Examen Final de Maths 1

L'effaceur, la calculatrice et le téléphone portable sont strictement interdits

---

Exercice 1(6 points)

1) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

2) Montrer que la fonction f définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \ln\left(|x| + \frac{1}{e}\right)$ n'est pas injective.

3) Soit $f(x) = E(2x) - 2E(x)$. Calculer $f(x)$ pour $x \in [0, \frac{1}{2}[$ et pour $x \in [\frac{1}{2}, 1[$,
où $E(x)$ désigne la fonction partie entière de x.

4) Soit $A = \left\{ \frac{x+1}{x+2} \mid x \in]-\infty, -3] \right\}$. Déterminer s'ils existent : $\sup A$, $\max A$, $\min A$ et $\inf A$.

Exercice 2 :(8 points)

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x - b\sin x & si \quad x \leq 0 \\ \dfrac{a - \cos x}{x} & si \quad x > 0 \end{cases}, \quad \text{où } a \text{ et } b \text{ sont des paramètres réels.}$$

1) Étudier la continuité et la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}^\star$ puis calculer f' sur $\mathbb{R}^\star$.

2) Déterminer a, pour que f soit continue en 0.

3) Pour cette valeur de a, déterminer b pour que f soit dérivable en 0.

4) On fixe $a = 1$ et $b = \frac{1}{2}$.

   a) Énoncer le Théorème de Rolle.

   b) Montrer qu'il existe $c \in]0, 2\pi[$, tel que $f'(c) = 0$.

   c) Montrer que pour tout $x \in]0, 1[$, la fonction f est strictement croissante.
   (Indication : $\forall x \in]0, 1[$ on a $1 - \cos x < x \sin x$).

   d) En déduire que f est bijective de $]0, 1[$ dans un intervalle J que l'on déterminera.

Exercice 3(6 points)

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{e^{1+\arctan x}}{\cos(2x)}$$

1) Déterminer le développement limité de f à l'ordre 3 au voisinage de 0.

2) En déduire l'équation de la tangente au point $(0, f(0))$ à la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de f et donner sa position par rapport à $\mathcal{C}_f$.

3) Calculer la limite suivante : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - e}{x}$.

On donne les développements limités au voisinage de 0 suivants :

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^3), \; e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3), \; \arctan x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3), \; \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3).$$