$

on développe l'expression en ne gardant que les monômes de degré inférieurs ou égals à 3, on obtient

$$\sqrt{ch(x)} = 1 + \frac{1}{4}x^2 + o(x^3).$$

Maintenant, on calcule le DL de $e^{\sqrt{ch(x)}} = e \cdot e^{\frac{1}{4}x^2+o(x^3)}$. On pose $u = \frac{1}{4}x^2 + o(x^3)$ avec $u \to 0$ quand $x \to 0$, ce qui donne :

$$e^u = 1 + u + \frac{1}{2!}u^2 + \frac{1}{3!}u^3 + o(u^3).$$

d'où,

$$e^{\frac{1}{4}x^2+o(x^3)} = 1 + \left(\frac{1}{4}x^2 + o(x^3)\right) + \frac{1}{2!}\left(\frac{1}{4}x^2 + o(x^3)\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{1}{4}x^2 + o(x^3)\right)^3 + o(x^3).$$

on développe l'expression ci-dessus en ne gardant que les monômes de degré inférieurs ou égals à 3, on obtient

$$e^{\frac{1}{4}x^2+o(x^3)} = 1 + \frac{1}{4}x^2 + o(x^3).$$

Alors,

$$f(x) = \frac{e\left(1 + \frac{1}{4}x^2 + o(x^3)\right)}{1 + x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)}.$$

Pour calculer le DL du quotient $\dfrac{1 + \frac{1}{4}x^2 + o(x^3)}{1 + x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)}$, on peut appliquer l'une des méthodes suivantes :

Méthode 1 : On effectue la division suivant les puissances croissantes.

$$\begin{array}{cccc|c}
1 & & +\frac{1}{4}x^2 & & 1 + x + \frac{1}{6}x^3 \\ \cline{5-5}
-1 & -x & & -\frac{1}{6}x^3 & 1 - x + \frac{5}{4}x^2 - \frac{17}{12}x^3 \\ \cline{1-4}
 & -x & +\frac{1}{4}x^2 & -\frac{1}{6}x^3 & \\
 & x & +x^2 & & \\ \cline{1-4}
 & & \frac{5}{4}x^2 & -\frac{1}{6}x^3 & \\
 & & -\frac{5}{4}x^2 & -\frac{5}{4}x^3 & \\ \cline{1-4}
 & & & -\frac{17}{12}x^3 &
\end{array}$$

d'où,

$$\frac{1 + \frac{1}{4}x^2 + o(x^3)}{1 + x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)} = 1 - x + \frac{5}{4}x^2 - \frac{17}{12}x^3 + o(x^3).$$

Au final, on obtient

$$f(x) = e - ex + \frac{5e}{4}x^2 - \frac{17e}{12}x^3 + o(x^3).$$

Méthode 2 :

On a

$$\begin{aligned}
\frac{e(1 + \frac{1}{4}x^2 + o(x^3))}{1 + x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)} &= \left(e(1 + \frac{1}{4}x^2 + o(x^3))\right)\frac{1}{1 + x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)} \\
&= \left(1 + \frac{1}{4}x^2 + o(x^3)\right)\frac{1}{1+h}
\end{aligned}$$

avec $h = x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$ tel que $h \to 0$ quand $x \to 0$. Le DL de $\frac{1}{1+h}$ à l'ordre 3 est donné par

$$\frac{1}{1+h} = 1 - h + h^2 - h^3 + o(h^3).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+x+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)} &= 1 - \left(x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\right) + \left(x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\right)^2 \\ &\quad - \left(x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\right)^3 + o(x^3), \end{aligned}$$

ce qui donne, après développement et en ne gardant que les monômes de degré inférieurs ou égals à 3, le DL suivant :

$$\frac{1}{1+x+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)} = 1 - x + x^2 - \frac{7}{6}x^3 + o(x^3).$$

on a, alors

$$\begin{aligned} \frac{e\left(1+\frac{1}{4}x^2+o(x^3)\right)}{1+x+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)} &= e\left(1+\frac{1}{4}x^2+o(x^3)\right)\left(1-x+x^2-\frac{7}{6}x^3+o(x^3)\right) \\ &= e - ex + \frac{5e}{4}x^2 - \frac{17e}{12}x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

2. **L'équation de la tangente à la courbe de f au point $(0, f(0))$:** De la question précédente, on déduit que la courbe représentative de f admet au point $(0, e)$ une tangente d'équation $y = e - ex$.

3. **La position de la tangente par rapport à la courbe de f :** On a $f(x) - y \sim \frac{5e}{4}x^2$, alors $f(x) - y$ est positive au voisinage de 0. On déduit que, la courbe de f est au-dessus de sa tangent en $(0, e)$.

4. **Calculer la limite suivante :**

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-e}{x} \quad \text{est une forme indéterminée.}$$

Au voisinage de 0 on a : $f(x) - e = -ex + o(x)$, donc

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-e}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{-ex+o(x)}{x} = -e.$$