L'effaceur, la calculatrice et le téléphone portable sont strictement interdits.

Exercice 1(07 points)

On considère la fonction f définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{1}{chx}$.

1. Calculer la dérivée de f et dresser son tableau de variations.
2. Déterminer l'image directe $f(\{-1, 1\})$ et l'image réciproque $f^{-1}(\{0\})$.
3. Déduire alors que f n'est ni injective, ni surjective.
4. Déterminer un ensemble de départ et un ensemble d'arrivée pour que f soit bijective, trouver alors l'expression de la fonction réciproque f^{-1}. (On rappelle que $chx = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$).

Exercice 2(06 points)

Soit la fonction $g : \mathbb{R}^\star \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par : $g(x) = \dfrac{e^{\sin x} - 1}{x}$.

1. Montrer que la fonction g est prolongeable par continuité en $x = 0$.
2. On pose $\tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x) & si \quad x \neq 0 \\ l & si \quad x = 0 \end{cases}$, où $l = \lim\limits_{x \to 0} g(x)$.

   $a)$ Montrer que $\tilde{g}$ est dérivable en $x = 0$ et donner la valeur de $\tilde{g}'(0)$.

   $b)$ Calculer $\tilde{g}'$ sur $\mathbb{R}$, (on a $\tilde{g}' = g'$ sur $\mathbb{R}^\star$).

Exercice 3(07 points)

1. Déterminer le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de $+\infty$ de la fonction $f(x) = x - x^2 \ln(1 + \frac{1}{x})$ et déduire la limite suivante :

$$\lim_{x \to +\infty} \left(x - x^2 \ln(1 + \frac{1}{x}) \right).$$

2. Déterminer le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de la fonction $g(x) = \dfrac{x\sqrt{1+x}}{1 - e^x}$, puis déduire la limite suivante :

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{x\sqrt{x+1}}{1 - e^x} \right).$$

On donne les développements limités au voisinage de 0 suivants.

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$, $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$, $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)$
$\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + o(x^2)$.